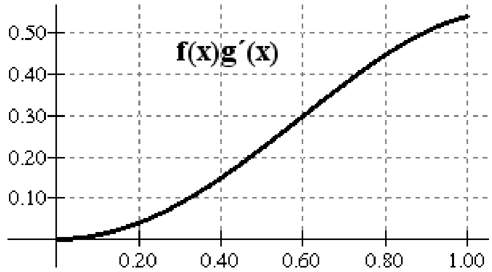
ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES
EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN
TEMAS 1 A 5 - EJERCICIO 1

1. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en el intervalo $[a, b]$.

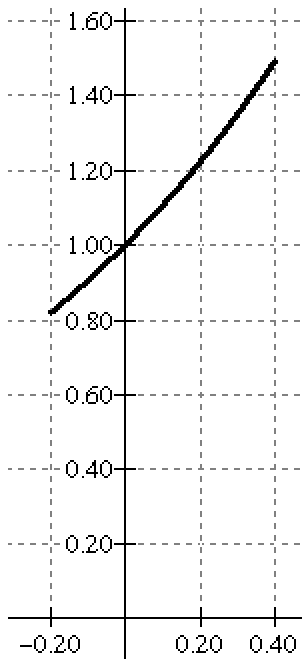


   a) Encontrar la relación que existe entre el valor medio de $f(x)g'(x)$ y el de $f'(x)g(x)$.

   b) Supongamos que $[a, b] = [0, 1]$ y que la figura adjunta muestra la gráfica de la función $f(x)g'(x)$.
   Utilizando esta gráfica, calcula de forma aproximada, razonadamente, el valor medio de la función $f(x)g'(x)$.

   c) Supongamos que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ y $f(1) = 0.8$. Utiliza los apartados a) y b) para calcular de forma aproximada el valor medio de la función $f'(x)g(x)$.

2. Se sabe que dos funciones $F(z)$ y $G(z)$ verifican las siguientes condiciones:



$$F'(z) + G(z) = \mathrm{e}^z + z^2$$

$$F(z) + G'(z) = \mathrm{e}^z + 2z$$

$$F(0) = 1,\ G(0) = 0$$

   a) Calcular el polinomio de McLaurin de $F(z)$ de orden 3. Utilizar este polinomio para calcular de forma aproximada el valor de $F(0.2)$.

   b) Sabiendo que la figura adjunta muestra la gráfica de la función $H(z) = \mathrm{e}^z - d^3G/dz^3$, emplear el teorema de Taylor para calcular una cota del error cometido en la aproximación del apartado anterior.

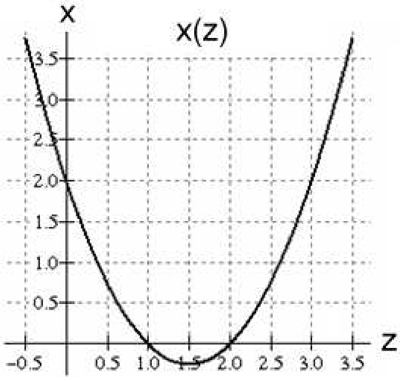
3. Queremos construir con chapa metálica de 0. 5 cm de grosor un depósito cilíndrico abierto por la parte superior, que tenga una capacidad de 1 m^3. Naturalmente, nos interesa utilizar la menor cantidad posible de chapa para fabricarlo. El problema es que el depósito tiene que instalarse en un hueco de 80x80 cm de base y 215 cm de altura (ver figura). Se trata de encontrar las dimensiones que debe tener el depósito y el precio de la chapa necesaria para fabricarlo.

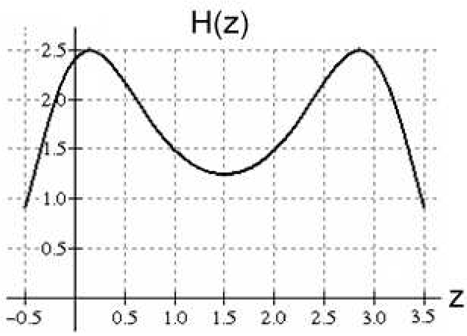
4. Supongamos que $h(x)$ es una función continua en $[0, 2]$ y que para calcular su integral I hemos aplicado el cambio de variable de integración $x = x(z)$ (ver la gráfica de $x(z)$ en la figura). De este modo obtendremos una nueva función $F(z)$ que deberemos integrar en un nuevo intervalo $[p, q]$:

   a) Indica cómo habría que obtener la función $F(z)$.

   b) Calcula los nuevos límites de integración p y q. £Hay varias formas de elegirlos?

   c) Hemos calculado una primitiva $H(z)$ de la función $F(z)$ y la hemos representado gráficamente (ver figura). A partir de esta gráfica, calcula aproximadamente el valor I de la integral.





5. Definir el límite de una sucesión $\{x_n\}$. Aplicando la definición, demostrar que el límite de la la sucesión $x_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es 2.

6. La figura adjunta representa la forma de una vasija a la que echamos agua a ritmo constante, de modo que en cada instante t el agua alcanza cierta altura $h(t)$. Esboza de forma razonada una posible gráfica de $h(t)$ (discute la continuidad, derivabilidad, crecimiento, concavidad de $h(t)$).

RESPUESTAS

1. Aplicando el método de integración por partes:

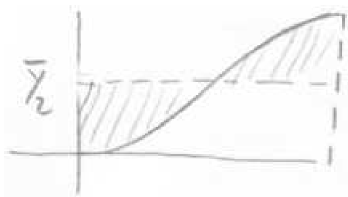
   a)

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \frac{f(b)g(b)-f(a)g(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g'(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y_1} = \frac{f(b)g(b)-f(a)g(a)}{b-a} - \bar{y_2}$$

   b) Ambas áreas deben ser iguales



   $\bar{y_2} \approx 0.27$

   c) $\bar{y_1} = 0.8 - \bar{y_2} \Rightarrow \bar{y_1} \approx 0.8 - 0.27 = 0.53$

2. $F(z) = F(0) + F'(0)\,z + \dfrac{F''(0)}{2!}\,z^2 + \dfrac{F'''(0)}{3!}\,z^3 + \dfrac{F''''(u)}{4!}\,z^4 \quad u \in (0,z)$

   Hipótesis: $F(z)$ y $G(z)$ son derivables de orden suficiente.

$$F'(z)+G(z) = \mathrm{e}^z + z^2 \Rightarrow F''+G' = \mathrm{e}^z + 2z \Rightarrow F'''+G'' = \mathrm{e}^z + 2 \Rightarrow$$

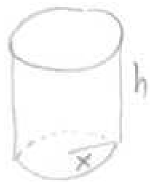
$$\Rightarrow F'''' + G''' = \mathrm{e}^z \Rightarrow F'''' = \mathrm{e}^z - G'''$$

$$\left.\begin{array}{l} F(0)=1 \quad G(0)=0 \\ F'+G = \mathrm{e}^z + z^2 \\ F''+G' = \mathrm{e}^z + 2z \\ F'+G'' = \mathrm{e}^z + 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F'(0)+G(0)=1 \Rightarrow F'(0)=1 \\ F(0)+G'(0)=1 \Rightarrow G'(0)=1-1=0 \\ F''(0)+G'(0)=1 \Rightarrow F''(0)=1 \\ F'(0)+G''(0)=3 \Rightarrow G''(0)=3-1=2 \\ F'''(0)+G''(0)=3 \Rightarrow F'''(0)=3-2=1 \end{array}$$

$$P_3(z) = 1+z+\frac{z^2}{}2;\ \left|\frac{F''''(u)}{4!}0.2^4\right|_{u\in(0,0.2)} \overset{\text{GRÁFICA}}{\leq} \frac{1.3}{4!}(0.2)^4 \leftarrow \text{ COTA}$$

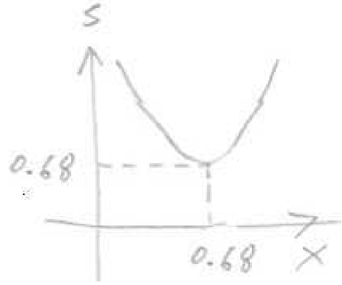
$$\text{APROX} = P_3(0.2) = 1 + 0.2 + \frac{(0.2)^2}{2}$$

3. Volumen $V = \pi x^2 h = 1 \Rightarrow h = \dfrac{1}{\pi x^2}$



Superficie $S = \pi x^2 + 2\pi x h = \pi x^2 + \dfrac{2}{x}$

$S'(x) = 2\pi x - \dfrac{2}{x^2}; \quad S' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 0.68$



$$h = \frac{1}{\pi \frac{1}{\sqrt[3]{\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 0.68 \text{ m}$$

$S'' = 2\pi + 4x^{-3}; \quad S''(\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}) > 0 \Rightarrow$ Mínimo

El problema es que no entra en el hueco ya que $68 \cdot 2 + \underbrace{2 \cdot 0.5}_{\text{grosor chapa}} > 80$ cm

Tomemos el valor de x más próximo a 80 cm que entre en el hueco:

$$2x + 2 \cdot 0.5 = 80 \Rightarrow x = 39.5 \text{ cm}$$

Veamos ahora si hay altura suficiente:

$$h = \frac{1}{\pi (0.395)^2} = 2.04 \text{ m} < 2.15$$

4. a) $F(z) = y(x(z)) \cdot x'(z)$ suponiendo que $x'(z)$ es continua

   b) $x \in [0,2]$ $\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow z = 1, 2 \\ x = 2 \Rightarrow z = 0, 3 \end{array}$

   Por tanto, hay varias formas de elegir p y q

   $$I = \int_1^0 F(z)\,dz = \int_1^3 F(z)\,dz = \int_2^0 F(z)\,dz = \int_2^3 F(z)\,dz$$

   c) $I = H(q) - H(p) = H(0) - H(1) = H(3) - H(1) = H(0) - H(2) = H(3) - H(2) \approx 2.4 - 1.5 = 0.9$

5.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geq n_0 \ \ x_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$$

$$l = 2 \ \ x_n = \frac{2n}{n+1}; \quad 2 - \epsilon < \frac{2n}{n+1} < 2 + \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\epsilon < \frac{2n}{n+1} - 2 < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{-2}{n+1} < \epsilon$$

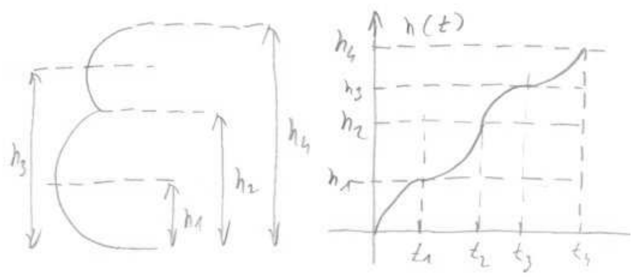
Entonces, dado un $\epsilon > 0$ cualquiera, tomamos n tal que:

$$-\epsilon < \frac{-2}{n+1} \Rightarrow \epsilon > \frac{2}{n+1} \Rightarrow \frac{2}{\epsilon} < n+1 \Rightarrow n > \frac{2}{\epsilon} - 1$$

Por ejemplo:

Si $\epsilon = 0.\,01$, tomamos $n > \frac{2}{0.01} - 1 = 200 - 10199$

Si $\epsilon = 0.\,001$, tomamos $n > \frac{2}{0.001} - 1 = 2000 - 1 = 1999$

6. 

h es creciente en $(0, t_4)$

$t \in (0, t_1)$ velocidad decreciente $\Rightarrow h'' < 0 \Rightarrow h$ convexa

$t \in (t_1, t_2)$ velocidad creciente $\Rightarrow h'' > 0 \Rightarrow h$ cóncava

$t \in (t_2, t_3)$ velocidad decreciente $\Rightarrow h'' < 0 \Rightarrow h$ convexa

$t \in (t_3, t_4)$ velocidad creciente $\Rightarrow h'' > 0 \Rightarrow h$ cóncava

Puntos de Inflexión en t_1, t_2, t_3; continua en $[0, t_4]$