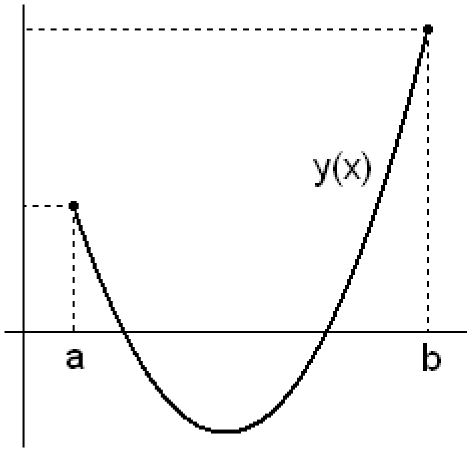
ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES
EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN
TEMAS 1 A 5 - EJERCICIO 3

1. Considerar la función $h(x)$ definida en $[a, b]$ del siguiente modo:

$$h(x) = \int_a^x y^2(t)\, dt$$

donde $y(t)$ es la función que aparece representada gráficamente en la figura. Se pide:



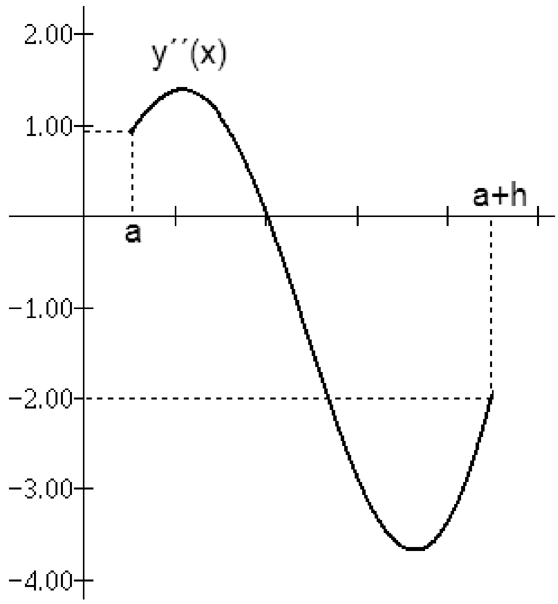
   a) Estudiar la derivabilidad de $h(x)$.

   b) Estudiar el crecimiento/decrecimiento y la existencia de extremos de $h(x)$.

   c) Estudiar la concavidad/convexidad y la existencia de puntos de inflexión de $h(x)$.

   d) Trazar aproximadamente la gráfica de $h(x)$.

2. Supongamos que una función $y(x)$ es derivable hasta orden dos.



   a) Expresar el valor de $y(a+h)$ mediante el polinomio y el resto de Taylor para $n = 1$.

   b) Deseamos calcular aproximadamente el valor de $y'(a)$ empleando la expresión

$$\frac{y(a+h) - y(a)}{h}$$

   La figura adjunta muestra la gráfica de $y''(x)$. Calcular una cota del error cometido.

3. Si dos resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo, el valor R de la

resistencia resultante se puede modelizar mediante la siguiente relación:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

a) Supongamos que R_1 y R_2 varían respectivamente a 50 y 75 Ω/s.¿Cuál es el ritmo de cambio de R?

b) Supongamos que R_1 y R_2 varían a la misma velocidad. Estudiar el ritmo de cambio de R.

4. Dado el intervalo de números reales $[0, 2]$, $n \in \mathbb{N}$, $h = 2/n$, se toman los puntos:

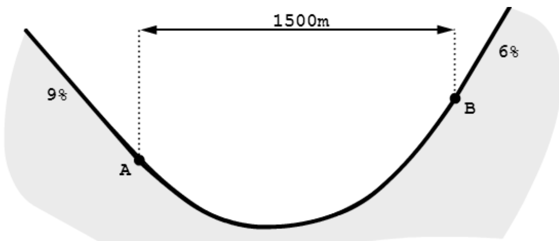
$$x_k = kh, \text{ para } k = 0, \ldots, n$$

$$z_k \in [x_k, x_{k+1}] \text{ para } k = 0, \ldots, n-1$$

Demostrar que existe el siguiente límite y calcularlo:

$$\lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} h\sqrt{4 - (z_k)^2}$$

5. Se van a construir tres tramos de autopista, dos de ellos rectos, con pendientes de 9 % y 6 % respectivamente, y un tramo central parabólico (ver figura). Calcular las ecuaciones de los tres tramos.



RESPUESTAS

1. Supongamos como hipótesis que $y(x)$ es continua en $[a, b]$

   a) $h(x)$ es derivable y $h'(x) = y^2(x)$, aplicando el Teorema fundamental del Cálculo.

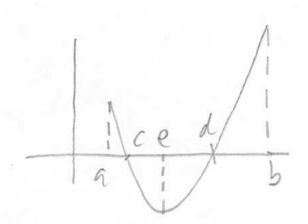
   b) $h'(x) = y^2(x)$

   $\forall x \in (a, c)$, $h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ creciente en (a, c)

   $\forall x \in (c, d)$, $h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ creciente en (c, d)

   $\forall x \in (d, b)$, $h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ creciente en (d, b)

   $h'(c) = h'(d) = 0 \Rightarrow$ posibles extremos



   c) $h''(x) = 2y(x)y'(x)$, $y'(e) = 0$

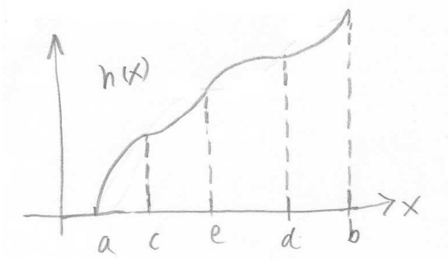
   $\forall x \in (a, c)$, $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$ (ya que $y(x)$ es decreciente) $\Rightarrow$
   $\Rightarrow h''(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ convexa en (a, c)

   $\forall x \in (c, e)$, $y(x) < 0$, $y'(x) < 0 \Rightarrow h''(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ cóncava

   $\forall x \in (e, d)$, $y(x) < 0$, $y'(x) > 0 \Rightarrow h''(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ convexa

   $\forall x \in (d, b)$, $y(x) > 0$, $y'(x) > 0 \Rightarrow h''(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ cóncava

   en $x = c, d, e$ hay cambio de concavidad, por tanto son puntos de inflexión



2. $y(a+h) = y(a) + y'(a)h + \dfrac{y''(z)}{2}h^2 \;\; z \in (a, a+h)$

   $$\left|\frac{y(a+h) - y(a)}{h} - y'(a)\right| = \frac{y''(z)}{2}\,h$$

   $$\text{ERROR} = \left|\frac{y(a+h) - y(a)}{h} - y'(a)\right| = \frac{|h|}{2}\,|y''(z)| \geq \frac{|h|}{2}\,4 = 2\,|h|$$

   COTA DEL ERROR$= 2\,|h| = 2h$ ya que en este caso $h > 0$

3. a) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{R} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{R_2}$; $R(t) = \dfrac{R_1(t)R_2(t)}{R_1(t)+R_2(t)}$

$-R'(t)\dfrac{1}{R^2} = -R_1'(t)\dfrac{1}{R_1^2} - R_2'(t)\dfrac{1}{R_2^2}$

$R'(t) = R^2(t)\left(\dfrac{R_1'(t)}{R_1^2(t)} + \dfrac{R_2'(t)}{R_2^2(t)}\right) = \left(\dfrac{R_1(t)R_2(t)}{R_1(t)+R_2(t)}\right)^2\left(\dfrac{50}{R_1^2(t)} + \dfrac{75}{R_2^2(t)}\right)$

b) $R_1'(t) = R_2'(t) = v(t)$

$R'(t) = \left(\dfrac{R_1(t)R_2(t)}{R_1(t)+R_2(t)}\right)^2\left(\dfrac{v(t)}{R_1^2(t)} + \dfrac{v(t)}{R_2^2(t)}\right)$

4. Si $x_k = a + kh,\ k = 0,\ldots,n,\ z_k \in [x_k.x_{k+1}]\ k = 0,\ldots,n-1$

$$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} h\,y(z_k) = \int_a^b y(x)\,dx \text{ siendo } y(x) \text{ continua en } [a,b]$$

En este caso $y(x) = \sqrt{4-x^2}$, continua en $[a,b] = [0,2]$

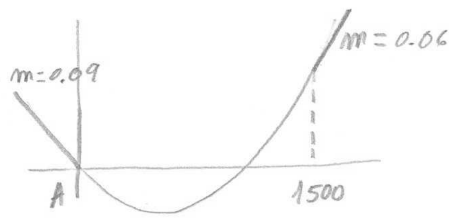
$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x = 2\operatorname{sen} t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = 2\cos t\,dt & x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt =$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = \pi$$

5.

$y(0) = 0$

$y'(0) = -0.09$

$y'(1500) = 0.06$



Tomemos un tramo central de la forma $y = ax^2 + bx + c$

$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0,\;\; y'(x) = 2ax + b$

$y'(0) = b = -0.09$

$y'(1500) = 3000a - 0.09 = 0.06 \;\Rightarrow\; a = 0.00005$

$y = 0.00005x^2 - 0.09x$ Tramo Parabólico

$y = -22.5 + 0.06(x - 1500)$ Tramo Derecho

$y = -0.09x$ Tramo izquierdo