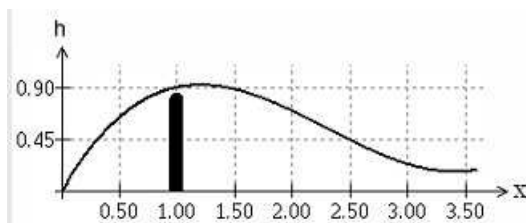


**ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FUNCIONES REALES DE
UNA Y VARIAS VARIABLES REALES
EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN
TEMAS 1 A 5 - EJERCICIO 5**

1. Una página de papel rectangular ha de contener 61 cm^2 para el texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 3.81 cm y los laterales de 2.54 cm . ¿Qué dimensiones debe tener la página para utilizar la menor cantidad posible de papel?

2. Se quiere lanzar un cohete desde una rampa de lanzamiento que forma un ángulo de $\pi/3$ con la horizontal. Llamamos $h(x)$ a su trayectoria, donde x es la distancia horizontal y h es la altura.



La trayectoria del cohete debe pasar 100 metros por encima de un monte de 800 metros de altura que se encuentra a 1 Km del punto de lanzamiento. Además, el cohete debe tener posición horizontal en el punto $x = 3.5 \text{ Km}$. Ver en la figura una posible trayectoria del cohete, las distancias son en Km.

- a) Calcular una posible función $h(x)$ y la altura máxima que alcanza el cohete en ese caso.
- b) Supongamos que tenemos la función $x(t)$ que expresa la posición horizontal del cohete en función del tiempo t . Calcular la velocidad de la altura h respecto a t .
3. -Demostrar que una sucesión $\{x_n\}$ convergente es siempre acotada. ¿Es cierto el recíproco?

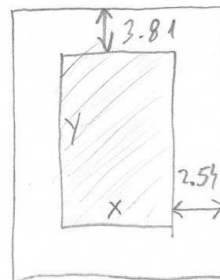
RESPUESTAS

1. Área: $S(x, y) = (x + 5.08)(y + 7.62)$

$$xy = 61$$

$$S(x) = (x + 5.08)\left(\frac{61}{x} + 7.62\right)$$

Objetivo: Hallar el valor de x que minimice $S(x)$



$$S(x) = 99.7096 + 7.62x + \frac{309.88}{x}$$

$$S'(x) = 7.62 - \frac{309.88}{x^2}; \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 6.377$$

$x = 6.377$ también es mínimo absoluto de $S(x)$. $y = \frac{61}{6.377} = 9.56$ y $S = 196.896 \text{ cm}^2$ es el área mínima.

2. $h'(3.5) = 0$ $h'(0) \text{ tg } \pi/3 \approx 1.73$; $h(0) = 0$ $h(1) = 0.9$

tomamos $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$h(0) = 0 \Rightarrow d = 0; \quad h'(0) = 1.73 \Rightarrow c = 1.73$$

$$\begin{aligned} h(1) = 0.9 &\Rightarrow a + b + 1.73 = 0.9 \Rightarrow a + b = -0.83 \\ h'(3.5) = 0 &\Rightarrow 36.25a + 7b = -1.73 \end{aligned} \Rightarrow a = 0.14; b = -0.97$$

$$h(x) = 0.14x^3 - 0.97x^2 + 1.73x$$

$$\frac{dh}{dt} = 3 \cdot 0.14x^2 \frac{dx}{dt} - 2 \cdot 0.97x \frac{dx}{dt} + 1.73 \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} (0.42x^2 - 1.94x + 1.73)$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \ x_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$

tomamos $\epsilon > 0$ cualquiera. Fuera de $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ pueden encontrarse x_1, x_2, \dots, x_{n_0} , tomamos un intervalo $[m, M]$ tal que $(l - \epsilon, l + \epsilon) \subset [m, M]$ y buscamos el mínimo y el máximo del conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, m, M\}$ que serán cotas inferior y cota superior de la sucesión.

El recíproco no es cierto en general:

$\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ es una sucesión acotada y no convergente