ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES
EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN
TEMAS 1 A 5 - EJERCICIO 2

1. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:

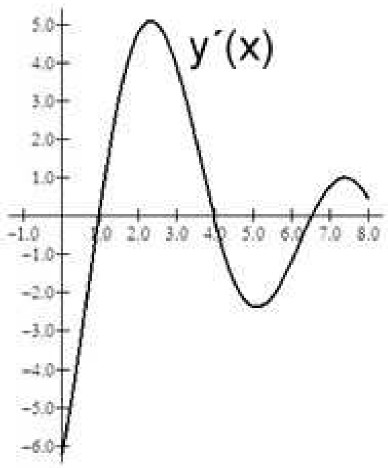
    a) ¿Qué condiciones deben de cumplir los argumentos de dos números complejos para que el producto de dichos números sea un número real?

    b) ¿Qué condiciones deben de cumplir los argumentos de dos números complejos para que su cociente sea un número complejo imaginario puro?.

2. Definir el concepto de límite de una sucesión de números reales. Aplicar esta definición para estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{1}{n^3}$ *b*) $b_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 100 \\ \frac{n}{n+1} & \text{en otro caso} \end{cases}$ *c*) $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

3. La gráfica adjunta muestra la derivada de cierta función $y(x)$. Emplear esta información para responder a las cuestiones que se plantean.



    a) ¿En qué intervalos $y(x)$ es creciente/decreciente?

    b) ¿En qué abscisas alcanza un extremo local?

    c) ¿En qué subintervalos es cóncava/convexa?

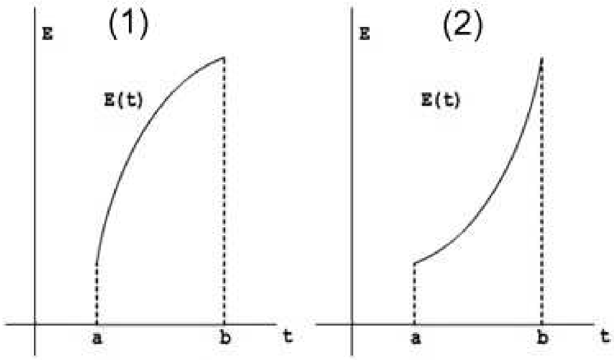
    d) ¿En qué abscisas alcanza un punto de inflexión?

4. Explica si la siguiente afirmación es cierta: "Supongamos que $y(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ tal que su integral es nula en todo intervalo $[a, b]$. Entonces, $y(x) = 0$ para todo x real".

5. Las gráficas adjuntas muestran el espacio $E(t)$ recorrido por dos vehículos en el intervalo de tiempo $[a, b]$. Se pide:

a) Para cada unos de ellos, la aceleración media ¿Ha sido positiva o negativa?

b) Supongamos que la velocidad en $t = a$ de uno de los vehículos era de 70 Km/h y en $t = b$ de 40 Km/h; para el otro vehículo, la velocidad en $t = a$ fue de 12 Km/h y en $t = b$ de 35 Km/h. Identifica qué par de datos se corresponden con cada gráfica.



c) Con los datos del apartado anterior, si los vehículos circulan durante 15 segundos, ¿cuál es el valor de la aceleración media de cada vehículo?

RESPUESTAS

1. *a*) $\rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} = \rho\rho'_{\theta+\theta'} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \theta + \theta' = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

   b) $\dfrac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} = \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)_{\theta-\theta'}$ imaginario puro $\Leftrightarrow \theta - \theta' = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

2.
$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geq n_0 \;\; x_n \in (l-\epsilon,\, l+\epsilon)$$

   a) $l = 0, \quad \forall\epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > n_0 \;\; \dfrac{1}{n^3} < \epsilon$

   Tomando $n_0 > \dfrac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}}$

   b) No hay límite: Si tomamos $l = 1$ para $\epsilon = 1$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ tomamos $n > n_0$ con n múltiplo de 100 por lo que $b_n = 2 \notin (0, 2)$

   c) $l = 0$: $-\epsilon < \dfrac{(-1)^n}{n+1} < \epsilon$, tomamos $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon} - 1$

3. *a*) $y'(x) < 0$ en $(0,1) \cup (4, 6.5) \Rightarrow y(x)$ decreciente
   $y'(x) > 0$ en $(1,4) \cup (6.5, 8) \Rightarrow y(x)$ creciente

   b) $y'(1) = y'(4) = y'(6.5) = 0$; cambio en el crecimiento $\Rightarrow$ extremo local.

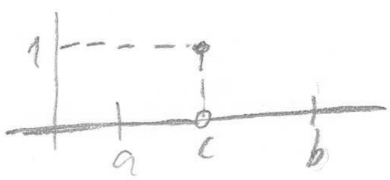
   c) $y'(x)$ creciente en $(0, 2.5) \Rightarrow y(x)$ cóncava
   $y'(x)$ decreciente en $(2.5, 5) \Rightarrow y(x)$ convexa
   $y'(x)$ creciente en $(5, 7.5) \Rightarrow y(x)$ cóncava
   $y'(x)$ decreciente en $(7.5, 8) \Rightarrow y(x)$ convexa

   d) En $x = 2.5,\ 5,\ 7.5,\ 8$ hay un cambio de concavidad $\Rightarrow$ Puntos de Inflexión

4. Supongamos que existe $c \in \mathbb{R} \,|\, f(c) \neq 0$. En el caso de que $y(c) > 0$, como $y(x)$ es continua, existe un intervalo $(c-\epsilon, c+\epsilon)$ tal que $y(x) > 0$ en ese intervalo, por lo tanto
   $int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} y(x)\, dx > 0$ por lo que existe una contradicción.

   Por lo tanto, $y(x) = 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$

   Ahora bien, si $y(x)$ no es continua, por ejemplo



$$y(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in (-\infty, c) \cup (c, \infty) \\ 1 & x = c \end{cases}$$

Se tiene $y(x) \neq 0$ pero $\int_a^b y(x)\,dx = 0$

5. *a*) Vehículo 1: Como $E(t)$ es convexa $\Rightarrow E''(t) \leq 0$

   Aceleración media $= \dfrac{1}{b-a} \int_a^b E''(t)\,dt < 0$

   Vehículo 2: Como $E(t)$ es cóncava $\Rightarrow E''(t) \geq 0$

   Aceleración media $= \dfrac{1}{b-a} \int_a^b E''(t)\,dt > 0$

   b) Vehículo 1: $E''(t) < 0 \Rightarrow E'(t)$ es decreciente

   Vehículo 2: $E''(t) > 0 \Rightarrow E'(t)$ es creciente

   Por tanto al vehículo 1 le corresponden los datos $70 - 40$ Km/h y al vehículo 2: $12 - 35$ Km/h

   c) Vehículo 1: Aceleración media $= \frac{3600}{15} \int_a^b E''(t)\,dt = 240E'(t)\Big|_{t=a}^{t=b} = 240\,(E'(b) - E'(a)) = 240(40-70) = -7200 \text{ Km/h}^2 = -0.6 \text{ m/s}^2$

   Vehículo 2: Aceleración media $= 240(35-12) = 5520 \text{ Km/h}^2 = 0.42 \text{ m/s}^2$