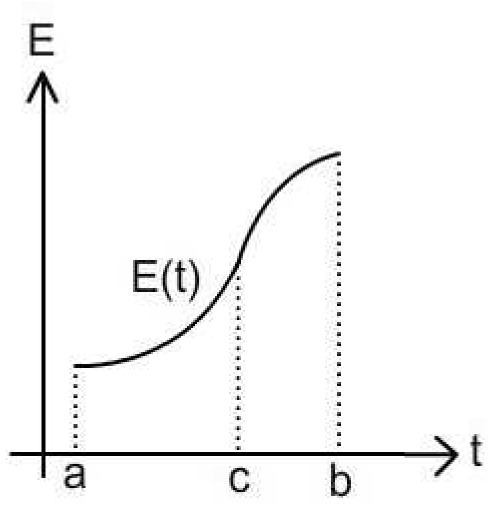
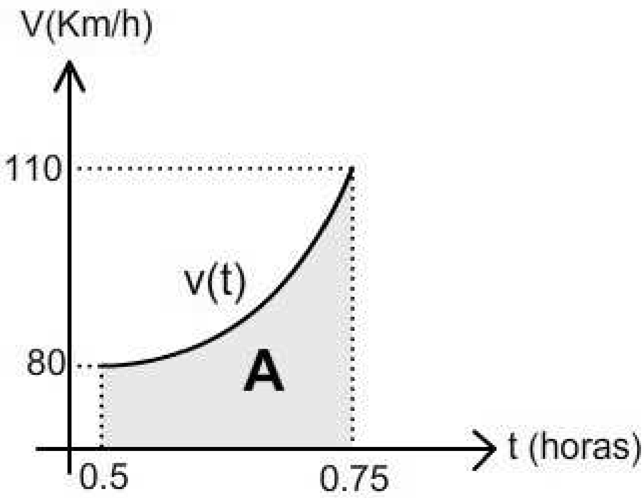
ANÁLISIS MATEMÁTICO DE FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES
EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS
EJERCICIO 1

1. Supongamos que la posición en la que se encuentra un vehículo en el instante t viene dada por una función $E(t)$ cuya gráfica en el intervalo de tiempo (a, b) aparece en la figura. Estudia el signo de la aceleración del vehículo en (a, b).



2. Un vehículo se desplaza una distancia de 28 Km con una velocidad $v(t)$ cuya gráfica aparece en la figura. Calcula el área A de la región limitada por la curva y el eje horizontal.



3. Calcula la derivada de orden n de la función $y(x) = x^{1/2}$.

4. Supongamos que A es un conjunto de números reales. Un número $a \in A$ se dice que es interior al conjunto A si se cumple la siguiente condición:

$$\exists \epsilon > 0 \,|\, (a - \epsilon, a + \epsilon) \subset A$$

   a) Escribe formalmente la condición contraria, es decir, la condición que debe cumplir un punto $a \in A$ para que no sea un punto interior al conjunto A.

   b) Calcula los valores de a que son interiores al conjunto A en los siguientes apartados:

      1) $A = [1, 2)$

      2) $A = (-\infty, 1) \cup (1, 3]$

SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

1. **Resultados relacionados**

   a) Dada una función $y(x)$ derivable hasta orden dos en el intervalo (a,b), la aceleración $a(x)$ en cada punto x viene dada por $a(x) = y''(x)$.

   b) Si $y(x)$ es derivable en (a,b), se dice que la gráfica de $y(x)$ es cóncava (cóncava hacia arriba) en (a,b) si la recta tangente a la curva por un punto x cualquiera del intervalo (a,b) está situada en un entorno de x por debajo de la gráfica de $y(x)$; se dice que la gráfica de $y(x)$ es convexa (cóncava hacia abajo) en (a,b) si la recta tangente a la curva por un punto x cualquiera del intervalo (a,b) está situada en un entorno de x por encima de la gráfica de $y(x)$.

   c) Si la gráfica de $y(x)$ cambia de concavidad cuando la variable x pasa por un cierto punto c, el punto $x = c$ es un punto de inflexión de la curva $y(x)$.

   d) Si $y(x)$ es derivable en (a,b), la gráfica de $y(x)$ es cóncava en (a,b) si $y''(x) > 0$; la gráfica de $y(x)$ es convexa en (a,b) si $y''(x) < 0$.

Resolución

A partir de la gráfica de la función $E(t)$ que aparece en la figura, no puede asegurarse que $E(t)$ sea continua ni derivable, ni dos veces derivable. Sólo puede demostrarse la regularidad de una función si se dispone de su expresión analítica. Sin embargo, la gráfica de $E(t)$ en este caso nos permite establecer como hipótesis razonable que $E(t)$ verifica todas estas condiciones de regularidad.

Bajo esta hipótesis, la gráfica de $E(t)$ es cóncava en (a,c), de modo que $E''(t) = a(t) \geq 0$ en (a,c). La gráfica de $E(t)$ es convexa en (c,b), de modo que $E''(t) = a(t) \leq 0$ en (c,b).

En el punto $t = c$ la gráfica de $E(t)$ pasa de cóncava a convexa, de modo que presenta un punto de inflexión en $t = c$. En otras palabras, la función $E''(t)$ cambia de signo cuando la variable t pasa por el punto $t = c$. Si suponemos como hipótesis que $E''(t)$ es continua en (a,b), se tiene que $E''(c) = a(c) = 0$.

Así pues, la aceleración de $E(t)$ es no negativa en (a,c), no positiva en (c,b) y nula en $t = c$.

2. **Resultados relacionados**

   a) Si $y(x)$ es una función continua en $[a, b]$, siendo $y(x) \geq 0$, el área A limitada superiormente por la gráfica de $y(x)$ e inferiormente por el eje OX viene dada por

   $$A = \int_a^b y(x)\, dx$$

   b) Regla de Barrow o de Newton-Leibniz Si $F(x)$ es una primitiva de $y(x)$, es decir, si $F'(x) = y(x)$, entonces

   $$A = \int_a^b y(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a)$$

   c) Si $y(x)$ es derivable, la velocidad de $y(x)$ respecto a la variable x es $v(x) = y'(x)$.

   Resolución

   En nuestro caso, $v(t) = E'(t)$ de modo que $E(t)$ es una primitiva de $v(t)$. Por tanto

   $$A = \int_{0.5}^{0.75} v(t)\, dt \;=\; \int_{0.5}^{0.75} E'(t)\, dt \;=\; E(0.75) - E(0.5) \;=\; 28$$

3. **Resultados relacionados**

   $$\text{Si } \; y(x) = x^a \;\Rightarrow\; y'(x) = a x^{a-1} \quad a \in \mathbb{R}$$

   Resolución

   $$y(x) = x^{1/2}$$
   $$y'(x) = \frac{1}{2}\, x^{-1/2}$$
   $$y''(x) = \frac{-1}{2^2}\, x^{-3/2}$$
   $$y'''(x) = \frac{3}{2^3}\, x^{-5/2}$$
   $$y''''(x) = \frac{-3 \cdot 5}{2^4}\, x^{-7/2}$$
   $$\Rightarrow\; y^{(n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\, 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n} x^{-\frac{2n-1}{2}} \qquad n \geq 1$$

4. **Resultados relacionados**

a) Si A es un conjunto y u es un elemento de A, decimos que u pertenece a A y lo denotamos $u \in A$.

b) Si A y B son dos conjuntos tales que todo elemento de A se encuentra en B, decimos que A está incluido en B, y lo denotamos $A \subset B$.

c) Si A y B son dos conjuntos, el conjunto $A \cup B$ es el conjunto formado por los elementos que se encuentran en A o en B.

d) Si A y B son dos conjuntos, llamamos conjunto unión al conjunto que denotamos por $A \cup B$ y que está formado por los elementos que se encuentran en A o en B.

e) Si A y B son dos conjuntos, llamamos conjunto intersección al conjunto que denotamos por $A \cap B$ y que está formado por los elementos que se encuentran en A y en B.

Resolución

a) $\forall \epsilon > 0 \; \exists y \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \mid y \notin A$

b) 1) $(1, 2)$

2) $(-\infty, 1) \cup (1, 3)$