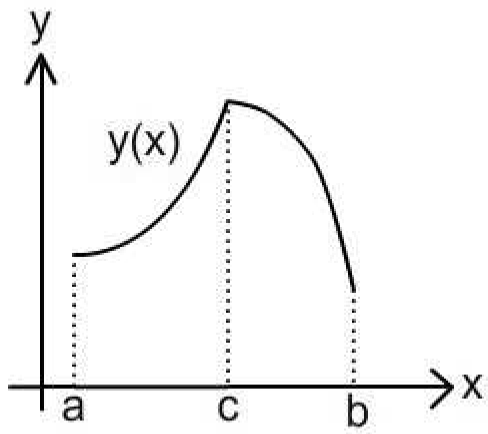
ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES
EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS
EJERCICIO 2

1. Estudia las propiedades de la función cuya gráfica aparece en la figura.



2. La velocidad media de un vehículo en un viaje ha sido de 84 Km/h. ¿Ha existido algún instante durante el viaje en el que la velocidad del vehículo ha sido exactamente igual a 84 Km/h?

3. Supongamos que el beneficio que tiene cierta empresa después de x años de funcionamiento viene dado por la siguiente función:

$$B(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 3}$$

Una analista ha asegurado que, de seguir la misma tendencia, el beneficio de la empresa a largo plazo será aproximadamente lineal, es decir, una función de la forma $B(x) = ax + b$. ¿En qué crees que se basa el analista para realizar esa afirmación?

4. Supongamos que A es un conjunto de números reales. Un número $a \in A$ se dice que es aislado en el conjunto A si se cumple la siguiente condición:

$$\exists \epsilon > 0 \,|\, (a - \epsilon, a + \epsilon) \cap A = \{a\}$$

a) Escribe formalmente la condición contraria, es decir, la condición que debe cumplir un punto a A para que no sea un punto aislado en el conjunto A.

b) Calcula los puntos $a \in A$ que son aislados en el conjunto A en los siguientes apartados:

1) $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, ...\}$
2) $A = (1, 3] \cup \{4\}$

SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

1. Resultados relacionados

a) Sea $y(x)$ una función derivable en (a, b). Entonces, $y'(x) > 0$ sólo si $y(x)$ es creciente en (a, b); $y'(x) < 0$ sólo si $y(x)$ es decreciente en (a, b).

b) Si $y(x)$ es derivable en (a, b), se dice que la gráfica de $y(x)$ es cóncava (cóncava hacia arriba) en (a, b) si la recta tangente a la curva por un punto x cualquiera del intervalo (a, b) está situada, en un entorno de x, por debajo de la gráfica de $y(x)$; se dice que la gráfica de $y(x)$ es convexa (cóncava hacia abajo) en (a, b) si la recta tangente a la curva por un punto x cualquiera del intervalo (a, b) está situada, en un entorno de x, por encima de la gráfica de $y(x)$.

c) Si la gráfica de $y(x)$ cambia de concavidad cuando la variable x pasa por un cierto punto c, el punto $x = c$ es un punto de inflexión de $y(x)$.

d) Si $y(x)$ es derivable en (a, b), la gráfica de $y(x)$ es cóncava en (a, b) solo si $y''(x) > 0$; la gráfica de $y(x)$ es convexa en (a, b) solo si $y''(x) < 0$.

e) Sea $y(x)$ es una función definida en (a, b) y $c \in (a, b)$. Si $y(x)$ es derivable en $x = c$, las tangentes por la derecha y por la izquierda de $x = c$ son iguales. Si las tangentes laterales son diferentes, entonces $y(x)$ no es derivable en $x = c$.

Resolución

A partir de la gráfica de la función $y(x)$ que aparece en la figura, no puede asegurarse que $y(x)$ sea continua ni derivable ni dos veces derivable. Sólo puede demostrarse la regularidad de una función si se dispone de su expresión analítica. Sin embargo, la gráfica de $y(x)$ en este caso nos permite establecer como hipótesis razonable que $y(x)$ es continua en (a, b) y dos veces derivable en todo punto salvo en $x = c$.

Bajo estas hipótesis:

$y(x)$ es creciente en (a, c), de modo que $y'(x) \geq 0$ en (a, c)

$y(x)$ es decreciente en (c, b), de modo que $y'(x) \leq 0$ en (c, b)

$y(x)$ presenta un máximo relativo en $x = c$

La gráfica de $y(x)$ es cóncava en (a,c), de modo que $y''(x) \geq 0$ en (a,c)

La gráfica de $y(x)$ es convexa en (c,b), de modo que $y''(x) \leq 0$ en (c,b)

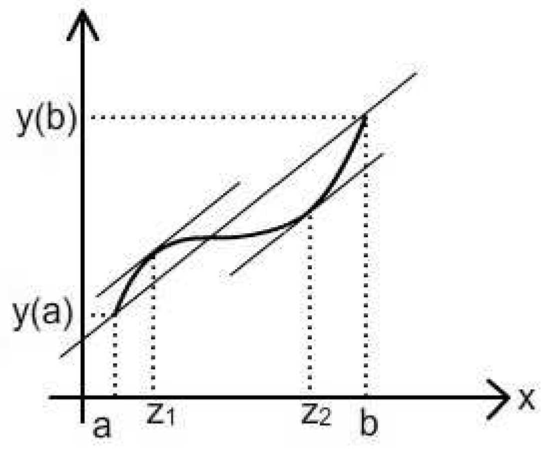
En el punto $x = c$ la gráfica de $y(x)$ parece tener tangentes laterales distintas, de modo que en este caso $y(x)$ no sería derivable en $x = c$. La gráfica pasa de cóncava a convexa, de modo que presenta un punto de inflexión en $x = c$.

2. **Resultados relacionados**

   a) Si $y(x)$ es una función función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), la velocidad de $y(x)$ es la función $v(x) = y'(x)$. La velocidad media de $y(x)$ en $[a,b]$ es

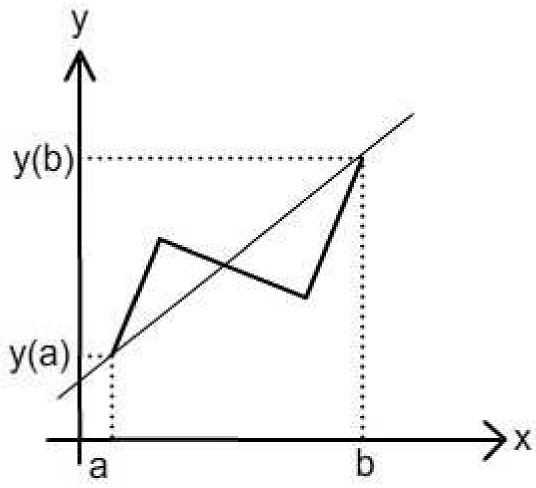
   $$v_m = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}$$

   b) (Teorema del valor medio) Si $y(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un punto $z \in (a,b)$ en el que $y(x)$ alcanza el valor de la velocidad media, es decir, $y'(z) = (y(b)-y(a))/(b-a)$. Gráficamente, significa que existe algún punto $z \in (a,b)$ en el que la tangente es paralela a la secante que pasa por los puntos $(a, y(a))$ $(b, y(b))$. En el ejemplo de la figura, existen dos puntos z_1 y z_2 en los que se cumple esta condición.



Resolución

Si alguna de las hipótesis del teorema del valor medio no se cumple, entonces no es necesariamente cierto el resultado. La figura más abajo muestra la gráfica de una función continua pero no derivable, tal que en ningún punto $z \in (a,b)$ verifica $y'(z) = (y(b) - y(a))/(b - a)$



Pero en este caso las hipótesis de continuidad de $y(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y derivabilidad en (a, b) son razonables porque se trata de un desplazamiento físico. Entonces, el teorema del valor medio asegura que existe al menos un $z \in (a, b)$ tal que $E'(z) = 84$.

3. **Resultados relacionados**

   a) El comportamiento lineal a largo plazo de $B(x)$ se traduce matemáticamente en que $B(x)$ tiene una asíntota oblicua $y = ax + b$ cuando $x \to \infty$.

   b) Para calcular los coeficientes a y b de la asíntota oblicua:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (y(x) - ax)$$

Resolución

En este caso:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{x(x+3)} = 2 = a$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x+3} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-7x}{x+3} = -6$$

Por tanto el analista tiene razón, el comportamiento de $B(x)$ a largo plazo será similar al de la función lineal $y = 2x - 6$.

4. **Resultados relacionados**

a) Si A es un conjunto y a es un elemento de A, decimos que a pertenece a A y lo denotamos $a \in A$.

b) Si A y B son dos conjuntos tales que todo elemento de A se encuentra en B, decimos que A está incluido en B, y lo denotamos $A \subset B$.

c) Si A y B son dos conjuntos, el conjunto $A \cup B$ es el conjunto formado por los elementos que se encuentran en A o en B.

d) Si A y B son dos conjuntos, llamamos conjunto unión al conjunto que denotamos por $A \cup B$ y que está formado por los elementos que se encuentran en A o en B.

e) Si A y B son dos conjuntos, llamamos conjunto intersección al conjunto que denotamos por $A \cap B$ y que está formado por los elementos que se encuentran en A y en B.

Resolución

a) $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ y \neq a \mid y \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \cap A$

b) 1) $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, \} = A$

2) $\{4\}$