ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES
EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN
TEMAS 1 A 5 - EJERCICIO 4

1. Las raíces de la ecuación $4z^3 + 4z^2 + (1-2i)z = 0$ forman un triángulo. Representarlo gráficamente y calcular su perímetro y su área.

2. Definir las siguientes propiedades de una sucesión numérica: divergente hacia infinito, acotada superiormente, creciente. ¿Es posible que una sucesión verifique las tres propiedades? ¿Y sólo dos de ellas?

3. El coste C de la adquisición y el transporte de componentes utilizados en un proceso de manufactura es aproximadamente:

$$C(x) = 10\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x+3}\right) \quad x \in [3,6]$$

   donde C se mide en miles de dólares y x es el tamaño del pedido, en cientos de unidades Estudiar la certeza de la siguiente afirmación: "Existe un cierto valor de tamaño de pedido tal que la razón de cambio del coste es cero para dicho valor".

4. Considerar la función $h(x)$ definida en $[a,b]$ por:

$$h(x) = \int_a^x y(z)\,dz$$

   donde $y(x)$ es la función cuya gráfica se representa en la figura adjunta. Estudiar:

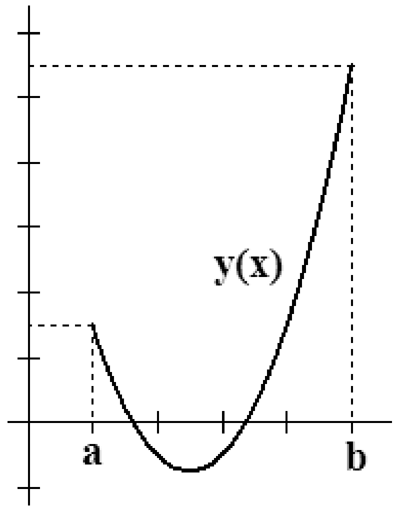
   a) La existencia de primera y segunda derivadas de $h(x)$

   b) El crecimiento de $h(x)$

   c) La concavidad de $h(x)$

   d) Puntos de inflexión de $h(x)$

   e) Situar de forma aproximada el valor medio de $y(x)$ en $[a,b]$, justificando la operación.



5. Se toman del intervalo $[a,b]$ los puntos $z_k \in [x_k,\, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$, $x_k = a + kh$, $k = 0, \ldots, n$, $h = (b-a)/n$. Demostrar que existe el siguiente límite y calcularlo:

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} h\, z_k\, \mathrm{e}^{z}$$

6. Calcular el polinomio de McLaurin del mayor orden posible para la función $s(u)$. Acotar el error cometido al calcular aproximadamente $s(-0.2)$.

$$s(u) = \begin{cases} \mathrm{e}^u & \text{para } u \leq 0 \\ u^3 + 0.5u^2 + u + 1 & \text{para } u > 0 \end{cases}$$

7. La tabla adjunta muestra cinco valores de una función $y(x)$. Supongamos que la curva gira alrededor del eje OX. Calcula de forma aproximada el volumen del sólido generado.

x	0.00	0.125	0.25	0.375	0.50
y	1.00	0.98	0.94	0.88	0.80

RESPUESTAS

1. $4z^3+4z^2+(1-2i)z = 0 \Leftrightarrow z(4z^2+4z+(1-2i)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 4z^2+4z+(1-2i) = 0 \end{cases}$

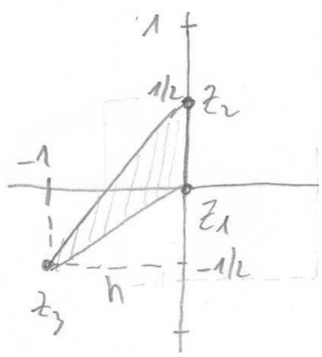
$$4z^2+4z+(1-2i) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16(1-2i)}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{2i}}{2}$$

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2_{\frac{2}{\pi}}} = \begin{cases} \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}) = 1+i \\ \sqrt{2}_{\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4}) = -1-i \end{cases}$$

Raíces: $z_1 = 0$; $z_2 = \dfrac{i}{2}$; $z_3 = -1 - \dfrac{i}{2}$

PERÍMETRO: $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

ÁREA: $\dfrac{|z_1 - z_2|\ h}{2} = \dfrac{1}{4}$



2. Divergencia hacia infinito:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > n_0\ x_n > M$$

Acotada superiormente:

$$\exists m \in \mathbb{R} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq M$$

Creciente:

$$\forall n_0 \in \mathbb{N},\ x_{n+1} > x_n$$

Las dos primeras propiedades son incompatibles, no pueden darse a la vez en una sucesión.

Divergente y creciente: por ejemplo $\{x_n\} = \{n\}$

Cota superior y creciente: por ejemplo $\{x_n\} = \{-\dfrac{1}{n}\}$

3. $C(x) = 10\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x+3}\right) \quad x \in [3,6]$

¿$\exists z \in (3,6) \,|\, C'(z) = 0$?

$C(x)$ es continua en $[3,6]$ y derivable en $(3,6)$

$C(3) = 25/3 = C(6)$, de modo que por el Teorema de Rolle $\exists z \in (3,6) \,|\, C'(z) = 0$

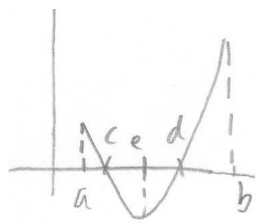
$$C'(x) = 10\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{3}{(x+3)^2}\right);\ C'(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(x+3)^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{108}}{4} = \begin{cases} 4.09 \\ -1.098 \end{cases} \qquad z \approx 4.09 \in (3,6)$$

4. Suponemos como hipótesis que $y(x)$ es continua

   a) En $[a,b] \Rightarrow h(x)$ es derivable y $h'(x) = y(x)$
   Si también suponemos que $y(x)$ es derivable (lo cual es razonable a partir de su gráfica), $h''(x) = y'(x)$

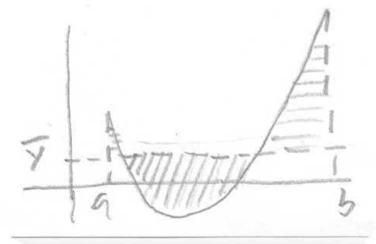
   b) $h(x)$ creciente $\Leftrightarrow h'(x) > 0 \Leftrightarrow y(x) > 0$; por tanto
   $h(x)$ creciente en $(a,c) \cup (d,b)$
   $h(x)$ decreciente en (c,d)

   c) $h(x)$ cóncava $\Leftrightarrow h''(x) > 0 \Leftrightarrow y'(x) > 0 \Leftrightarrow y(x)$ es creciente; por tanto $h(x)$ cóncava en (e,b), convexa en (a,e)

   d) Cambia de concavidad en $x = e \Rightarrow$ punto de inflexión

   e) Las áreas limitadas por la curva por encima y por debajo de $\bar{y}$ deben ser iguales

5. Si $y(x)$ es continua en $[a,b]$ y tomamos $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$ $k = 0, \ldots, n$ $z_k \in [x_k, x_{k+1}]$ $k = 0, \ldots, n-1$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \sum k = 0^{n-1} h\, y(z_k) = \int_a^b y(x)\, dx$$

En nuestro caso $y(x) = x\,\mathrm{e}^x$ es continua en $[a,b]$:

$$\lim_{h\to 0} \sum k = 0^{n-1} h\, z_k\, \mathrm{e}^{z_k} = \int_a^b x\,\mathrm{e}^x\, dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \mathrm{e}^x\, dx & v = \mathrm{e}^x \end{bmatrix} =$$

$$= x\,\mathrm{e}^x \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \mathrm{e}^x\, dx = b\mathrm{e}^b - a\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^a$$

6. Veamos hasta qué orden es $s(u)$ derivable en $u=0$

$$s(0^+) = s(0^-) = 1 \Rightarrow \text{ continua}$$

$$\begin{cases} s'(0^+) = 3u^2 + u + 1\big|_{u=0} = 1 \\ s'(0^-) = \mathrm{e}^u\big|_{u=0} = 1 \end{cases} \Rightarrow s'(0) = 1$$

$$\begin{cases} s''(0^+) = 6u + 1\big|_{u=0} = 1 \\ s''(0^-) = \mathrm{e}^u\big|_{u=0} = 1 \end{cases} \Rightarrow s''(0) = 1$$

$$\begin{cases} s'''(0^+) = 6 \\ s'''(0^-) = \mathrm{e}^u\big|_{u=0} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ no existe } s'''(0)$$

Por tanto $P_2(u) = 1 + u + 0.5u^2$. Para acotar el error usamos $P_1(u) = 1 + u$, a fin de poder usar $s''(u)$

$$y(a+h) - P_1(a+h) = \frac{y''(z)h^2}{2} \; z \in (a, a+h)$$

en nuestro caso $a = 0$, $h = -0.2$

$$|s(-0.2) - P_1(-0.2)| = \frac{(0.2)^2}{2}\mathrm{e}^z \; z \in (-0.2, 0)$$

Por tanto, ERROR $\leq \dfrac{0.04}{2}\mathrm{e}^0 = 0.01$

Aproximación: $P_1(-0.2) = 1 - 0.2 = 0.8$

7. $V = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$, empleando la fórmula de los rectángulos, tomando el extremo izquierdo de cada subintervalo, $h = 0.125$ $a = 0$, $b = 0.5$

x	0	0.125	0.25	0.375	0.50
y	1	0.98	0.94	0.88	0.80
y^2	1	0.9604	0.8836	0.7744	0.64

$V \approx \pi \cdot 0.125(1 + 0.9604 + 0.8836 + 0.7744) = 1.6723$