

Capítulo 9

Ecuaciones diferenciales ordinarias

9.1. Planteamiento del problema

Como ya sabes, los fenómenos naturales involucran variables que dependen funcionalmente unas de otras (distancias, alturas, niveles, densidades, fuerzas, temperaturas, etc), de tal modo que si una variable x experimenta una variación, entonces también pueden experimentar una variación todas las variables y_1, y_2, y_3, \dots que dependan de x . Recuerda que el propósito del Cálculo Infinitesimal es precisamente estudiar el modo en que una variable y cambia en función del cambio de otra variable x . Las ciencias y las ingenierías, cuando estudian un fenómeno real, determinan qué variables son las realmente importantes y a continuación tratan de encontrar relaciones de dependencia entre ellas, esto es, buscan un modelo matemático capaz de explicar el fenómeno de forma aproximada. Algunos modelos matemáticos que ya has utilizado para estudiar fenómenos reales son: la segunda ley de Newton ($F = ma$), la ley de Ohm ($R = V/I$) y el espacio recorrido a velocidad constante ($E = Vt$).

Por otra parte, sabes que si y es una variable que depende de otra variable x , entonces la derivada de $y(x)$ respecto a x se interpreta como la velocidad de cambio de y respecto a x , y se denota $y'(x) = dy/dx$. Del mismo modo, la segunda derivada de y respecto a x es igual a la velocidad de la velocidad, esto es, la aceleración de y respecto a x , $y''(x) = d^2y/dx^2$.

Pues bien, muchos fenómenos naturales que nos interesan en ciencias y en ingeniería se pueden escribir mediante una o varias ecuaciones que involucran tanto a las propias magnitudes como a sus velocidades de cambio. Es decir, involucran a $y(x), y'(x), y''(x)$, etc. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 9.1 (Caída libre de un sólido)

La segunda ley de Newton que antes citábamos, involucra cierta magnitud $y(t)$ que representa la distancia recorrida por un objeto de masa constante m que está sometido sólo a cierta fuerza $F(t)$. Ya que la aceleración de $y(t)$ respecto a t es $a(t) = y''(t)$, el modelo matemático que describe el movimiento rectilíneo del cuerpo es $F(t) = my''(t)$.

Supongamos que el cuerpo cae libremente tan sólo por la acción de la fuerza de la gravedad. En éste caso, $F = mg$, donde g es la aceleración debida a la gravedad ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$). La variable $y(t)$ representa la distancia recorrida por el cuerpo desde el instante en que comenzó a caer ($t = 0$) hasta el instante t . Por tanto:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g \quad (9.1)$$

La ecuación (9.1) es un posible modelo matemático que puede utilizarse para estudiar el fenómeno de caída de un objeto. El modelo (9.1) es muy sencillo, y podemos pensar en mejorarlo haciendo participar también la fuerza de resistencia a la caída del objeto que ejerce el aire. Por ejemplo, podemos trabajar con la hipótesis de que la fuerza de resistencia del aire es proporcional a la velocidad en cada instante. Así pues, ya tenemos un segundo modelo (9.2) más completo que el anterior para estudiar el fenómeno de caída libre:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - K \frac{dy}{dt} \quad (9.2)$$

Ambos modelos (9.1) y (9.2) involucran a la magnitud que nos interesa (que es $y(t)$) y también a las derivadas de $y(t)$ respecto al tiempo. Las ecuaciones (9.1) y (9.2) son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias. El término "ordinaria" se refiere a que únicamente aparecen en este tipo de ecuaciones las derivadas respecto a una sola variable, la variable t en este caso. Es decir, una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación que relaciona cierta magnitud y con la variación de y respecto a una única variable x . En lo que sigue, denotaremos con las siglas EDO a una ecuación diferencial ordinaria.

Por supuesto, el estudio del fenómeno de caída libre no termina una vez que hemos determinado un modelo matemático mediante una EDO como (9.1) o (9.2). Lo interesante es encontrar la solución de la EDO, esto es, determinar qué función o funciones hacen cierta la EDO. Vamos a tomar el ejemplo sencillo (9.1). Basta integrar dos veces para obtener:

$$y'' = g \quad \Rightarrow \quad y' = gt + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \quad (9.3)$$

Observando la solución (9.3) ya tenemos una primera consecuencia: una EDO no tiene como solución una única función que la verifica, sino que su solución es una familia de funciones. La familia de funciones (9.3) es la solución de la EDO (9.1). Los valores de C_1 y C_2 en la familia (9.3) son valores arbitrarios. Dando valores particulares a C_1 y C_2 obtenemos diferentes funciones que pertenecen a la familia (9.3). ¿Tendrán algún significado físico estas dos constantes? Así es. C_1 representa la velocidad del sólido en el instante $t = 0$ (velocidad inicial), mientras que C_2 representa el espacio que ya llevaba recorrido en el instante $t = 0$.

Vemos, por tanto, que aunque la EDO no tenga una única función que sea solución, si añadimos ciertas condiciones la solución puede ya ser única. Por ejemplo, supongamos que el objeto llega a nuestra altura con una velocidad de 3 m/s y que la distancia que el sólido ya llevaba recorrida era de 6 m. Entonces, elegimos de la familia (9.3) la única solución que cumple estas condiciones:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + 3t + 6 \quad (9.4)$$

La solución (9.4) se llama solución particular de (9.3). Las condiciones que hemos impuesto para obtener la solución particular, esto es, $y(0) = 6$, $y'(0) = 3$ se llaman condiciones iniciales, esto es, condiciones que debe cumplir la solución $y(t)$ para cierto valor de t ($t = 0$ en este caso). También podemos pensar en otro tipo de condiciones para seleccionar una solución perteneciente a la familia (9.3). Por ejemplo, supongamos que en el instante $t = 1$, el sólido ha recorrido $y = 9.9$ m y que en el instante $t = 2$, el sólido ha recorrido $y = 26.5$ m. Es decir:

$$\begin{aligned} y(1) &= 9.9 \\ y(2) &= 26.5 \end{aligned} \quad (9.5)$$

Las condiciones (9.5) se llaman condiciones de contorno, porque indican condiciones en diferentes instantes de tiempo. Para estudiar si existe alguna solución de la familia (9.3) que cumpla las condiciones de contorno (9.5):

$$\begin{cases} 9.9 = 4.9 + C_1 + C_2 \\ 26.5 = 19.2 + 2C_1 + C_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 3 \end{cases}$$

$$y(t) = 4.9t^2 + 2t + 3$$

Dependiendo de las condiciones que imponamos, la solución puede no ser única. Supongamos por ejemplo que buscamos soluciones de (9.3) tales que $y(0) = 0.05$. En este caso:

$$y(t) = 4.9t^2 + C_2t + 0.05 \quad (9.6)$$

(9.6) representa una subfamilia de (9.3). Observa la Figura 9.1, hemos representado algunas gráficas de las funciones de (9.6), obtenidas fijando ciertos valores de C_2 .

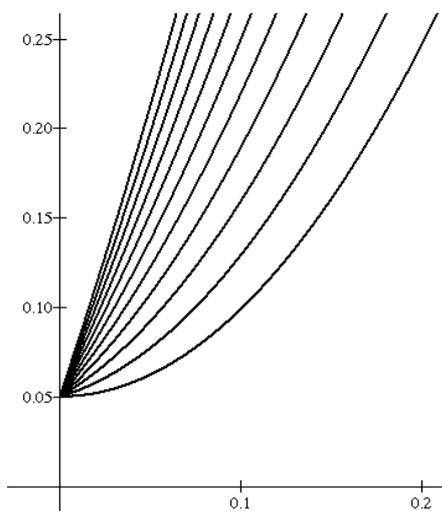


Figura 9.1: Familia de curvas para $C_2 = \text{cte}$

Ejercicio 9.1 Determinar la subfamilia de soluciones de (9.3) formada por las funciones que cumplan la condición $y'(0) = 0.3$. Representar gráficamente algunas de estas funciones.

Ejercicio 9.2 Dada la EDO $y'' = x$, encontrar la solución $y(x)$ que cumple las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Encontrar también la solución que cumple las condiciones de contorno $y(0) = 1$, $y(1) = 1/6$. ¿Existe alguna solución que cumpla las condiciones $y(0) = 1$, $y(1) = 19/6$, $y(-1) = -7/6$? Dados tres puntos del plano, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ¿bajo qué condiciones existirá una única solución que pase por los dos primeros? ¿y por los tres?

Ejercicio 9.3 Dada la EDO $y' = k$, representar gráficamente su solución y determinar la solución particular que pasa por un punto cualquiera del plano de coordenadas (x_0, y_0) .

Ejercicio 9.4 Con lo que sabemos hasta ahora, sólo tenemos un procedimiento para calcular la solución de las EDO de la forma $y' = f(x)$, $y''(x) = f(x)$, ..., $y^{(n)}(x) = f(x)$. Explica el método que se puede seguir para calcular la solución de la EDO: $y^{(n)}(x) = f(x)$, donde $f(x)$ es una función dada. ¿Qué forma tendrá ésta solución? ¿Cuántas constantes arbitrarias aparecerán en ella? Piensa en alguna EDO de este tipo y aplica el procedimiento para encontrar su solución general.

Vamos a continuar discutiendo nuestro ejemplo del fenómeno de caída libre. Si elegimos el modelo (9.1) para describir el fenómeno, entonces hemos visto que somos capaces de encontrar la trayectoria $y(t)$ (ver ecuación 9.2), de dar significado físico a las dos constantes arbitrarias que aparecen en la solución general y de trazar algunas gráficas de posibles trayectorias.

Pero recuerda que pensamos en un segundo modelo para describir el mismo fenómeno, un modelo en el que intervenía también la fuerza de rozamiento con el aire del objeto en su caída. Supusimos (es decir, establecimos como hipótesis) que esta fuerza era en cada instante proporcional a la velocidad del objeto, y así construimos un nuevo modelo:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - K \frac{dy}{dt} \quad (9.7)$$

Para encontrar la solución general de la EDO (9.7), podemos intentar seguir el mismo procedimiento, integrar a ambos lados de la ecuación:

$$my' = mg \int dt - ky \quad \Rightarrow \quad my' = mgt - ky + C_1 \quad (9.8)$$

La ecuación (9.8) es todavía una EDO, porque aparece la función $y'(t)$. Volvemos a integrar a ambos lados de (9.8):

$$my = \frac{1}{2}mgt^2 - k \int y dt + C_1t + C_2 \quad (9.9)$$

No podemos hacer más. No podemos calcular

$$\int y dt$$

porque no conocemos $y(t)$. Precisamente $y(t)$ es la función que debemos determinar. Así pues, este ejemplo nos muestra que no todas las EDO se pueden resolver simplemente por integración. Ya tenemos un problema a resolver: habrá que desarrollar métodos con los que calcular soluciones de EDO, pero que no consistan simplemente en calcular primitivas, porque hemos visto que no es suficiente.

Ejemplo 9.2 (Resortes y circuitos eléctricos)

En el ejemplo 9.1 hemos visto cómo el fenómeno de caída libre de un sólido sometido sólo a la fuerza de la gravedad y a la fuerza de rozamiento con el aire, se puede modelizar mediante una EDO y dos condiciones iniciales que tienen significado físico:

$$\begin{aligned} my'' + ky' &= mg \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (9.10)$$

m =masa del cuerpo

k =constante de proporcionalidad, que depende del cuerpo

y_0 =espacio recorrido en $t = 0$

v_0 =velocidad en $t = 0$

Pues bien, resulta que otros fenómenos físicos importantes también pueden estudiarse mediante un modelo muy parecido a (9.10). Y lo curioso es que estos fenómenos pueden no tener nada que ver con la caída libre de un objeto. Vamos a tomar dos de estos fenómenos: las oscilaciones libres de un muelle y los circuitos eléctricos. Observa la Figura 9.2(a), que representa un muelle sobre el que cuelga en equilibrio un cuerpo de masa m . A continuación tiramos hacia abajo del cuerpo, hasta alargar el muelle una distancia igual a d (Figura 9.2(b)). Si soltamos el sólido, éste comenzará a oscilar. Podemos incluso seguir sometándolo a cierta fuerza variable $F(t)$. En estas condiciones, un modelo que sirve para estudiar las oscilaciones del sólido es el siguiente:

$$\begin{aligned} my'' + cy' + ky &= F(t) \\ y(0) &= d \\ y'(0) &= v_0 \end{aligned} \tag{9.11}$$

donde:

$y(t)$ =posición del sólido en el instante t

m =masa del sólido

c =una constante llamada constante de amortiguación (por ejemplo, el medio físico en el que oscila el cuerpo podría ser aire, agua o algún aceite en el que estuviera sumergido el muelle para disipar el calor, lo cual nos daría diferentes valores de c).

k =constante que depende de las características del muelle. Se mide en unidades de masa/unidades de desplazamiento. Por ejemplo, si el muelle se estira 20 cm con una masa de 10 Kg, $k = 10/20 = 0.5$ Kg/cm

d =espacio inicial

v_0 =velocidad inicial

$F(t)$ =Fuerza a la que está sometido el cuerpo en cada instante t

Observa en el modelo (9.11) la EDO de orden 2, muy similar a la de (9.10). En (9.10) no aparece el término ky , pero su término independiente (término de la derecha) tiene el mismo significado físico que en (9.11), se trata de una fuerza a la que el sólido está sometido. En (9.10) esta fuerza es constante ($F(t) = mg$), mientras que en (9.11) puede ser variable. Además, las condiciones iniciales de (9.11) tienen el mismo significado en ambos modelos. El modelo (9.11) aparece en una gran variedad de sistemas mecánicos vibrantes (partes móviles de máquinas, puentes que vibran con el paso de vehículos, etc). La Figura 9.3 representa un motor en movimiento que vibra y transmite su vibración a todo el sistema en el que está instalado.

Pero también el modelo (9.11) puede utilizarse para estudiar algunos circuitos eléctricos como el que aparece representado en la Figura 9.2(c). Se trata de un circuito en el que se ha conectado una inductancia L (cuyo valor se mide en Henrios), una resistencia R (cuyo valor se mide en Ohmios) y un condensador C (cuyo valor se mide en Faradios) en serie con

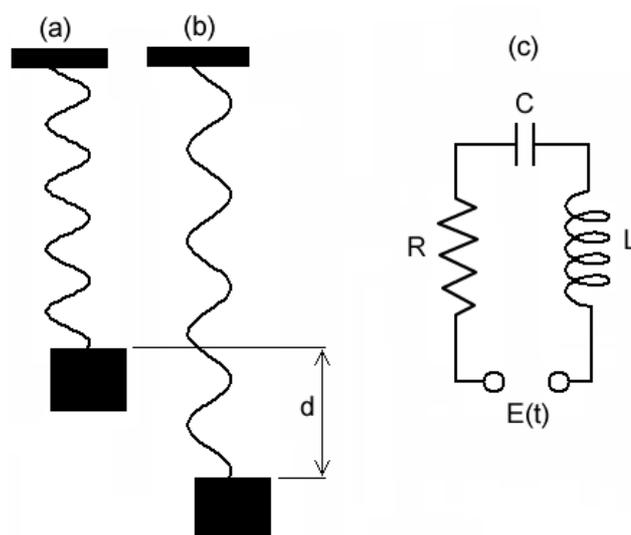


Figura 9.2: Resorte y circuito

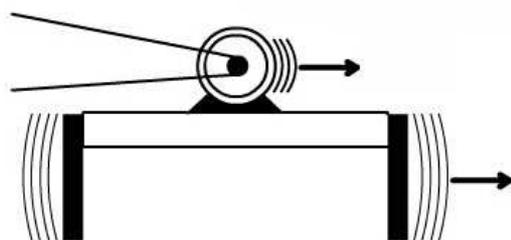


Figura 9.3: Motor vibrante

una tensión variable $E(t)$ (cuyo valor se mide en Voltios). En estas condiciones, un modelo que puede utilizarse para calcular el valor $I(t)$ de la intensidad que circula por el circuito en cada instante de tiempo t es:

$$\begin{aligned}
 LI'' + RI' + \frac{1}{C}I &= E'(t) \\
 I(0) &= i_0 \\
 I'(0) &= a_0
 \end{aligned}
 \tag{9.12}$$

Observa en (9.12) que el término independiente de la EDO es igual a $E'(t)$, es decir, a la velocidad de $E(t)$ respecto al tiempo. El modelo (9.12) es idéntico al (9.11). Pero, ¿qué significan en este caso los valores $I(0)$ e $I'(0)$ que aparecen como condiciones iniciales? En este fenómeno físico no hay movimientos de objetos sino de cargas eléctricas. Si $q(t)$ es la carga del condensador en cada instante, entonces $q'(t) = I(t)$. $I(0)$ representa la intensidad

que circula por el circuito en el instante inicial $t = 0$, mientras que $I'(0)$ es la velocidad de cambio de la intensidad en ese mismo instante inicial.

Sin embargo, tanto para resolver las EDO que aparecen en los modelos (9.12) y (9.11), tenemos el mismo problema con el que tropezamos al tratar de resolver la EDO del modelo (9.10). No podemos resolver estas EDO por simple integración. Si $y(x)$ es la solución de la EDO, no podemos hacer la operación

$$\int y \, dx$$

precisamente porque $y(x)$ es la función que hay que encontrar. Como dijimos más arriba, el problema que hay que resolver es: desarrollar métodos con los que calcular soluciones de EDO. Y, por otra parte, también necesitamos resolver un problema que es siempre importante en cualquier teoría matemática, el de existencia y unicidad de solución. Es decir, ¿bajo qué condiciones podremos asegurar que existe una única solución $y(x)$ de la EDO? Estos son los problemas que iremos resolviendo a lo largo de este tema. De momento vamos a definir los dos conceptos que hemos encontrado acerca de la solución de EDO:

Definición 9.1 Una EDO de orden n es una ecuación que establece una relación entre una función $y(x)$ y sus derivadas $y'(x)$, $y''(x)$, \dots , $y^{(n)}(x)$. Así pues, una EDO de orden n tendrá en general la forma:

$$F(x, y, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (9.13)$$

Definición 9.2 Toda función $y(x)$ que haga cierta la igualdad (9.13), se llama solución de la EDO.

Ejercicio 9.5 Demuestra que las funciones $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 2 \cos x - 3 \sin x$ son solución de la EDO de orden 2: $y'' + y = 0$. Demuestra que en general toda función de la familia biparamétrica $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ es solución de la EDO.

Ejercicio 9.6 Dada la familia de funciones $y = x^2 + Cx$, donde C es una constante real cualquiera, se pide:

1. Representar gráficamente dicha familia de funciones.
2. Dado un punto cualquiera del plano (x_0, y_0) , ¿podemos asegurar que existe alguna curva de la familia que pase por él? ¿Es única esta curva?
3. Encontrar una EDO que tenga como solución esa familia de funciones.

Ejercicio 9.7 Una esfera de naftalina pierde volumen por evaporación, a una velocidad que suponemos como hipótesis que es proporcional a su área. Hemos observado que la esfera ha disminuido su diámetro de 2 cm a 1 cm en 4 meses. Construye un modelo matemático para calcular el diámetro de la esfera en cada instante. Resolver el problema pero ahora suponiendo como hipótesis que la esfera de naftalina pierde volumen a una velocidad proporcional al cuadrado de su área.

Ejercicio 9.8 Una sustancia porosa humedecida con cierto líquido y expuesta al aire, pierde su humedad con una rapidez que suponemos como hipótesis que es proporcional al contenido de líquido que contiene. Construye un modelo matemático para calcular la cantidad de líquido que contiene la sustancia en cada instante.

9.2. Un primer acercamiento a la solución de una EDO

Para simplificar, de momento vamos a centrarnos en las EDO de orden 1, y que además tengan forma:

$$y' = F(x, y) \tag{9.14}$$

Es decir, vamos a estudiar un caso particular de EDO, las ecuaciones de orden 1 en las que se pueda despejar $y'(x)$ en función de x e y . Algunos ejemplos de EDO que tienen esta forma o que pueden ser reducidos a ella son los siguientes:

$$y' = x^2 + y^2$$

$$y' = xy + 1$$

$$xy' = 2y + 3xy'$$

En cambio, las siguientes EDO son de orden 1 pero no pueden escribirse de la forma (9.14):

$$y' = x + e^{xy'}$$

$$\text{sen}(xy') = y' + xy$$

$$\ln(x + y') = 2 - 3x + y'$$

¿Y cual es la razón de querer estudiar ese caso particular (9.14) de EDO? Hay varias razones:

1. En las situaciones reales aparecen frecuentemente EDO del tipo (9.14). Por ejemplo, las EDO de los ejercicios 9.5 y 9.6 son de este tipo.
2. Existen diversos métodos con los que resolver una EDO que tenga exactamente la forma (9.14). Veremos estos métodos en el apartado 9.3.
3. Como veremos en el apartado 9.4, bajo ciertas condiciones es posible asegurar que existe una única solución de la EDO (9.14) que pase por cierto punto fijo (x_0, y_0) , es decir, bajo condiciones suficientes es posible asegurar que existe una única solución para el problema:

$$y' = F(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{9.15}$$

En algunas ocasiones seremos capaces de calcular de forma exacta esa única solución de (9.15) y otras veces tendremos que recurrir al cálculo de soluciones aproximadas obtenidas mediante métodos numéricos, como veremos en el apartado 9.6.

Pero con lo que sabemos hasta ahora somos capaces de estudiar desde varios puntos de vista la solución $y(x)$ de (9.15), a pesar de que todavía no sepamos cómo calcular $y(x)$. Las ideas que vamos a explorar en esta apartado para estudiar la solución de (9.15) son las siguientes:

- Estudio de las derivadas sucesivas de $y(x)$.

Observa que la EDO de (9.15) nos proporciona directamente la expresión de $y'(x)$. Esto nos da la idea de estudiar dónde es creciente/decreciente $y(x)$ y también calcular la recta tangente a $y(x)$ en cada punto (x_0, y_0) . Además, a partir de la EDO de (9.15) quizá podamos obtener la expresión de $y''(x)$, con lo cual seremos capaces de estudiar la concavidad/convexidad de $y(x)$.

- Aproximación de $y(x)$ mediante polinomios de Taylor.

A partir de la EDO de (9.15) podemos obtener $y'(x_0)$, y derivando implícitamente obtendremos $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$, etc. Con lo cual ya podremos aproximar $y(x)$ mediante un polinomio en las cercanías de x_0 . ¡Ya tenemos aquí de nuevo a nuestra Megaestrella: El Teorema de Taylor, en este caso para darnos información acerca de la solución $y(x)$ del problema (9.15)!

Vamos a estudiar con detalle estas dos posibilidades.

9.2.1. Estudio de las derivadas sucesivas de $y(x)$

Vamos a estudiar el comportamiento de las soluciones de la EDO

$$y' = x^2 y \tag{9.16}$$

Sabemos que el crecimiento de $y(x)$ está relacionado con el signo de $y'(x)$:

$y(x)$ creciente en un intervalo $(a, b) \Leftrightarrow y'(x) > 0$ en (a, b)

$y(x)$ decreciente en un intervalo $(a, b) \Leftrightarrow y'(x) < 0$ en (a, b)

En este caso, habrá que estudiar el signo de $y'(x) = x^2 y$:

$$y'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 y > 0 \Leftrightarrow y > 0$$

$$y'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 y < 0 \Leftrightarrow y < 0$$

Así pues, si $y(x)$ es una solución de la EDO (9.16), en aquellos intervalos $x \in (a, b)$ tales que $y'(x) > 0$, la función $y(x)$ es creciente. Y en aquellos intervalos $x \in (a, b)$ tales que $y'(x) < 0$, la función $y(x)$ es decreciente. En otras palabras, una solución $y(x)$ de la EDO (9.16) cuya gráfica se encuentre en el semiplano superior, será creciente. Y si su gráfica se encuentra en el semiplano inferior, $y(x)$ es decreciente.

Estudiemos ahora la concavidad/convexidad de $y(x)$. Habrá que estudiar el signo de $y''(x)$:

$y(x)$ es cóncava en un intervalo $(a, b) \Leftrightarrow y''(x) > 0$ en (a, b)

$y(x)$ es convexa en un intervalo $(a, b) \Leftrightarrow y''(x) < 0$ en (a, b)

Para calcular $y''(x)$ derivamos la ecuación (9.16) de forma implícita:

$$y'' = \frac{d}{dx}(x^2y) = 2xy + x^2y' = yx(2 + x^3) \quad (9.17)$$

Así pues, $y''(x)$ está formada como un producto de los factores $y(x)$ y una función $h(x) = x(2 + x^3)$. Vamos a estudiar el signo resultante:

$y''(x) > 0 \Leftrightarrow y(x)$ y $h(x)$ tienen el mismo signo

$y''(x) < 0 \Leftrightarrow y(x)$ y $h(x)$ tienen diferente signo

La gráfica de $h(x)$ nos permite determinar los intervalos en los que $h(x)$ es positiva o negativa. Observa la Figura 9.4. Las raíces de $h(x)$ son $x = 0$, $x = -(2)^{1/3} \cong -1.26$. Por tanto:

$$h(x) = x(2 + x^3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1.26) \cup (0, \infty)$$

$$h(x) = x(2 + x^3) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1.26, 0)$$

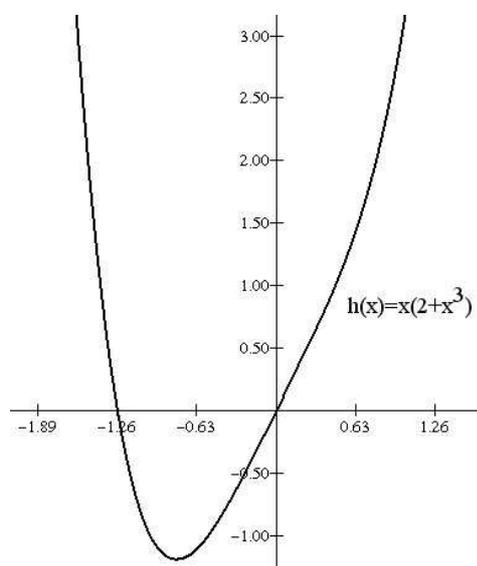


Figura 9.4: Función para el estudio del crecimiento

La siguiente tabla muestra las concavidad/convexidad de $y(x)$

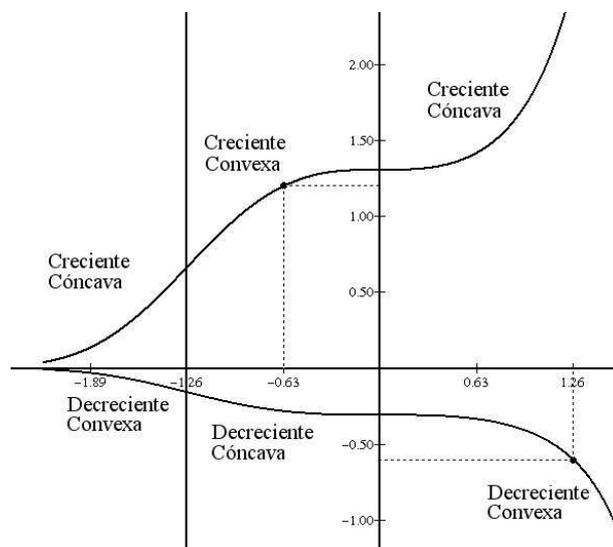


Figura 9.5: Crecimiento y concavidad

Intervalo de x	Intervalo de $y(x)$	Concavidad/convexidad de $y(x)$
$x \in (-\infty, -1.26)$	$y \in (0, \infty)$	Cóncava
$x \in (-1.26, 0)$	$y \in (0, \infty)$	Convexa
$x \in (0, \infty)$	$y \in (0, \infty)$	Cóncava
$x \in (-\infty, -1.26)$	$y \in (-\infty, 0)$	Convexa
$x \in (-1.26, 0)$	$y \in (-\infty, 0)$	Cóncava
$x \in (0, \infty)$	$y \in (-\infty, 0)$	Convexa

Observa que los puntos $x = -1.26$ y $x=0$ son puntos en los que cambia la concavidad de $y(x)$, de modo que se trata de puntos de inflexión. La Figura 9.5 muestra un par de posibles gráficas de funciones que pasan por sendos puntos fijos, y que verifican las propiedades de crecimiento y concavidad que hemos obtenido. La gráfica trazada en el semiplano superior pasa por $(-0.63, 1.2)$ y la del semiplano inferior pasa por el punto $(1.26, -0.6)$. Por supuesto, no podemos asegurar que estas dos funciones sean solución de la EDO (9.16), sólo podemos decir que se comportan, en cuanto a crecimiento y concavidad, del mismo modo que una solución $y(x)$ de la EDO (9.16).

Por otra parte, la EDO $y' = F(x, y)$ nos permite calcular fácilmente la recta tangente a la función $y(x)$ en cada punto (x_0, y_0) . Puesto que la pendiente de esta recta es $F(x_0, y_0)$, su ecuación será:

$$y - y_0 = F(x_0, y_0)(x - x_0)$$

En el caso de la EDO (9.16), la ecuación de la recta tangente en cada punto (x_0, y_0) será:

$$y = y_0 + x_0^2 y_0 (x - x_0)$$

Por ejemplo, en los puntos que aparecen en la Figura 9.5, $(-0.63, 1.2)$ y $(1.26, -0.6)$, las ecuaciones de las rectas tangentes serán respectivamente:

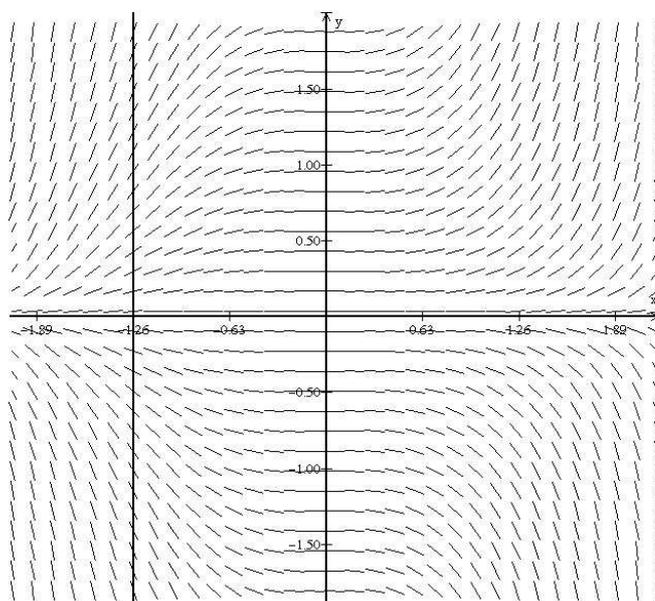


Figura 9.6: Mapa de pendientes

$y = 1.2 + 0.476(x + 0.63)$ e $y = -0.6 - 0.953(x - 1.26)$.

Si ahora hacemos estas operaciones en un gran número de puntos del plano XY y trazamos un pequeño segmento de la recta tangente en cada uno, obtenemos una imagen del modo en que se comportan las soluciones de la EDO. Se trata del llamado campo de pendientes de $y(x)$. La Figura 9.6 muestra el campo de pendientes de $y(x)$ obtenida de la EDO (9.16).

Ahora vamos a trazar sobre el campo de pendientes de la Figura 9.6 las dos gráficas de posibles soluciones aproximadas que aparecen en la Figura 9.5. El resultado se muestra en la Figura 9.7. Como ves, el campo de pendientes nos permite trazar con más precisión las posibles soluciones, observando las tangentes en cada punto. Se trata de que la tangente a la curva en cada punto sea siempre paralela al pequeño segmento de recta tangente que tenga más próximo.

Naturalmente, el mapa puede ser más denso, como el que aparece en la Figura 9.8.

Observa cómo estos mapas de pendientes de $y(x)$ nos dan información acerca del crecimiento de las soluciones $y(x)$ de la EDO (9.16). Para obtener información gráfica de la concavidad/convexidad de las soluciones $y(x)$, podemos trazar el mapa de pendientes de $y'(x)$. Para obtener $y''(x)$, basta derivar (9.17) de forma implícita, y se obtiene $y''(x) = yx(2 + x^3)$. La Figura 9.9 muestra este mapa de pendientes de $y'(x)$. Observa cómo la información que aparece en este mapa concuerda con los resultados analíticos que obtuvimos acerca de la concavidad/convexidad de $y(x)$ (Figura 9.5) y cómo se produce un cambio de signo en $y''(x)$ (que es la derivada de $y'(x)$) en los puntos $x = 0$ y $x = -1.26$, donde la función $y(x)$ tiene una inflexión.

Finalmente, observa la Figura 9.10. Hemos representado otras posibles soluciones de la

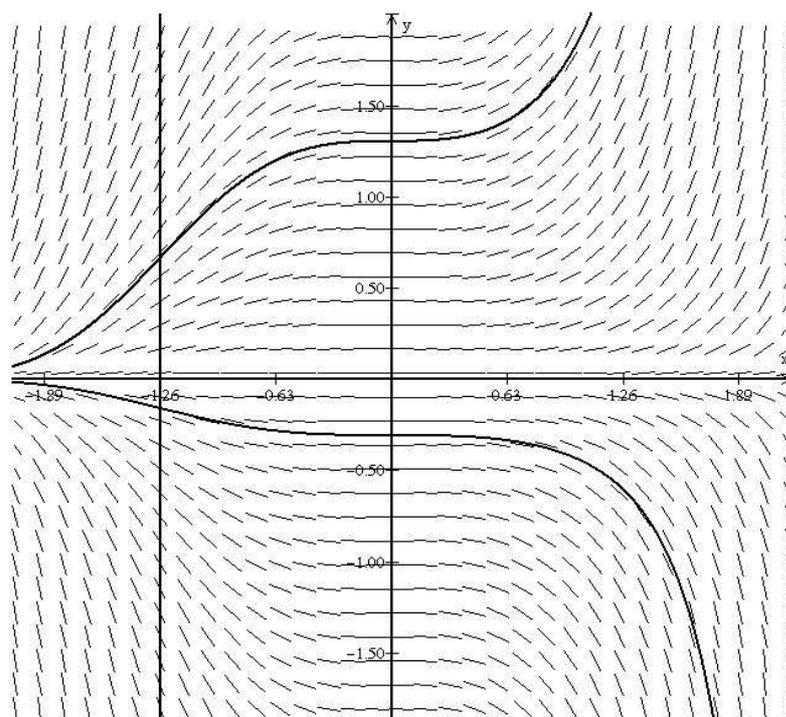


Figura 9.7: Mapa de pendientes 2

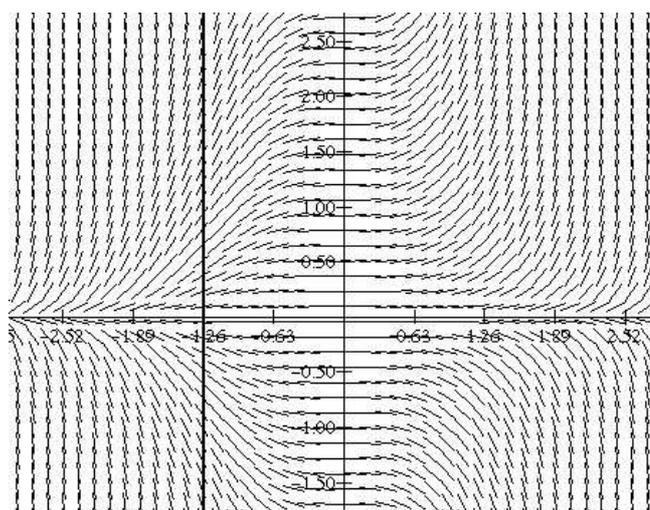


Figura 9.8: Mapa de pendientes 3

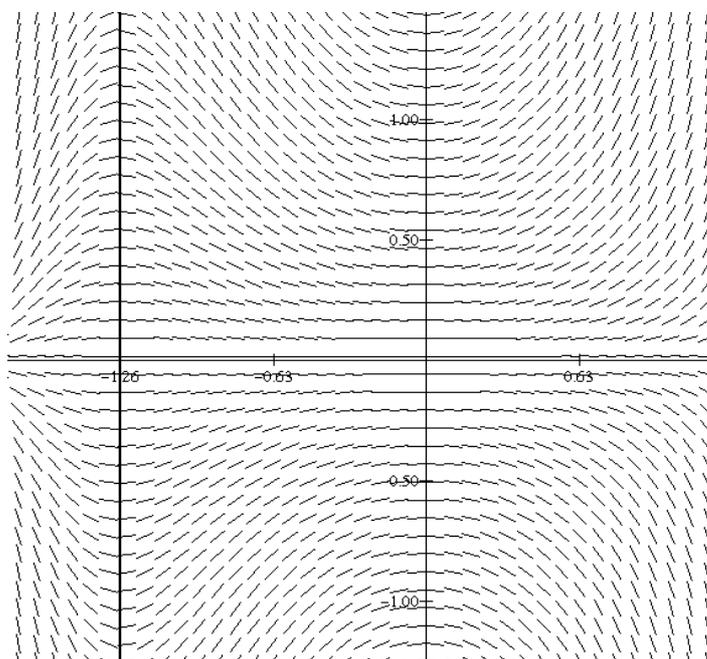


Figura 9.9: Mapa de pendientes y concavidad

EDO (9.16), sumergidas en el campo de pendientes de $y(x)$. Pero ahora hemos trazado el segmento de cada tangente de mayor longitud. Obsérvese cómo en las zonas de concavidad, la recta tangente queda siempre por debajo de la función, y en las zonas de convexidad, la tangente se sitúa por encima de la recta tangente. Recuerda que estas son precisamente las condiciones geométricas que definen la concavidad/convexidad.

9.2.2. Aproximación de $y(x)$ mediante polinomios de Taylor

En el apartado anterior hemos hecho un estudio cualitativo de la solución $y(x)$ del problema (9.16), porque hemos obtenido propiedades de $y(x)$. Ahora realizaremos un estudio analítico en el que obtendremos una aproximación de $y(x)$ mediante el teorema de Taylor. Como recordarás, si $y(x)$ es derivable hasta orden n , el polinomio de Taylor de orden n de $y(x)$ en el punto $x = a$ se obtiene del modo siguiente:

$$P_n(x) = y(a) + y'(a)(x - a) + \frac{y''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

En nuestro caso, $a = x_0$, $y(a) = y_0$, $y'(x_0) = F(x_0, y_0) = x_0^2 y_0$, $y''(x_0) = y_0 x_0 (2 + x_0^3)$. Así pues, ya podemos calcular el polinomio de Taylor de orden 2, $P_2(x)$. Sin embargo, vamos a obtener el valor de $y'''(x_0)$ para poder calcular $P_3(x)$. Derivando (9.17) de forma implícita, es fácil comprobar que

$$y'''(x) = y(2 + 6x^3 + x^6) \quad \Rightarrow \quad y'''(x_0) = y_0(2 + 6x_0^3 + x_0^6)$$

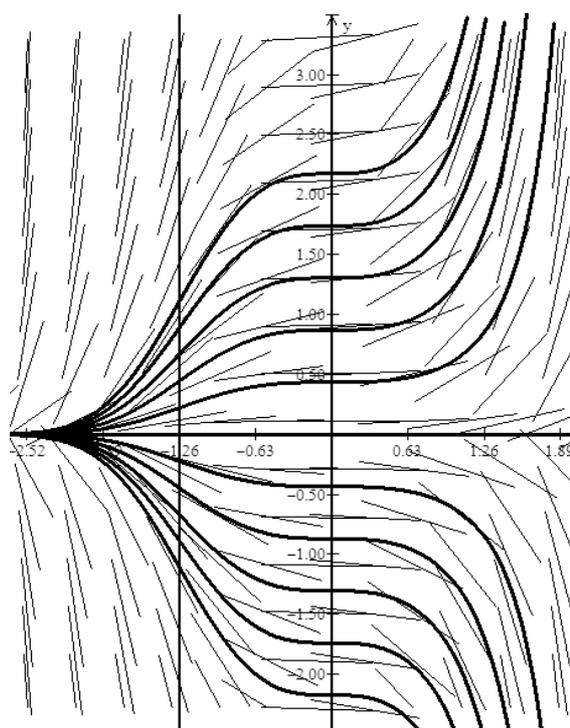


Figura 9.10: Mapa de pendientes y tangentes largas

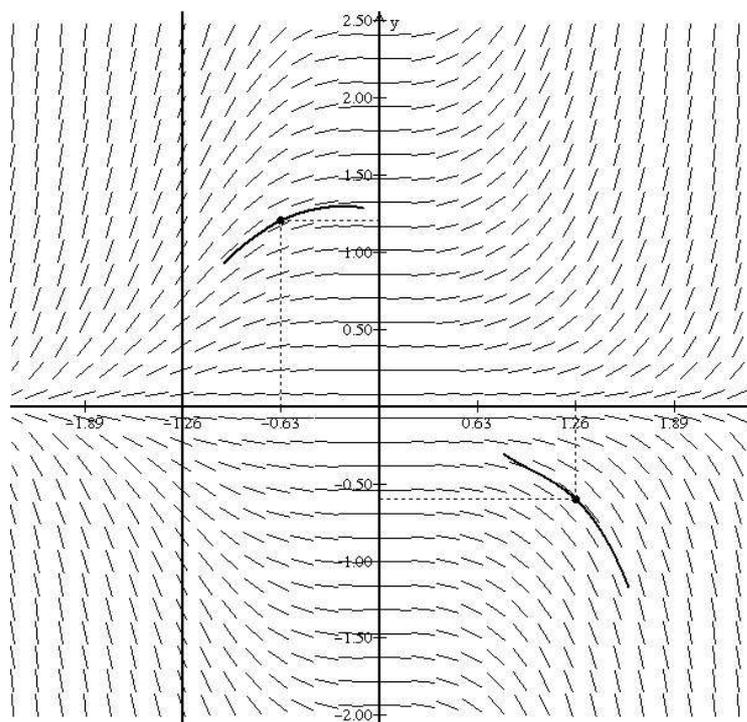


Figura 9.11: Dos polinomios de Taylor

Así pues, ya podemos escribir el polinomio $P_3(x)$:

$$P_3(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3$$

En el punto $(-0.63, 1.2)$, se obtiene:

$$P_3(x) = 1.2 + 0.476(x + 0.63) - 0.6615(x + 0.63)^2 + 0.1125(x + 0.63)^3$$

Y en el punto $(1.26, -0.6)$, se obtiene:

$$P_3(x) = -0.6 - 0.953(x - 1.26) - 1.512(x - 1.26)^2 - 1.8(x - 1.26)^3$$

La Figura 9.11 muestra pequeños fragmentos de las gráficas de ambos polinomios "sumergidas" en el campo de pendientes de $y(x)$. Observa cómo los segmentos de tangentes del campo son aproximadamente paralelos a las gráficas de los polinomios. Los polinomios se comportan de una forma muy parecida a las soluciones de la EDO.

Sin embargo, no hay que olvidar que el polinomio de Taylor de orden n sólo proporciona una aproximación local a la función, esto es, $P_n(x)$ se aproxima "razonablemente" a $y(x)$ en las cercanías del punto donde se ha calculado el polinomio. Observa la Figura 9.12, hemos trazado en ella las gráficas de los dos polinomios anteriores pero en un intervalo mayor. Como puedes comprobar, lejos de los puntos en los que se han calculado los polinomios, éstos ya no se comportan como soluciones de la EDO, sus tangentes ya no se corresponden con las tangentes del campo de pendientes.

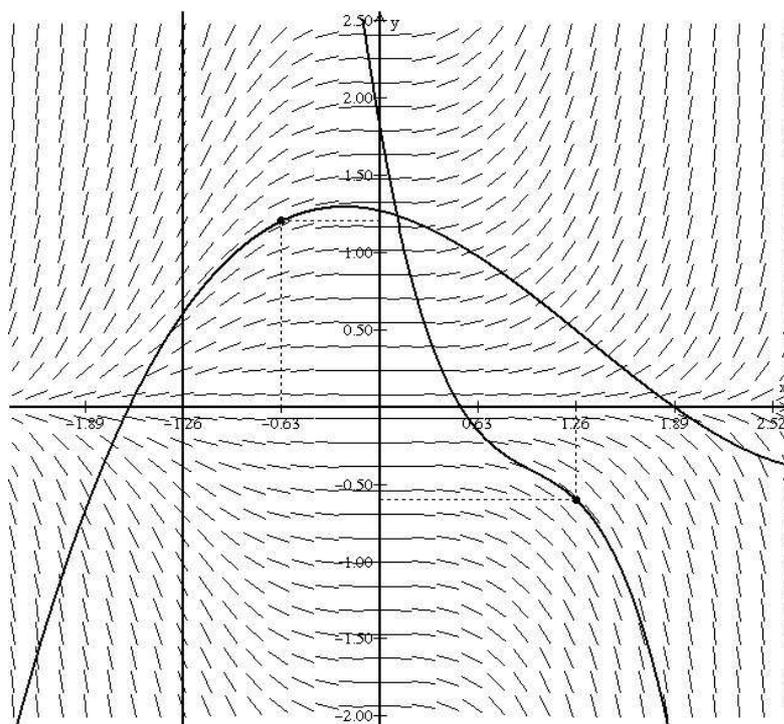


Figura 9.12: Dos polinomios de Taylor dibujados en mayor rango

9.3. Estudio sistemático de algunos tipos de EDO de la forma

$$y' = F(x, y)$$

En este apartado vamos a explicar algunos métodos estándar para encontrar la solución general de ecuaciones de la forma $y' = F(x, y)$.

9.3.1. Ecuaciones de variables separables

Algunas EDO $y' = F(x, y)$ pueden escribirse de la forma

$$f(y) \frac{dy}{dx} = g(x) \tag{9.18}$$

Por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 e^y \Leftrightarrow e^{-y} \frac{dy}{dx} = x^2 \quad (f(y) = e^{-y}, g(x) = x^2) \tag{9.19}$$

Para resolver este tipo de EDO, escribimos (9.18) del modo siguiente:

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(y) dy \right) = g(x) \tag{9.20}$$

Integrando en (9.20):

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx + C$$

Así pues, la EDO se resuelve mediante el cálculo de las primitivas de $f(y)$ y $g(x)$. En el ejemplo (9.19):

$$\int e^{-y} dy = \int x^2 dx \Leftrightarrow -e^{-y} = \frac{x^3}{3} + C \tag{9.21}$$

En (9.21) podemos escribir y en función de x y de C :

$$e^{-y} = -\frac{x^3}{3} - C = -\frac{x^3}{3} + C' \Rightarrow -y = \ln \left(-\frac{x^3}{3} + C' \right) \Rightarrow y = -\ln \left(-\frac{x^3}{3} + C' \right)$$

Ejercicio 9.9 Encuentra la solución general de la EDO (9.16).

9.3.2. Ecuaciones homogéneas

Se trata de ecuaciones $y' = F(x, y)$ en las que la función $F(x, y)$ tiene una forma particular, es una función del cociente y/x . Es decir, la EDO tiene la forma

$$y' = h(y/x) \tag{9.22}$$

Veamos algunos ejemplos:

$$y' = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \Leftrightarrow y' = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$y' = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{\frac{y}{x}}$$

Para resolver este tipo de EDO, aplicamos en (9.22) el cambio de variable dependiente $z = y/x$. Es decir, vamos a escribir (9.22) de modo sólo aparezca la nueva variable dependiente z y la derivada de z respecto a x . En primer lugar, vamos a expresar $y'(x)$ en función de x , $z(x)$ y $z'(x)$:

$$z = y/x \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$$

Ahora aplicamos el cambio de variable en (9.22):

$$y' = h(y/x) \Rightarrow z + xz' = h(z)$$

Es sencillo darse cuenta de que esta nueva EDO es de variables separables:

$$\frac{dz}{h(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

Con lo cual, por simple integración se llega a la solución general:

$$\int \frac{dz}{h(z) - z} = \ln|x| + C \quad (9.23)$$

Naturalmente, una vez calculada la primitiva que aparece en (9.23), deberemos deshacer el cambio de variable que aplicamos al principio, $z = y/x$.

Ejercicio 9.10 *Aplicar este procedimiento de resolución a las tres EDO homogéneas que utilizamos como ejemplo al comienzo de este apartado.*

9.3.3. Ecuaciones exactas

A veces es conveniente escribir la EDO $y' = F(x, y)$ de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (9.24)$$

Esta operación es un simple cambio de notación que puede hacerse siempre. Por ejemplo:

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} \Leftrightarrow xy dx + (y^2 - x^2)dy = 0 \quad (M = xy, N = y^2 - x^2)$$

$$y' = x + y \Leftrightarrow (x + y)dx - dy = 0 \quad (M = x + y, N = -1)$$

Pues bien, si el vector $(M(x, y), N(x, y))$ es el gradiente de cierta función $u(x, y)$, es decir, si

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= M(x, y) \\ u_y(x, y) &= N(x, y) \end{aligned} \tag{9.25}$$

entonces la solución general de (9.24) es

$$u(x, y) = C \tag{9.26}$$

Para demostrarlo, comprobemos que las funciones de (9.26) verifican la EDO (9.24). Diferenciamos (9.26):

$$du(x, y) = 0 \Rightarrow u_x(x, y)dx + u_y(x, y)dy = 0$$

por tanto:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Para demostrar que (9.26) es la solución general de (9.24) también podemos utilizar el significado del gradiente de una función. El razonamiento es el siguiente:

1. La curva (9.26) es una curva de nivel de la superficie $z=u(x,y)$
2. Sabemos que el gradiente de $u(x, y)$ en cada punto es perpendicular a la curva de nivel que pasa por ese punto.
3. Como el gradiente de $u(x, y)$ es $(u_x(x, y), u_y(x, y))$, un vector perpendicular en cada punto (x, y) será $(-u_y(x, y), u_x(x, y))$. Por tanto, la pendiente de $y(x)$ en cada punto será $y' = -u_x(x, y)/u_y(x, y)$, o lo que es lo mismo, $y' = -M(x, y)/N(x, y)$, que es precisamente la EDO (9.24).

Así pues, en el caso de que exista una función $u(x, y)$ que cumpla las condiciones (9.25), para encontrar la solución general de la EDO (9.24) nos bastará con determinar esta función $u(x, y)$. Estas EDO se llaman exactas y cada función $u(x, y)$ que cumpla (9.25) se llama función de potencial. Por ejemplo, la EDO

$$3x^2y^2 dx + 2x^3y dy = 0$$

es exacta porque tomando la función $u(x, y) = x^3y^2$, se verifican las condiciones (9.25). En consecuencia, su solución general será $x^3y^2 = C$. Ahora bien, nuestras preguntas son: ¿en qué casos podemos estar seguros de que tal función $u(x, y)$ existe? Y en el caso de que $u(x, y)$ exista, ¿cómo calcularla?

Si derivamos respecto a y la condición $u_x(x, y) = M(x, y)$, obtenemos $u_{xy}(x, y) = M_y(x, y)$. Si derivamos respecto a x la condición $u_y(x, y) = N(x, y)$, obtenemos $u_{yx}(x, y) =$

$N_x(x, y)$. Si suponemos como hipótesis que la función $u(x, y)$ admite derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces aplicando el teorema de Schwartz se tiene $u_{xy}(x, y) = u_{yx}(x, y)$. Así pues, la condición para que la EDO (9.24) sea exacta es que se verifique la igualdad:

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad (9.27)$$

La condición (9.27) es el test para demostrar que existe función de potencial $u(x, y)$. Veamos con un ejemplo cómo calcularla.

La EDO

$$(y + 2xy^3)dx + (x + 3x^2y^2)dy = 0$$

es exacta porque

$$M_y = 1 + 6xy^2 = N_x$$

En consecuencia, existe una función $u(x, y)$ tal que

$$u_x = y + 2xy^3 \quad (9.28)$$

$$u_y = x + 3x^2y^2 \quad (9.29)$$

Integrando (9.28):

$$u = \int (y + 2xy^3) dx = xy + x^2y^3 + h(y) \quad (9.30)$$

Observa que al integrar (9.28), la constante de integración puede ser una expresión que dependa de y , por eso en (9.29) aparece una función $h(y)$ (desconocida de momento). Derivando (9.30) respecto a y :

$$u_y = x + 3x^2y^2 + h'(y) \quad (9.31)$$

Ahora, obligamos a coincidir los resultados de (9.31) y (9.29):

$$x + 3x^2y^2 + h'(y) = x + 3x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad h'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(y) = C$$

De modo que la función $u(x, y)$ en realidad no es única sino que todas las funciones de la forma

$$u(x, y) = xy + x^2y^3 + C$$

cumplen las condiciones (9.28) y (9.29). En consecuencia, la solución general de la EDO será:

$$xy + x^2y^3 = C \quad (9.32)$$

La ecuación (9.32) es una relación entre las variables x e y en la que aparece una constante arbitraria C . Sin embargo, en (9.32) no aparece de forma explícita la variable y en función de x y de C . ¿Qué representa la familia (9.32)? Para cada valor fijo de la constante real C , la ecuación (9.32) define una curva en el plano, formada por los puntos (x, y) que cumplen esa condición (9.32). La Figura 9.13 muestra dicha curva para el caso $C = 0.2$. Observa que no se trata de la representación gráfica de una función $y(x)$ porque a un mismo x le pueden corresponder varios valores de y . Por ejemplo, hay tres puntos cuya abscisa es $x = -2$, que son $(-2, 0.753)$, $(-2, -0.102)$ y $(-2, -0.650)$. En cambio, sólo hay uno con abscisa $x = 0.4$, el punto $(0.4, 0.461)$.

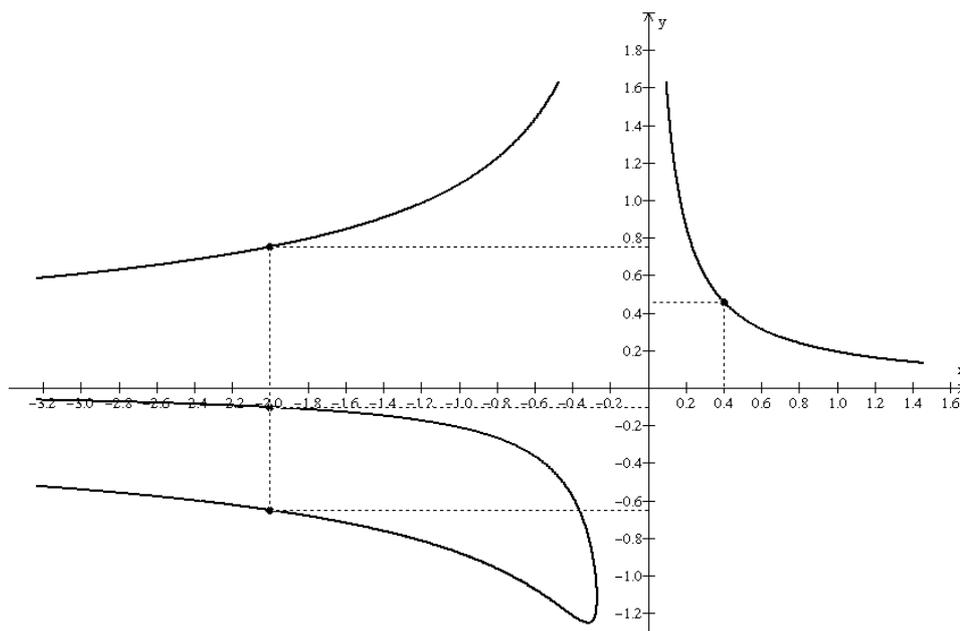


Figura 9.13: Función implícita

La curva que aparece en la Figura 9.12 no es globalmente la representación gráfica de una única función $y(x)$. Pero, dado un punto (x_0, y_0) situado sobre la curva, existe un fragmento de curva que representa a una función $y(x)$ que es la solución de la EDO en un entorno de x_0 . La Figura 9.14 muestra cuatro fragmentos de la curva correspondientes a los puntos $(-2, 0.753)$, $(-2, -0.102)$, $(-2, -0.650)$ y $(0.4, 0.461)$. Estos cuatro fragmentos de la curva son la representación gráfica de otras tantas funciones $y(x)$. Cada una de estas funciones es la única solución de la EDO que pasa por el correspondiente punto. Volveremos a esta cuestión en el apartado 9.4.

Ejercicio 9.11 Considera de nuevo la familia de curvas (9.32).

1. Dado un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$ del plano, ¿existe alguna curva de (9.32) que pase por P ?

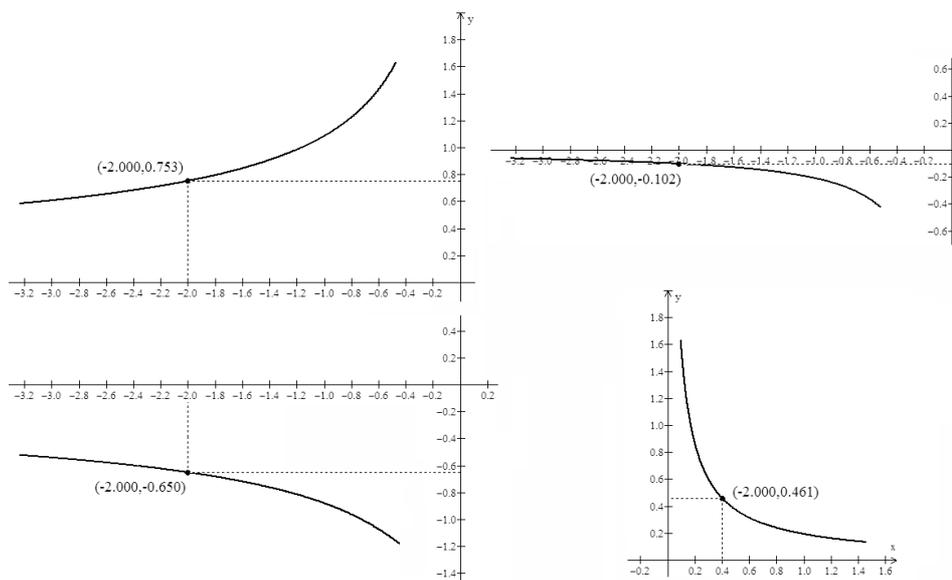


Figura 9.14: Cuatro fragmentos de curva

2. Supongamos que tomamos una de las curvas de (9.32), es decir, damos cierto valor fijo de C . Dada una abscisa cualquiera x_0 , ¿existe algún punto P sobre la curva que tenga esa abscisa?
3. Tomamos de nuevo un valor fijo de C . Dada una ordenada cualquiera y_0 , ¿existe algún punto P sobre la curva que tenga esa ordenada?

9.3.4. Ecuaciones reducibles a exactas mediante un factor integrante

Hemos visto que si la EDO

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{9.33}$$

es exacta (es decir, si $M_y(x, y) = N_x(x, y)$), entonces ya tenemos un procedimiento con el que obtener su solución general. Si (9.33) no es exacta, a veces es posible encontrar una función $G(x, y)$ tal que si multiplicamos la EDO (9.33) por $G(x, y)$, la ecuación resultante ya es exacta. A esta función $G(x, y)$ la llamamos **factor integrante**. Por ejemplo, la EDO

$$y dx + (x^2 y^2 - x) dy = 0 \tag{9.34}$$

no es exacta porque

$$\begin{aligned} M &= y & M_y &= 1 \\ N &= x^2 y^2 - x & N_x &= 2xy^2 - 1 \end{aligned}$$

Sin embargo, si multiplicamos (9.34) por el factor integrante $G(x) = 1/x^2$, la EDO toma la forma:

$$\frac{y}{x^2} dx + \left(y^2 - \frac{1}{x} \right) dy = 0 \quad (9.35)$$

Esta ecuación ya es exacta porque

$$\begin{aligned} M &= \frac{y}{x^2} \\ N &= y^2 - \frac{1}{x} \\ M_y &= \frac{1}{x^2} = N_x \end{aligned}$$

A partir de este momento, ya es posible aplicar el procedimiento que explicamos en el apartado 9.3.3 para obtener la solución general de (9.36) (hazlo como ejercicio).

Naturalmente, la pregunta es ¿cómo buscar un factor integrante para la EDO (9.33)? No existe ningún procedimiento que nos permita en general encontrar $G(x, y)$, pero en algunas EDO podemos intentar un factor integrante de la forma $G(x, y) = x^n y^m$, donde m y n son constantes reales a determinar. Como ejemplo, aplicaremos este procedimiento a la EDO

$$2y dx + (3y - 2x)dy = 0 \quad (9.36)$$

Esta EDO no es exacta porque $M_y = 2$, $N_x = -2$. Multiplicamos (9.36) por el candidato a factor integrante $G(x, y) = x^n y^m$:

$$2y^{m+1}x^n dx + (3y^{m+1}x^n - 2x^{n+1}y^m)dy = 0$$

Ahora obligamos a esta ecuación a ser exacta:

$$M_y = 2(m+1)y^m x^n = N_x = 3nx^{n-1}y^{m+1} - 2(n+1)x^n y^m$$

Igualando y sacando factor común:

$$2x^n y^m (m+n+2) = 3nx^{n-1}y^{m+1}$$

Simplificando:

$$2x(m+n+2) = 3ny$$

Ahora se trata de encontrar cualquier pareja de valores n y m que hagan cierta la igualdad anterior para todo x e y . En este caso sólo hay una posibilidad, $n = 0$, $m = -2$. Una vez multiplicada la ecuación (9.36) por el factor integrante $G(y) = y^{-2}$, la EDO resultante será:

$$\frac{2}{y} dx + \left(\frac{3}{y} - \frac{2x}{y^2} \right) dy = 0 \quad (9.37)$$

A partir de aquí, basta aplicar el procedimiento que explicamos en el apartado 9.3.3 para obtener la solución general de (9.37) (hazlo como ejercicio). Una cuestión importante es que,

dada la EDO (9.33), no tiene por qué existir un factor integrante de la forma $G(x, y) = x^n y^m$ ni de ninguna otra forma que se nos ocurra. Lo único que podemos hacer es ensayar para (9.33) un factor integrante que tenga una forma determinada y estudiar su existencia (ver el siguiente ejercicio).

Ejercicio 9.12 Dada la EDO $(x^2 + y^2 + 1)dx - y(x + 1)dy = 0$, demuestra que no existe un factor integrante de la forma $G(x, y) = x^n y^m$. Calcula un factor integrante de la forma $G(x) = (x + 1)^n$ y encuentra la solución de la EDO.

9.3.5. Ecuaciones lineales

Una EDO lineal es una ecuación que tiene la forma

$$y' + y \cdot P(x) = Q(x) \quad (9.38)$$

Este tipo de EDO es muy frecuente en las aplicaciones prácticas. Por ejemplo, en circuitos eléctricos, cuando se conecta una resistencia y una inductancia en serie con la fuente de alimentación (ver Figura 9.15).

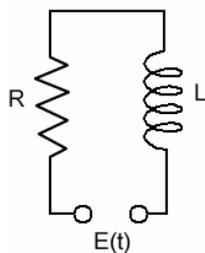


Figura 9.15: Circuito RL

Se puede demostrar que un modelo con el que estudiar la intensidad $I(t)$ que circula por el circuito en cada instante de tiempo viene dado por:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

donde L es el valor de la inductancia, R el de la resistencia y E es la tensión que se aplica. Observa que esta ecuación se reduce a la forma (9.38) sin más que dividirla entre L . Normalmente L y R son valores constantes, pero E puede ser una función del tiempo, por ejemplo si se aplica al circuito una tensión alterna del tipo $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$.

Para obtener la solución general de (9.38), comenzamos multiplicándola por el factor integrante

$$e^{\int P(x) dx}$$

con lo cual queda:

$$y' e^{\int P(x) dx} + y P(x) e^{\int P(x) dx} = Q(x) e^{\int P(x) dx} \quad (9.39)$$

Luego observamos que se puede escribir como

$$\frac{d}{dx} \left(y e^{\int P(x) dx} \right) = Q(x) e^{\int P(x) dx}$$

Con lo cual

$$y e^{\int P(x) dx} = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C$$

Donde C es una constante arbitraria. Ahora $y(x)$ se despeja muy fácilmente, obteniéndose la solución general de (9.38)

$$y(x) = e^{-\int P(x) dx} \left(C + \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx \right) \quad (9.40)$$

Ejercicio 9.13 *Encontrar la solución del problema*

$$y' - 2y = e^{3x}$$

$$y(0) = -1$$

Ejercicio 9.14 *Encontrar la solución general de la EDO*

$$x^2 y'' + 2xy' = 2$$

de dos formas diferentes:

1. *Encontrando un cambio de variable que permita reducir la EDO a una ecuación lineal de orden 1.*
2. *Escribiendo el término de la izquierda como la derivada de cierto producto de dos funciones.*

Ejercicio 9.15 *Demuestra que el cambio de variable dependiente $z = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli $y' + yP(x) = y^n Q(x)$ en una EDO lineal. (INDICACIÓN: En primer lugar, multiplica la ecuación por y^{-n} . Luego aplica el cambio de variable).*

Ejercicio 9.16 *La carga $Q(t)$ que tiene un condensador C conectado en serie con una resistencia R y una fuente de alimentación $E(t)$ (ver Figura 9.16), se modeliza con la EDO*

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

Obtener su solución. Supongamos que $R = 20 \Omega$, $C = 0.01 F$ y $E(t) = 60e^{-2t} V$. Si la carga inicial del condensador es $Q(0) = 0$, calcular $Q(t)$, trazar su gráfica y encontrar el instante en el que la carga es máxima y el valor de dicha carga.

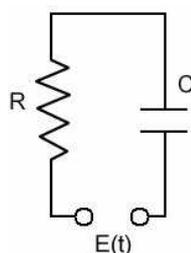


Figura 9.16: Circuito RC

9.4. Existencia y unicidad de solución

En el apartado anterior hemos estudiado algunos métodos con los que obtener la solución general de la EDO $y' = F(x, y)$. Estos métodos no son generales, es decir, la EDO tiene que cumplir ciertas condiciones para poder ser aplicados (ser de variables separables, ser homogénea, ser exacta, etc). Sin embargo, podremos encontrar ecuaciones para las cuales no dispongamos de un método analítico con el que obtener una solución. Tomemos por ejemplo el siguiente problema:

$$y' = \operatorname{sen}(xy) + \cos(x + y), \quad y(0.5) = 1 \quad (9.41)$$

La EDO de (9.41) no puede resolverse mediante ninguno de los métodos estudiados (compruébalo como ejercicio). Sin embargo, si representamos el campo de pendientes de las soluciones (ver Figura 9.16), en este caso sí parece que podríamos trazar de forma aproximada una solución $y(x)$ que verifique (9.41). Además, podríamos encontrar también una aproximación de $y(x)$ mediante polinomios de Taylor.

Ejercicio 9.17 *Sobre la Figura 9.17 traza de forma aproximada una solución de la ecuación (9.41). Calcula los polinomios de Taylor $P_2(x)$ y $P_3(x)$ en el punto $a = 0.5$ y represéntalos gráficamente en un entorno de ese punto.*

Así pues, nos interesa conocer bajo qué condiciones podemos asegurar que el problema general

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (9.42)$$

admite una única solución $y(x)$.

El siguiente teorema nos ofrece una respuesta a esta pregunta.

Teorema 9.1 *(Existencia y unicidad de solución)*

Supongamos que la función $F(x, y)$ y su derivada parcial $F_y(x, y)$ son continuas en cierto dominio D del plano XY . Supongamos que el punto (x_0, y_0) se encuentra en D . Entonces, existe una única función $y(x)$ definida en un cierto entorno de x_0 que verifica las dos condiciones (9.42).

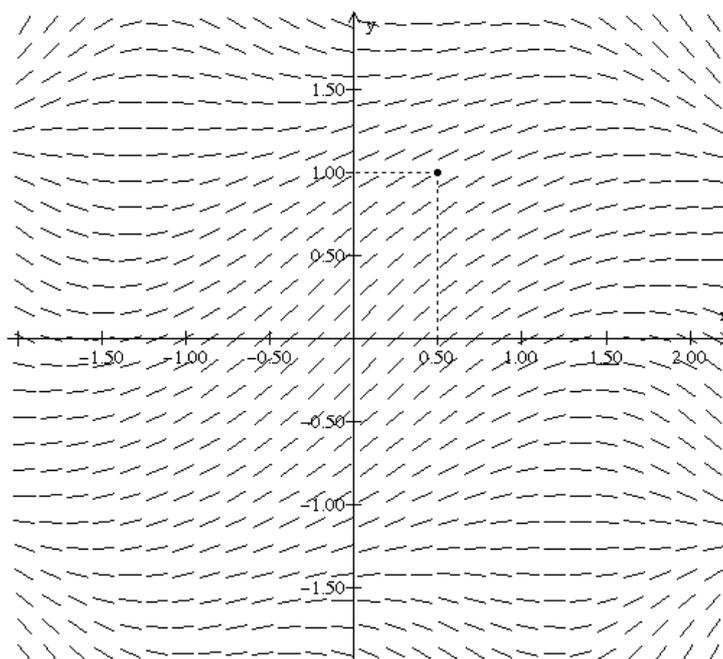


Figura 9.17: Campo de pendientes de 9.41

Vamos a analizar algunas consecuencias de este teorema de existencia.

1. Si $F(x, y)$ y $F_y(x, y)$ son continuas en cierto dominio D del plano XY , entonces existen infinitas funciones $y(x)$ que son solución de la EDO $y' = F(x, y)$. Ahora bien, si fijamos un punto $(x_0, y_0) \in D$, entonces sólo existe una función $y(x)$ que verifica la EDO y que además su gráfica pasa por el punto (x_0, y_0) , es decir, que $y(x_0) = y_0$. Por ejemplo, dada la EDO $y' + y = e^{-x}$, (que es lineal de orden 1), se puede utilizar el procedimiento que estudiamos en el apartado 9.3.5 y comprobar que su solución es

$$y = e^{-x}(C + x) \quad (9.43)$$

Si ahora estudiamos esta EDO desde el punto de vista del teorema de existencia, resulta que en este caso $F(x, y) = e^{-x} - y$, que es una función definida y continua en todo el plano XY , con derivada parcial $F_y(x, y)$ también continua. En consecuencia, el teorema de existencia nos garantiza que si fijamos un punto cualquiera (x_0, y_0) del plano XY , existe una única función perteneciente a la familia (9.43) que cumple $y(x_0) = y_0$. Veamos cómo obtener esa única solución, es decir, cómo calcular el valor adecuado de la constante C :

$$y(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = e^{-x_0}(C + x_0) \quad \Rightarrow \quad C = y_0 e^{x_0} - x_0 \quad (9.44)$$

Si, por ejemplo, deseamos encontrar la única función de (9.43) cuya gráfica pasa por el

punto $(0, 1.5)$, según (9.44) se tendrá $C = 1.5$, es decir, la única solución del problema

$$y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = 1.5$$

será $y = e^{-x}(1.5 + x)$. La Figura 9.17 muestra el campo de pendientes de la familia (9.43) y algunas de sus funciones. Cada una de ellas se ha obtenido fijando cierto punto (x_0, y_0) del plano y obteniendo el valor de C mediante la relación (9.44).

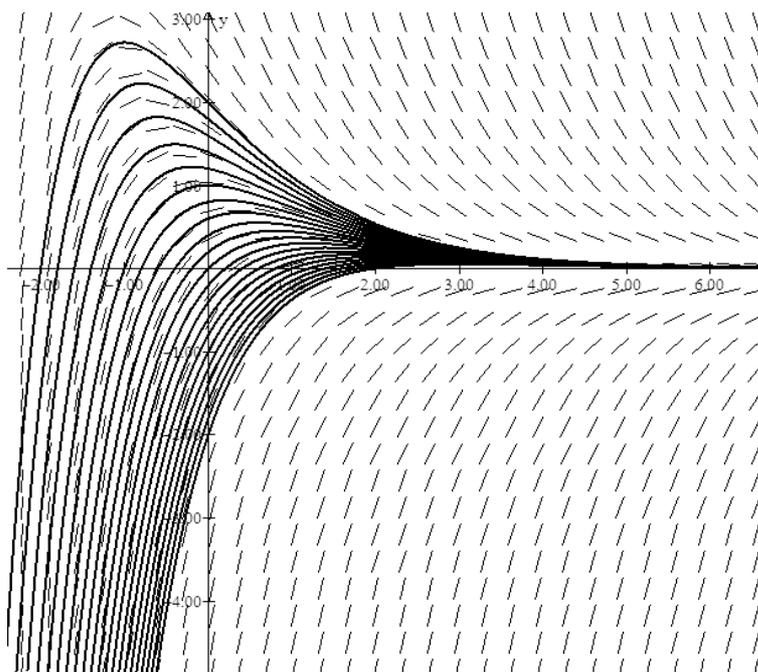


Figura 9.18: Familia 9.44

2. La familia de funciones (9.43) se llama solución general de la EDO $y' + y = e^{-x}$. Eso quiere decir que para cualquier punto (x_0, y_0) existe una única función perteneciente a la familia (9.43) y que verifica la EDO $y' + y = e^{-x}$. La solución general de una EDO $y' = F(x, y)$ es una familia de funciones

$$y = H(x, C) \tag{9.45}$$

tal que para todo punto (x_0, y_0) existe una única función $y(x)$ perteneciente a (9.45) tal que $y(x_0) = y_0$. O lo que es lo mismo, existe un único valor C_0 tal que $y_0 = H(x_0, C_0)$

3. La solución general (9.45) es una familia en la que la variable y se expresa de forma explícita en función de la variable x y de la constante C . Sin embargo, la solución general de una EDO $y' = F(x, y)$ no siempre puede expresarse de forma explícita como en (9.45), sino de forma implícita de la forma

$$H(x, y, C) = 0 \tag{9.46}$$

Por ejemplo, la EDO homogénea

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} \quad (9.47)$$

tiene como solución general (compruébalo como ejercicio aplicando el procedimiento que vimos en el apartado 9.3.2):

$$\frac{-x^2}{2y^2} = \ln |Cy| \quad (9.48)$$

Las funciones de la familia (9.48) no pueden escribirse de forma explícita, no puede despejarse la variable y como función de x y C .

Observa la Figura 9.19. A la izquierda se representa la curva obtenida dando el valor $C = 1$ en (9.48). En la derecha, se representan otras funciones de la misma familia, que se obtienen dando otros valores a C . El teorema de existencia y unicidad puede aplicarse en todo punto (x, y) salvo si $y = x$, que son los puntos que anulan el denominador de la EDO (9.47). Salvo en los puntos que se encuentran en las rectas $y = x$ (trazadas en línea punteada en la figura), para cada punto (x_0, y_0) existe una función $y(x)$ definida en un cierto entorno de x_0 tal que $y(x_0) = y_0$. El teorema de existencia asegura que existe solución $y(x)$ para el problema (9.42), pero $y(x)$ estará definida localmente, en cierto entorno de x_0 . Esta es la "almendra" del teorema de existencia. Se trata de un teorema que proporciona una propiedad válida en un entorno de un punto. Ya hemos estudiado otros muchos teoremas que también nos dan propiedades locales: la aproximación local del polinomio de Taylor, el crecimiento/decrecimiento de $y(x)$ en un entorno de un punto x_0 dependiendo del signo de $y'(x_0)$, el máximo/mínimo local en x_0 dependiendo del signo de las derivadas sucesivas en el punto x_0 , etc.

Pero sigamos con nuestro ejemplo. Toma una curva cualquiera de la Figura 9.19. Esta curva no representa a una única función $y = y(x)$ porque para un mismo valor de x pueden existir varios valores de y . Ahora bien, si eliges un punto (x_0, y_0) fijo sobre la curva, entonces sí que puedes tomar un pequeño fragmento de curva que representa a una función $y(x)$. La Figura 9.20 muestra diversos fragmentos de curva que representan soluciones $y(x)$ locales, definidas cada una de ellas en un entorno del punto donde se estudia la existencia de solución. Sin embargo, observa que en los puntos que se encuentran sobre las rectas $y = x$ no existe esta función $y(x)$ local. Como antes hemos dicho, el teorema de existencia no puede aplicarse en estos puntos.

9.5. Ecuaciones lineales de orden 2

9.5.1. Existencia y unicidad de soluciones

Hasta ahora hemos estudiado las ecuaciones diferenciales de orden 1 de la forma $y' = F(x, y)$. Hemos visto qué significan las soluciones y algunos métodos analíticos para encontrarlas. Sin embargo, las EDO de orden 1 no son las únicas ecuaciones que tienen importancia

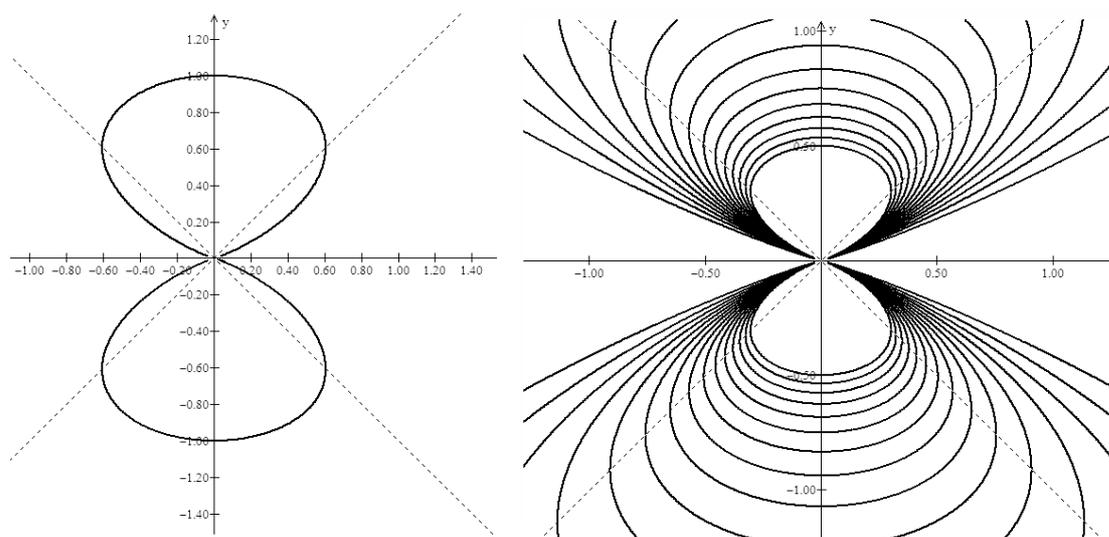


Figura 9.19: Familia 9.48

en las ciencias y en la ingeniería. Vimos en el apartado 9.1 algunos ejemplos de ecuaciones de orden 2 que servirían para construir modelos con los que estudiar fenómenos reales importantes:

- Caída libre de un sólido, teniendo en cuenta la fricción del aire:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k \frac{dy}{dt}$$

- Oscilación de un muelle sometido a una fuerza variable $F(t)$:

$$my'' + cy' + ky = F(t)$$

- Intensidad que circula por un circuito eléctrico en el que hemos conectado en serie una resistencia, un condensador y una inductancia (circuito RCL) y lo hemos alimentado con una tensión $E(t)$:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = E'(t)$$

Pues bien, existen muchas más situaciones donde es necesario resolver una EDO de orden 2 para estudiar el modo en que varía cierta magnitud $y(x)$. Por ejemplo:

- En el mismo circuito RCL, la carga $Q(t)$ del condensador en cada instante responde a la EDO

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

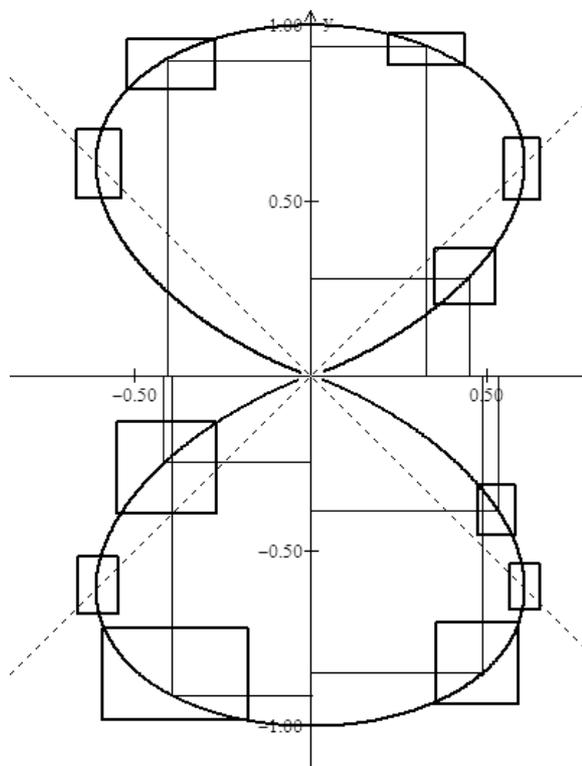


Figura 9.20: Curvas locales

- Si una fuerza horizontal constante F se aplica al extremo libre de una viga empotrada en uno de sus extremos (ver Figura 9.21), entonces la deflexión $y(x)$ de la viga viene dada por la EDO

$$EIy'' + Fy = \frac{W(L-x)}{2L}$$

donde E e I son constantes que dependen de las características físicas de la viga (módulo de elasticidad y momento de inercia de la sección, respectivamente), L es la longitud de la viga y W su peso.

Observa que todos estos ejemplos de aplicación utilizan ecuaciones que tienen la forma

$$ay'' + by' + cy = F(x) \tag{9.49}$$

donde a , b y c son constantes reales y $F(x)$ es una función. En este apartado veremos cómo resolver este tipo de ecuación.

Definición 9.3 La ecuación (9.49) se llama EDO lineal de orden 2 y coeficientes constantes. En particular, si $F(x)$ es nula, la EDO

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{9.50}$$

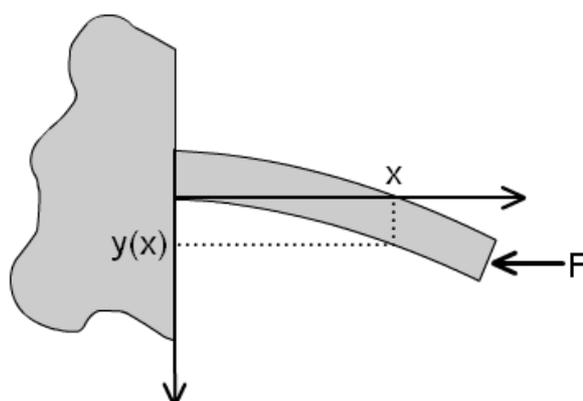


Figura 9.21: Deflexión de una viga

se llama ecuación homogénea.

NOTA: No confundir el concepto de "ecuación homogénea de orden 1" que estudiamos en el apartado 9.3.2 (ecuación que tiene la forma $y' = h(y/x)$), con el de "ecuación lineal homogénea de orden 2", que es el tipo de EDO dado por (9.50).

Recuerda que, para ecuaciones diferenciales de orden 1, estábamos interesados en resolver el problema con condición inicial

$$\begin{aligned} y' &= F(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{9.51}$$

En el apartado 9.4 hablamos de la solución general de la EDO $y' = F(x, y)$ y de las condiciones bajo las cuales el problema (9.51) tiene una única solución. Pues bien, vamos a hacer lo mismo con el problema

$$\alpha y'' + by' + cy = F(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = m_0 \tag{9.52}$$

donde $F(x)$ es una función continua. Observa en (9.52) que aparecen dos condiciones iniciales: buscamos una función que sea solución de la EDO, que pase por el punto (x_0, y_0) y que además su pendiente en x_0 sea igual a m_0 .

Definición 9.4 Llamamos solución general de la EDO $\alpha y'' + by' + cy = F(x)$, a la familia de funciones que depende de dos constantes arbitrarias C_1 y C_2

$$y = F(x, C_1, C_2) \tag{9.53}$$

y que cumple lo siguiente:

1. Toda función de (9.53) verifica la EDO

2. Para cada punto (x_0, y_0) y cada valor m_0 , Existe una única función de (9.53) que verifica las condiciones iniciales: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = m_0$.

Ejemplo 9.3 Demostrar que la familia de funciones

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 2 \quad (9.54)$$

es la solución general de la EDO

$$y'' - y = x^2 \quad (9.55)$$

En primer lugar, veamos que toda función de la familia (9.54) cumple la EDO (9.55), independientemente de los valores de C_1 y C_2 que tomemos. Derivando (9.54):

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 2x$$

$$y'' =$$

De donde:

$$y'' - y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2 - C_1 e^x - C_2 e^{-x} + x^2 + 2$$

Ahora vamos a tomar dos condiciones iniciales cualesquiera $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = m_0$, y a buscar una función de (9.53) que verifique ambas condiciones.

$$y_0 = C_1 e^{x_0} + C_2 e^{-x_0} - x_0^2 - 2$$

$$y'_0 = m_0 = C_1 e^{x_0} - C_2 e^{-x_0} - 2x_0$$

Se trata de determinar las constantes C_1 y C_2 , es decir, de resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C_1 e^{x_0} + C_2 e^{-x_0} = x_0^2 + 2 \\ C_1 e^{x_0} - C_2 e^{-x_0} = 2m_0 + 2x_0 \end{cases} \quad (9.56)$$

Pero este sistema tiene solución C_1, C_2 única ya que

$$\begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Observa la Figura 9.22. Hemos representado algunas funciones de la familia (9.53) obtenidas dando valores a las constantes C_1 y C_2 . Por cada punto (x_0, y_0) del plano pasan infinitas funciones de (9.53), pero sólo una que tenga cierta pendiente m_0 en el punto x_0 .

La Figura 9.23 representa la única función de la familia (9.53) que verifica las condiciones $y(2.6) = 2.05555, y'(2.6) = 5.52643$, esta es:

$$y = 0.8e^x + 0.6e^{-x} - x^2 - 2$$

También aparece en esta figura la recta tangente a la curva por el punto $x_0 = 2.6$ (que tiene como pendiente $m_0 = 5.52643$). Los valores $C_1 = 0.8, C_2 = 0.6$ se obtienen resolviendo el sistema (54).

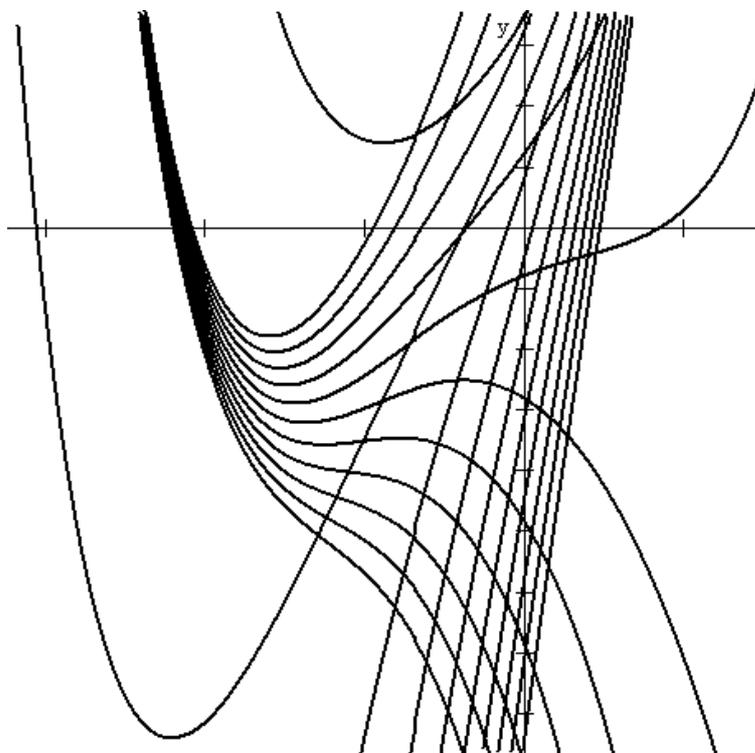


Figura 9.22: Familia biparamétrica

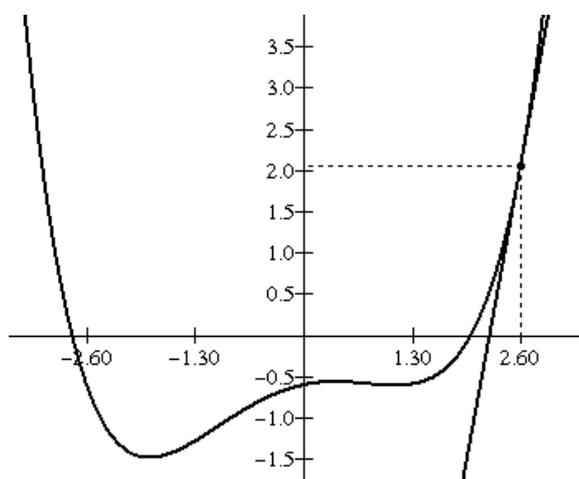


Figura 9.23: Solución única para dos valores

En este ejemplo hemos demostrado que cierta familia biparamétrica es solución general de una EDO lineal. Sin embargo, lo interesante es saber cómo obtener esta solución general.

En el ejemplo 3, dada la EDO (9.55), ¿cómo podemos encontrar la solución general (9.54)? Vamos a seguir estudiando este ejemplo, porque nos dará pistas acerca de cómo proceder en general.

Observamos que la solución general (9.54) está formada como suma de dos partes $y_1(x)$ e $y_2(x)$:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 2 = y_1 + y_2$$

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$y_2 = -x^2 - 2$$

Pues bien, resulta que $y_1(x)$ es solución general de la EDO homogénea asociada a (9.54)

$$y'' - y = 0$$

Mientras que $y_2(x)$ es una solución particular de la EDO completa:

$$y'' - y = x^2$$

Ejercicio 9.18 Demuestra que estas dos afirmaciones son ciertas.

¿Será cierta esta propiedad en general? Es decir, si nos dan la EDO lineal:

$$ay'' + by' + cy = F(x) \tag{9.57}$$

y su EDO homogénea asociada:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{9.58}$$

entonces, la solución general de (9.57) ¿se podrá escribir como $y = y_1(x, C_1, C_2) + y_2(x)$, donde $y_1(x, C_1, C_2)$ es la solución general de (9.58) e $y_2(x)$ una solución particular cualquiera de (9.57)? Sería muy interesante, porque entonces el problema de encontrar la solución general de (9.57) se descompondría en dos problemas: (a) encontrar la solución general de (9.58); y (b), encontrar cualquier solución de (9.57). Pues bien, resulta que esta propiedad es siempre cierta. Vamos a enunciarlo como teorema.

Teorema 9.2 Si la familia biparamétrica $y_1(x, C_1, C_2)$ es la solución general de la EDO homogénea (9.58) e y_2 es una solución particular de la EDO completa (9.57), entonces $y = y_1 + y_2$ es la solución general de la EDO completa (9.57).

Veamos cómo demostrar este teorema. Recordando lo que significa solución general (ver definición 4), habrá que demostrar que $y = y_1 + y_2$ cumple la EDO (9.57) y que dadas las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = m_0$, existe una única función de la familia $y = y_1 + y_2$ que verifica:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= F(x) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= m_0 \end{aligned} \tag{9.59}$$

Veamos en primer lugar que $y = y_1 + y_2$ es solución de (9.57):

Como y_2 es una solución de (9.57):

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = F(x)$$

Como y_1 es la solución general de (9.58):

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$$

Así pues, llevando $y = y_1 + y_2$ a (9.57):

$$ay'' + by' + cy = a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = ay_1'' + by_1' + cy_1 + ay_2'' + by_2' + cy_2 = F(x)$$

La demostración de la segunda parte también es simple. Recuerda que se trata de demostrar que la familia $y = y_1 + y_2$ contiene una única función que es solución del problema (9.59). Lo que vamos a hacer es "fabricarnos" la solución $y(x)$ de (9.59) aprovechando que y_1 es la solución general de la EDO homogénea (9.58). Planteamos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 - y_2(x_0) \\ y'(x_0) &= m_0 - y_2'(x_0) \end{aligned} \tag{9.60}$$

Como $y_1(x, C_1, C_2)$ es solución general de (9.58), existen una única función que pertenece a esta familia y que es solución de (9.60). Vamos a llamar $u(x)$ a esta única solución. Entonces, la función $y = u + y_2$ es la solución de (9.59), ya que

$$y(x_0) = u(x_0) + y_2(x_0) = y_0 - y_2(x_0) + y_2(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = u'(x_0) + y_2'(x_0) = m_0 - y_2'(x_0) + y_2'(x_0) = m_0$$

Según el teorema 9.2, para encontrar la solución general de la EDO completa $ay'' + by' + cy = F(x)$, tenemos que:

1. Encontrar la solución general $y_1(x, C_1, C_2)$ de la EDO homogénea asociada $ay'' + by' + cy = 0$
2. Encontrar una solución particular cualquiera $y_2(x)$ de la EDO completa $ay'' + by' + cy = F(x)$.
3. La suma de ambas $y(x) = y_1(x, C_1, C_2) + y_2(x)$ es la solución general de la EDO completa.

9.5.2. ¿Cómo encontrar la solución general de la EDO homogénea?

Acabamos de ver que la familia biparamétrica

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

es solución general de la EDO homogénea

$$y'' - y = 0$$

Observa cómo se ha formado la solución general en este ejemplo: es una combinación lineal de las funciones exponenciales $u = e^x$, $v = e^{-x}$. ¿Será siempre así? Esto es, la solución general $y(x, C_1, C_2)$ de la EDO homogénea

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{9.61}$$

¿se podrá escribir como combinación lineal de exponenciales?:

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 e^{px} + C_2 e^{qx}$$

Vamos a estudiarlo. La idea es proponer como solución de (9.61) la función $y = e^{mx}$, y encontrar qué valores debe tener el parámetro m .

$$y = e^{mx}$$

$$y' = me^{mx}$$

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

$$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \Leftrightarrow am^2 + bm + c = 0$$

Así pues, parece que basta con encontrar las dos raíces m_1 y m_2 de la ecuación (llamada ecuación característica):

$$am^2 + bm + c = 0$$

y entonces la solución general de (9.61) parece ser

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \tag{9.62}$$

Ejercicio 9.19 Demuestra que si m_1, m_2 son las dos raíces reales y distintas de la ecuación característica

$$am^2 + bm + c = 0$$

entonces la familia (9.62) es la solución general de la EDO (9.61).

Ejercicio 9.20 Calcula la solución general de la EDO del ejemplo 9.3, $y'' - y = x^2$.

Sin embargo, hay problemas. ¿Qué pasa si $m_1 = m_2$? ¿Y si ambas raíces son complejas? Si $m_1 = m_2 = m$, la familia (9.62) tiene un único parámetro C , de modo que no puede ser solución general de (9.61):

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 e^{mx} = e^{mx}(C_1 + C_2) = C e^{mx}$$

En siguiente ejercicio nos da la respuesta

Ejercicio 9.21 *Demostrar el siguiente resultado: si las dos raíces de la ecuación característica son $m_1 = m_2 = m$, entonces la solución general de (9.61) es*

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

La otra situación posible es que las raíces de la ecuación característica sean complejas conjugadas, $m = p \pm iq$. En este caso, la familia (9.62) quedará:

$$y = C_1 e^{(p+iq)x} + C_2 e^{(p-iq)x} = e^{px} ((C_1 + C_2) \cos qx + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen} qx)$$

Para que esta familia esté formada por funciones reales, basta hacer que $K_1 = C_1 + C_2$, $K_2 = i(C_1 - C_2)$ sean valores reales, de modo que la familia candidata a solución general será:

$$y = e^{px} (K_1 \cos qx + K_2 \operatorname{sen} qx)$$

O, cambiando la notación:

$$y = e^{px} (C_1 \cos qx + C_2 \operatorname{sen} qx) \quad (9.63)$$

Ejercicio 9.22 *Demostrar el siguiente resultado: si las dos raíces de la ecuación característica son $m = p \pm iq$, entonces la solución general de (9.61) es la familia (9.63).*

9.5.3. ¿Cómo encontrar una solución particular de la EDO completa?

Método de los coeficientes indeterminados

Veamos ahora cómo encontrar una solución particular cualquiera de la EDO completa

$$ay'' + by' + cy = F(x) \quad (9.64)$$

Tomemos de nuevo la solución general de la EDO del ejemplo 9.3:

$$y'' - y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 2$$

Antes demostramos que la función $y_2 = -x^2 - 2$ es una solución particular. Observa que esta función y_2 es muy parecida a la función que aparece como término independiente en la EDO ($F(x) = x^2$ en este caso). La función y_2 tiene la forma $y_2 = Ax^2 + Bx + C$, donde $A = -1$, $B = 0$ y $C = -2$. Pues bien, de aquí surge la idea: para buscar una solución particular de la EDO (9.64), proponemos una solución y_2 que tenga la misma forma que $F(x)$, con algunos coeficientes A , B , C , D , etc que deberemos determinar (de ahí le viene el nombre a este método). Por ejemplo:

Si $F(x) = 3e^{4x}$, propondremos como solución $y_2 = Ae^{4x}$

Si $F(x) = 4x^3 - x + 4$, propondremos como solución $y_2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Si $F(x) = -4 \operatorname{sen}(3x)$, propondremos como solución $y_2 = A \operatorname{sen}(3x) + B \cos(3x)$.

Si $F(x) = 2e^{5x} \operatorname{sen}(2x)$, propondremos como solución $y_2 = e^{5x} (A \operatorname{sen}(2x) + B \cos(2x))$.

Ejercicio 9.23 Para la EDO del ejemplo 9.3, propón una solución particular de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$ y demuestra que se obtiene la solución $y = -x^2 - 2$.

Ejercicio 9.24 Encuentra la solución general de la EDO: $y'' - y = e^x$.

Vamos a ver qué tal funciona este método. Vamos a encontrar una solución particular de la EDO

$$ay'' + by' + cy = e^{px} \quad (9.65)$$

donde p es una constante real. Proponemos como solución particular de (9.65) la función $y = Ae^{px}$:

$$\begin{aligned} y &= Ae^{px} \\ y' &= Ap e^{px} \\ y'' &= Ap^2 e^{px} \\ ay'' + by' + cy &= e^{px} \quad \Rightarrow \quad e^{px}(ap^2 + bp + c) = e^{px} \\ A &= \frac{1}{ap^2 + bp + c} \end{aligned}$$

Sin embargo, este valor de A no existe si

$$ap^2 + bp + c = 0$$

es decir, si p es raíz de la ecuación característica $am^2 + bm + c = 0$. Para resolver esta situación, la idea es probar esta otra solución, $y = Axe^{px}$:

$$\begin{aligned} y &= Ax e^{px} \\ y' &= Apx e^{px} + A e^{px} \\ y'' &= Ap^2 e^{px} + 2Ap e^{px} \\ Ax(ap^2 + bp + c) + A(2ap + b) &= 1 \\ A &= \frac{1}{2ap + b} \end{aligned}$$

Pero de nuevo el método nos falla si $2ap + b = 0$, es decir, si el valor p es raíz doble de la ecuación característica $am^2 + bm + c = 0$. La idea ahora es probar con la solución $y = Ax^2 e^{px}$. Demuestra como ejercicio que en este caso se obtiene $A = 1/2a$ (este valor de A está definido porque a no puede ser 0, ¿por qué?).

Pues bien, el modo de proceder es el mismo para las diferentes funciones $F(x)$ que aparezcan en el segundo miembro de la EDO (9.63). Observa la Tabla 1.

Tabla 1

$F(x)$	Raíz	Solución a probar
1	$\neq 0$	A
x^n	$\neq 0$	$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$
$e^{\alpha x}$	$\neq \alpha$	$Ae^{\alpha x}$
$x^n e^{\alpha x}$	$\neq \alpha$	$e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)$
$e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$	$\neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \operatorname{sen}(\beta x))$
$e^{\alpha x} \operatorname{cos}(\beta x)$	$\neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \operatorname{sen}(\beta x))$
$x^n e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$	$\neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[(A_0x^n + \dots + A_n) \cos(\beta x) + (B_0x^n + \dots + B_n) \operatorname{sen}(\beta x)]$
$x^n e^{\alpha x} \operatorname{cos}(\beta x)$	$\neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[(A_0x^n + \dots + A_n) \cos(\beta x) + (B_0x^n + \dots + B_n) \operatorname{sen}(\beta x)]$

En la primera columna aparecen algunos posibles términos $F(x)$ y en la tercera columna la solución a proponer. La regla de aplicación del método de los coeficientes indeterminados es la siguiente:

1. Localizamos en la primera columna nuestro término $F(x)$.
2. Determinamos las raíces m_1 y m_2 de la ecuación característica $am^2 + bm + c = 0$.
3. Determinamos si el valor de Raíz que aparece en la segunda columna es raíz de la ecuación característica. Supongamos que k es la multiplicidad de esta raíz (k puede ser 0, 1 ó 2).
4. Proponemos como solución particular de la EDO la función que aparece en la tercera columna, pero multiplicada por x^k (es decir, multiplicaremos por 1, x o x^2).
5. Si $F(x)$ consta de varios sumandos, la solución a probar será la suma de las correspondientes funciones.

Ejercicio 9.25 *Calcula la solución general de las siguientes EDO:*

1. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{5x}$
3. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$
4. $y'' - 2y' + 10y = 2e^{3x} + e^x \cos(2x)$
5. $y'' + y' = x^4$

Método de los operadores

El método de los coeficientes indeterminados es sencillo de aplicar, pero tiene una importante limitación: sólo puede utilizarse en el caso de que el término independiente $F(x)$ de la EDO sea del tipo que aparece en la primera columna de la Tabla 1. No puede aplicarse, por

ejemplo, si $F(x) = \ln(x)$, $F(x) = 1/x$ o $F(x) = x^{1/2}$. En este apartado vamos a desarrollar un método alternativo para obtener una solución particular de la EDO completa:

$$y'' + by' + cy = F(x) \quad (9.66)$$

que puede aplicarse, en principio, a una clase más amplia de funciones $F(x)$, pero que también tiene sus limitaciones. Observa que en (9.66) hemos supuesto que $a=1$, lo cual no supone limitación alguna, ya que si $a \neq 1$, podemos dividir la EDO entre a .

Vamos a empezar suponiendo que la ecuación característica de (9.66) tiene sus dos raíces m_1 y m_2 reales. Esta es una limitación que tiene el método de los operadores. Operando:

$$m_2 + bm + c = 0 \quad (m - m_1)(m - m_2) = 0 \quad m_2 - (m_1 + m_2)m + m_1m_2 = 0$$

Así pues, los coeficientes b y c de la EDO (9.66) se pueden escribir en función de las raíces m_1 y m_2 :

$$y'' - (m_1 + m_2)y' + m_1m_2y = F(x) \quad (9.67)$$

Ahora viene la parte más artificiosa. Vamos a escribir el término izquierdo de (9.67) del modo siguiente:

$$(y' - m_1y)' - m_2(y' - m_1y) = F(x) \quad (9.68)$$

No es fácil de ver a dónde nos lleva ese modo extraño de escribir (9.67), pero lo que sí es fácil es comprobar que (9.67) y (9.68) son lo mismo:

$$(y' - m_1y)' - m_2(y' - m_1y) = y'' - m_1y' - m_2y' + m_1m_2y = y'' - (m_1 + m_2)y' + m_1m_2y$$

Ahora vamos a analizar qué significa la parte izquierda de (9.68). Primero se coge la función $y(x)$, se deriva y se resta $m_1y(x)$. Es decir, se obtiene la nueva función $y' - m_1y$. Luego, se aplica exactamente la misma operación a $y' - m_1y$ pero con el valor m_2 en vez de con m_1 . Es decir, se toma $y' - m_1y$, se deriva y se le resta $m_2(y' - m_1y)$.

Así pues, el lado izquierdo de (9.68) es el resultado de aplicar dos veces la misma operación "derivar la función y restarle la propia función multiplicada por una constante". Vamos a representar simbólicamente esta operación del modo siguiente. Si $u(x)$ es una función derivable cualquiera y p es una constante, denotamos:

$$(D - p)u(x) = u'(x) - pu(x) \quad (9.69)$$

Ten en cuenta que en (9.69), el símbolo $(D - p)u(x)$ indica un operador que se aplica a la función $u(x)$, no se trata de un producto de números ni de funciones. Por ejemplo:

$$(D - 3)(e^x + x^5) = (e^x + x^5)' - 3(e^x + x^5) = -2e^x - 3x^5 + 5x^4$$

$$(D + 1)(\text{sen } x) = (\text{sen } x)' + \text{sen } x = \cos x + \text{sen } x$$

En el siguiente ejemplo aplicamos dos veces el operador:

$$\begin{aligned}(D-2)[(D-4)(e^x - x^3)] &= (D-2)[-3e^x + 4x^3 - 3x^2] = \\ &= (-3e^x + 4x^3 - 3x^2)' - 2(-3e^x + 4x^3 - 3x^2) = 3e^x - 8x^3 + 16x^2 - 6x\end{aligned}$$

Además, es fácil demostrar (hazlo como ejercicio) que el operador es conmutativo, es decir:

$$(D-p)[(D-q)u(x)] = (D-q)[(D-p)u(x)]$$

Así pues, la expresión $(D-p)(D-q)u(x)$ no es ambigua. Consiste en aplicar dos veces el operador, y no hacen falta corchetes para especificar en qué orden se aplican porque la función resultante es la misma.

Ahora vamos a escribir (9.68) mediante operadores:

$$(D-m_1)(D-m_2)y = F(x) \tag{9.70}$$

Lo que se trata es de determinar una función $y(x)$ cualquiera que verifique (9.70). Es decir, se trata de despejar $y(x)$ de (9.70). Naturalmente, si tenemos que despejar $y(x)$ de la expresión $Ay(x) = F(x)$, donde A es un número real, simplemente dividiremos entre A , $y(x) = F(x)/A$. Sin embargo, el término izquierdo de (9.70) NO es un producto de números, sino la doble aplicación de un operador. En otras palabras, no sabemos cómo dividir entre $(D-p)$. Si supiéramos hacer esta división, podríamos despejar fácilmente $y(x)$ en (9.70) aplicándola dos veces:

$$(D-m_2)y = \frac{1}{D-m_1}F(x) = H(x) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{D-m_2}H(x) = G(x)$$

Así pues, nuestra pregunta es ¿cómo se hace la operación $v(x)/(D-p)$, siendo $v(x)$ una función? En otras palabras, dada una función $v(x)$, se trata de saber cómo despejar $u(x)$ de la expresión:

$$(D-p)u(x) = v(x) \tag{9.71}$$

Vamos a desarrollar el término izquierdo de (9.70):

$$u'(x) - u(x)p = v(x) \tag{9.72}$$

Pero resulta que (9.72) es una simple EDO lineal de orden 1, que podemos resolver mediante la aplicación de la fórmula que vimos en el apartado 9.3.5:

$$u(x) = e^{px} \left(C + \int v(x)e^{-px} dx \right) \tag{9.73}$$

Ya que necesitamos sólo una solución, tomamos $c = 0$ en (9.73):

$$u(x) = e^{px} \int v(x)e^{-px} dx$$

Así pues, ya tenemos el modo de calcular la función resultante de aplicar tanto el operador $(D - p)$ como el inverso $1/(D - p) = (D - p) - 1$ a cierta función:

$$\begin{aligned}(D - p)u(x) &= u'(x) - pu(x) \\ \frac{1}{D - p}v(x) &= e^{px} \int v(x) e^{-px} dx\end{aligned}\tag{9.74}$$

Ejercicio 9.26 Si aplicamos el operador $(D - p)$ a una función $u(x)$ y a la función resultante le aplicamos el inverso $(D - p)^{-1}$, evidentemente el resultado debe ser la propia función $u(x)$. Empleando (9.74) verifica este resultado, es decir:

$$(D - p) \frac{1}{D - p} u(x) = \frac{1}{D - p} (D - p)u(x) = u(x)$$

Ejercicio 9.27 Emplea el método de los operadores para encontrar la solución general de las siguientes EDO.

1. $y'' + y' = x^4$
2. $y'' - 3y' + 2y = -e^{2x}$

9.5.4. Diversas aplicaciones

Movimiento armónico

Ya hemos explicado que una EDO de la forma

$$ay'' + by' + cy = F(t)$$

puede servir como modelo matemático para fenómenos físicos de naturaleza muy diversa. Muchos de estos fenómenos están relacionados con movimientos vibratorios mecánicos o eléctricos. En esta apartado aplicaremos todo lo que hemos aprendido acerca de la resolución de EDO lineales de orden 2 para resolver la ecuación que modeliza el movimiento de una masa que cuelga de un muelle y que está sometida a una fuerza $F(t)$, de la que ya hablamos en el ejemplo 9.2.

Observa la Figura 9.24(a), que representa el muelle sobre el que cuelga en equilibrio un cuerpo de masa m . A continuación tiramos hacia abajo del cuerpo, hasta alargar el muelle cierta distancia igual a d (Figura 2(b)) y lo sometemos a cierta fuerza variable $F(t)$. Nos interesa especialmente estudiar la oscilación si la fuerza es la función $F(t) = F_0 \text{sen}(wt)$, que aparece representada en la Figura 9.25. Se trata de una función periódica de periodo $T = 2\pi/w$, frecuencia $1/T = w/(2\pi)$ y amplitud F_0 .

En estas condiciones, un modelo que sirve para estudiar las oscilaciones del sólido viene dado por la EDO

$$my'' + \beta y' + ky = F_0 \text{sen } wt\tag{9.75}$$

donde:

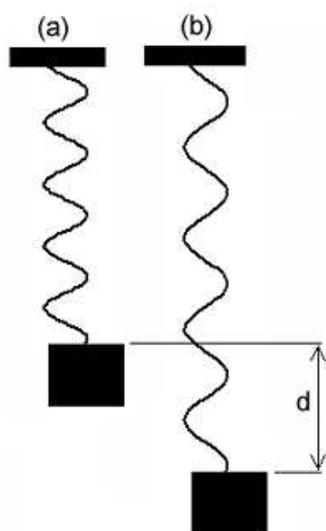


Figura 9.24: Muelle

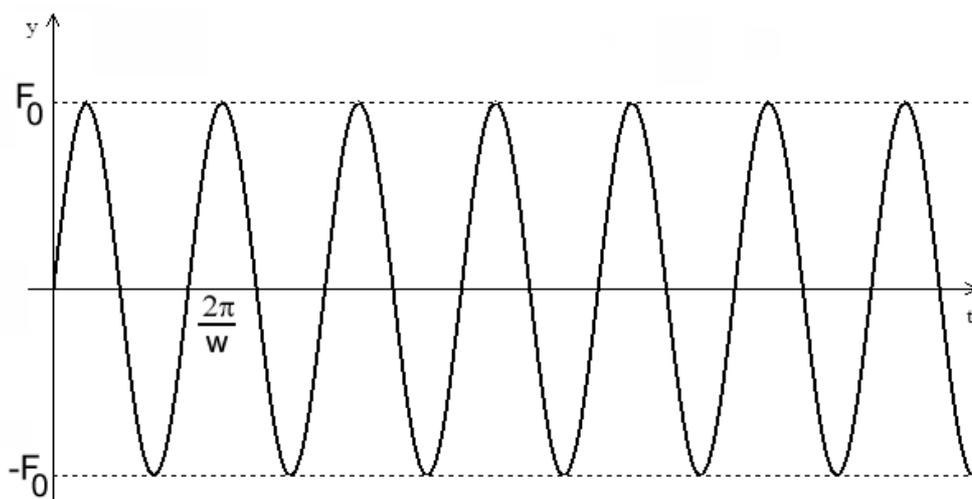


Figura 9.25: Fuerza senoidal

$y(t)$ =posición del sólido en el instante t

m =masa del sólido

β =una constante llamada constante de amortiguación (por ejemplo, el medio físico en el que oscila el cuerpo podría ser aire, agua o algún aceite en el que estuviera sumergido el muelle para disipar el calor, lo cual nos daría diferentes valores de β).

k =constante que depende de las características del muelle

Veamos cómo oscila la masa dependiendo de las características físicas del sistema (valores de m , β y k). Según lo que hemos aprendido, se trata de encontrar la solución general $y_1(t, C_1, C_2)$ de la EDO homogénea asociada a (9.75):

$$my'' + \beta y' + ky = 0 \quad (9.76)$$

y una solución particular $y_2(t)$ de la EDO completa (9.75).

Vamos a empezar por la solución general de (9.76). Observa que la EDO (9.76) modeliza la oscilación del muelle para el caso particular en el que la fuerza que se aplica es nula. Lógicamente, podemos esperar que la amplitud de la oscilación y_1 tienda hacia 0 cuando t tiende a infinito.

Primero calculamos las raíces r_1 y r_2 de su ecuación característica:

$$r_i = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mk}}{2m} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \frac{k}{m}} \quad \left(\lambda = \frac{\beta}{2m} \right)$$

Ahora, dependiendo del signo de $\lambda^2 - k/m$, construiremos la solución general.

- Caso I: $\lambda^2 - k/m > 0$:

La solución general será:

$$y_1 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Como $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$ (¿por qué?), cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene $y_1 \rightarrow 0$. La condición $\lambda^2 - k/m > 0$ indica que $\beta^2 > 4mk$, es decir, que el coeficiente de amortiguación β es grande comparado con la constante k del muelle, por eso este tipo de movimiento se llama **sobreamortiguado**. Se trata de un movimiento no oscilatorio, y el desplazamiento de la masa es insignificante una vez que ha transcurrido un largo período de tiempo. La Figura 9.26 muestra dos posibles gráficas de y_1 .

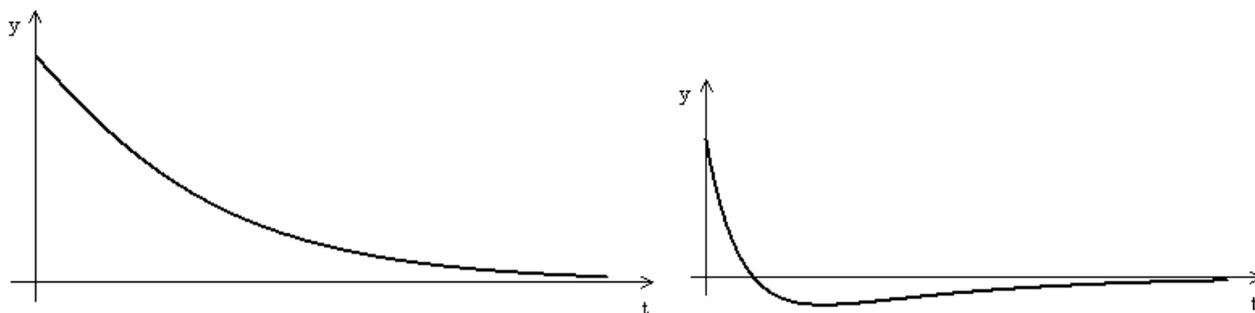


Figura 9.26: Caso I

- Caso II: $\lambda^2 - k/m = 0$:

La solución general será:

$$y_1 = C_1 e^{-\lambda t} + C_2 t e^{-\lambda t}$$

Como $\lambda > 0$ (¿por qué?), en este caso también se tiene $y_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. La Figura 9.27 muestra una gráfica de y_1 típica. Esta situación se llama **amortiguamiento crítico**, porque una pequeña disminución en el coeficiente de amortiguación (β), hace que el movimiento sea oscilante (ver el caso III).

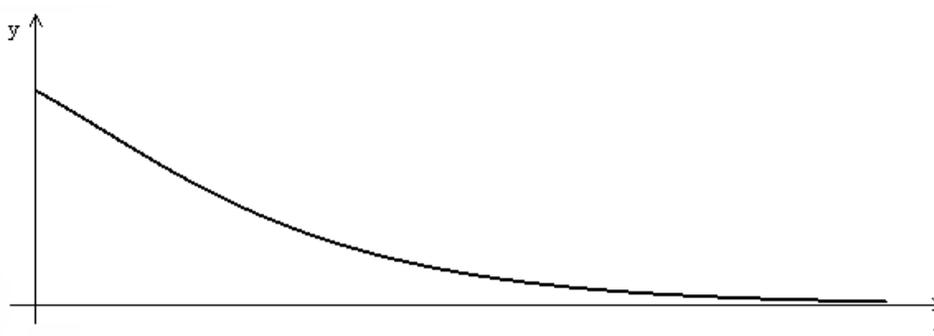


Figura 9.27: Caso II

- Caso III: $\lambda^2 - k/m < 0$:

La solución general será:

$$y_1 = e^{-\lambda t} \left(C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m} - \lambda^2} \cdot t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m} - \lambda^2} \cdot t \right)$$

La condición $\lambda^2 - k/m < 0$ indica que $\beta^2 < 4mk$, es decir, que el coeficiente de amortiguación β es pequeño comparado con la constante k del muelle, por eso este tipo de movimiento se llama **subamortiguado**. Se trata de un movimiento oscilatorio, pero las amplitudes de la oscilación tienden a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. La Figura 9.28 una gráfica típica de y_1 .

Ejercicio 9.28 Como hemos podido comprobar, el tipo de movimiento depende del signo de la expresión $\beta^2 - 4mk$. Observa la Figura 9.29. Hemos representado la gráfica $\beta^2 = 4mk$ para diversos valores crecientes de m .

1. Supongamos que el movimiento es sobreamortiguado. Si cambiamos uno de los parámetros β , m o k , ¿cambiará el tipo de movimiento? ¿Cómo?

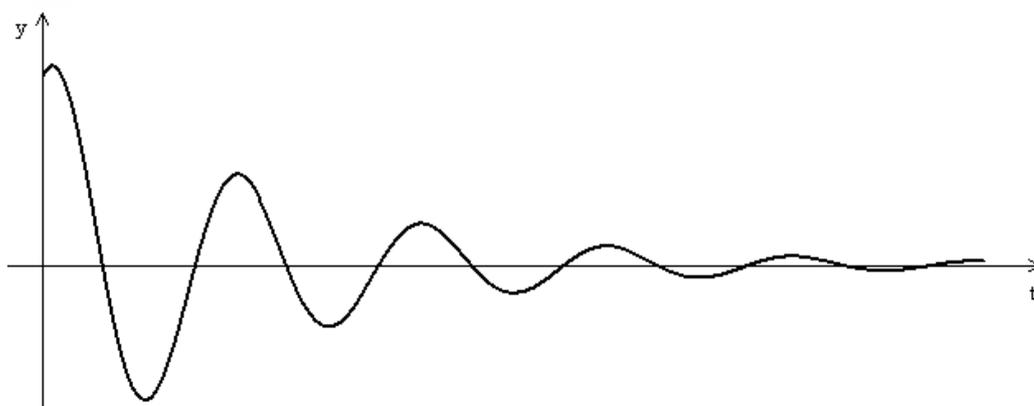


Figura 9.28: Caso III

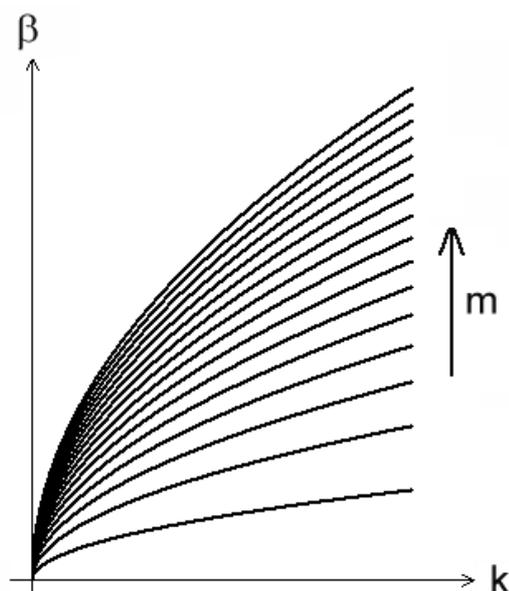


Figura 9.29: Cambio de movimiento

2. La misma pregunta, pero si el movimiento es críticamente amortiguado.

3. La misma pregunta, pero si el movimiento es subamortiguado.

Ejercicio 9.29 En cada uno de los tres tipos de movimiento, interpretar el significado de las constantes C_1 y C_2 .

Una vez que tenemos la solución general de (9.76), vamos a encontrar una solución particular de la EDO completa (9.75) mediante el método de los coeficientes indeterminados.

En este caso el término independiente es $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(wt)$, que se encuentra en la Tabla 1. La raíz será $0 + iw$, que no puede ser raíz de la ecuación característica (¿por qué?). Así pues, la solución particular de (9.75) a proponer será:

$$y = A \cos(wt) + B \operatorname{sen}(wt) \quad (9.77)$$

Derivando (9.77):

$$y' = -Aw \operatorname{sen}(wt) + Bw \cos(wt)$$

$$y'' = -Aw^2 \cos(wt) - Bw^2 \operatorname{sen}(wt)$$

Sustituyendo en (9.75) y ordenando:

$$\operatorname{sen} wt(-Bmw^2 - A\beta w + kB) + \cos wt(-Amw^2 + B\beta w + kA) = F_0 \operatorname{sen} wt$$

$$\begin{cases} A(k - mw^2) + B\beta w = 0 \\ -A\beta w + B(k - mw^2) = F_0 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \beta w \\ F_0 & k - mw^2 \end{vmatrix}}{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2} = \frac{-F_0 \beta w}{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2} \quad (9.78)$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} k - mw^2 & 0 \\ -\beta w & F_0 \end{vmatrix}}{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2} = \frac{F_0(k - mw^2)}{(k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2}$$

Así pues, la solución general de (9.75) será:

$$y = y_1 + A \cos(wt) + B \operatorname{sen}(wt) \quad (9.79)$$

donde y_1 es la solución general de la EDO homogénea (que ya hemos obtenido) y los valores de A y B se obtienen mediante las relaciones (9.78). Pero recuerda que $y_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por eso se llama **término transitorio** a y_1 : tras cierto período de tiempo, este término prácticamente no influye en la función $y(t)$. En cambio, el término $A \cos(wt) + B \operatorname{sen}(wt)$ de (9.79) se llama **término estacionario**, porque representa con gran aproximación el movimiento oscilatorio que seguirá la masa después de un largo período de tiempo. En resumen, tras un largo período de tiempo, se puede considerar que la oscilación de la masa es:

$$y = A \cos(wt) + B \operatorname{sen}(wt) \quad (9.80)$$

Así pues, la oscilación de la masa es periódica y tiene el mismo periodo que la fuerza aplicada ($2\pi/w$). Ahora bien, ¿cuál es la amplitud de estas oscilaciones? Veamos cómo calcular la amplitud de la función (9.80).

La idea es expresar (9.80) en términos de una función coseno, así:

$$y = M \cos(\omega t + \theta) \quad (9.81)$$

tras lo cual, la amplitud de (9.80) será el valor M que hayamos obtenido. Veamos pues cómo transformar (9.80) en la expresión (9.81). Primero observamos que los coeficientes A y B se pueden interpretar como las partes real e imaginaria del número complejo $A + iB$ (ver Figura 9.30):

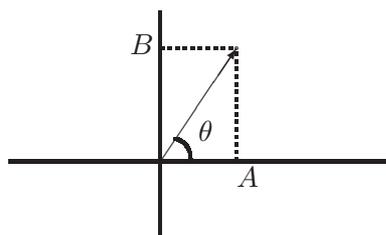


Figura 9.30: Complejo $A + iB$

de donde:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A}$$

Ahora, de la ecuación (9.80) obtenemos

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \operatorname{sen}(\omega t) \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \theta \cos \omega t + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \theta) \end{aligned}$$

Ésta última igualdad se obtiene de la igualdad trigonométrica $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$. Así pues, la amplitud M de la función (9.80) es igual al módulo del número complejo $A + iB$:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\sqrt{F_0^2 \beta^2 \omega^2 + F_0^2 (k - m\omega^2)^2}}{(k - m\omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} = F_0 \frac{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}}{(k - m\omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} = \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} \quad (9.82) \end{aligned}$$

El resultado (9.82) es interesante. Nos indica que la amplitud oscilación resultante es igual a la amplitud de la fuerza que se aplica (F_0) multiplicada por el factor de amplificación

$$\frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} \quad (9.83)$$

El coeficiente (9.83) depende de las características físicas del muelle (k y β), de la masa (m) y de la frecuencia de la fuerza aplicada ($\omega/(2\pi)$). Cuanto mayor sea ese factor de amplificación (9.83), mayor será la amplitud de la oscilación resultante.

Resonancia

Vamos a estudiar un poco más el coeficiente (9.83). La amplificación resultante depende de las características físicas del sistema: amortiguación del medio (β), elasticidad del muelle (k) y masa (m). Pero observa que también depende de w . Eso significa que dependiendo de la frecuencia de la fuerza $F(t) = F_0 \text{sen}(wt)$ que apliquemos, se obtendrá una amplitud de oscilación diferente. Y eso significa que quizá existan valores de w que den lugar a oscilaciones enormes, tal vez destructivas. Piensa en otros sistemas sujetos a vibraciones provocadas por partes mecánicas en movimiento, ruedas, motores. Quizá un motor aplica una fuerza periódica $F(t) = F_0 \text{sen}(wt)$ que, aunque sea de pequeña magnitud (es decir, con F_0 pequeño), da lugar a una gran vibración porque el factor (9.83) es muy grande.

Así pues, nos interesa conocer qué valor o valores de w hacen que (9.83) sea grande. El valor de (9.83) es máximo cuando $h(w) = (k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2$ es mínimo. Pero ya sabemos cómo encontrar el mínimo de $h(w)$:

$$h(w) = (k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2$$

$$h'(w) = -4mw(k - mw^2) + 2\beta^2 w$$

Ahora igualamos $h'(w)$ a cero y simplificamos w , ya que debe ser distinto de 0 (¿por qué?):

$$h'(w) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2m(k - mw^2) = \beta^2$$

$$k - mw^2 = \frac{\beta^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad w = \pm \sqrt{\frac{1}{m} \left(k - \frac{\beta^2}{2m} \right)}$$

Estudiaremos el valor positivo de la raíz, porque el negativo representa un simple cambio de signo de $F(t)$. Denotamos por w_0 a este punto donde hay un posible mínimo local.

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \left(k - \frac{\beta^2}{2m} \right)} \tag{9.84}$$

Observa que w_0 es un valor real si

$$k - \frac{\beta^2}{2m} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2mk > \beta^2 \tag{9.85}$$

Veamos si en w_0 existe un mínimo local:

$$\begin{aligned} h''(w_0) &= 2(\beta^2 - 2mk + 2m^2 w^2 + 4m \cdot 2w^2) = 2(\beta^2 - 2mk + 6m^2 w^2) = \\ &= 2(\beta^2 - 2mk + 6m^2 \left(\frac{1}{m} \left(k - \frac{\beta^2}{2m} \right) \right)) = 2(\beta^2 - 2mk + 6mk - 3\beta^2) = \\ &= 2(4mk - 2\beta^2) = 4(2mk - \beta^2) \end{aligned}$$

La condición que debe cumplirse para que en w_0 exista un mínimo es $2mk - \beta^2 > 0$, que es exactamente la condición (9.85).

El valor de w_0 de (9.84) depende de las características del sistema (β , k y m). Y es un valor importante. Significa que si aplicamos al sistema oscilatorio una fuerza periódica $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(wt)$ con un valor de w próximo a w_0 , el sistema oscila con amplitud de oscilación que puede ser muy grande. Esta frecuencia característica es igual a $w_0/2\pi$, y se llama **frecuencia de resonancia**. Máquinas, automóviles, barcos y aviones, son sistemas mecánicos vibrantes, que tienen su propia frecuencia de resonancia característica. Si se producen vibraciones con una frecuencia próxima a la frecuencia de resonancia, el sistema puede quedar destruido. Los puentes son buenos ejemplos de sistemas mecánicos que vibran como consecuencia del paso de personas o vehículos, del viento o del agua del río que choca contra sus cimientos. Es muy conocido el ejemplo del puente de Tacoma (Washington), que en 1940 quedó destruido porque la brisa que lo atravesaba se arremolinaba ejerciendo una fuerza periódica, produciendo una oscilación próxima a la de resonancia del sistema.

La Tabla 2 muestra algunos ejemplos de cálculo de la frecuencia de resonancia del sistema oscilante, a partir de los valores de β , k y m . También aparece w_0 , la frecuencia de resonancia y el factor de amplificación. La Figura 9.31 representa la gráfica de $h(w) = (k - mw^2)^2 + \beta^2 w^2$ correspondiente al primer ejemplo de la Tabla 2. Observa en ese primer ejemplo que si excitamos el sistema con cierta fuerza $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(0.00897t)$, cuya frecuencia es justamente la frecuencia de resonancia del sistema, la masa oscilará con una amplitud igual a 28 veces F_0 . Hemos representado en la Figura 9.32 una posible función con que se excita el sistema (fuerza), $F(t) = 25 \operatorname{sen}(0.00897t)$, cuyo periodo es $T = 2\pi/w_0 = 2\pi/0.00897 = 700.52477$ y frecuencia $1/T = 175.1312$. La gráfica de la oscilación resultante es:

$$y = A \operatorname{sen}(wt) + B \operatorname{sen}(wt) = -662.38837 \cos(0.00897t) + 230.906894 \operatorname{sen}(0.00897t)$$

Los coeficientes A y B se han obtenido de las relaciones (9.78). La amplitud de la fuerza de entrada es de 25 mientras que la amplitud de la oscilación resultante es 28 veces la de la entrada, es decir, 700.

Tabla 2

β	k	m	w_0	Frecuencia de resonancia ($w_0/2\pi$)	Factor de amplificación (81) obtenido en resonancia
3.752	0.06	600	0.00897	0.01409	28
3.752	0.033	600	0.00595	0.00935	40
0.35	0.033	1500	0.00469	0.00736	609
0.01	0.033	3000	0.00332	0.00521	30151

Fíjate en lo que ocurre si la masa aumenta, como en los dos últimos ejemplos de la Tabla 2. En el último ejemplo, el coeficiente de amortiguación es muy pequeño (0.01), el sistema está poco amortiguado, y la masa es muy grande (3000). El resultado es que la amplitud de la oscilación resultante es ¡más de 30000 veces la amplitud de entrada!. ¿Imaginas lo que le puede ocurrir a un sistema mecánico deficientemente amortiguado, al que excitamos

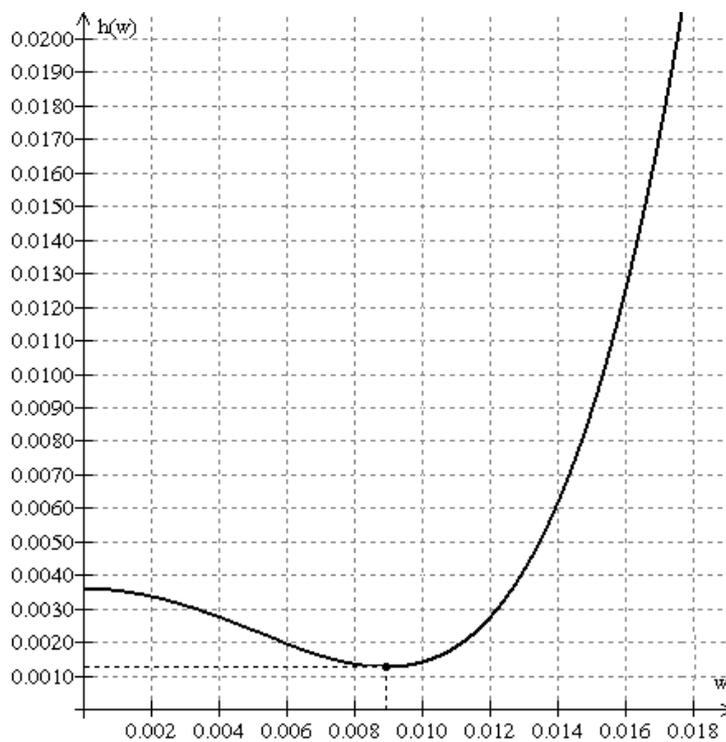


Figura 9.31: Ejemplo de $h(w)$

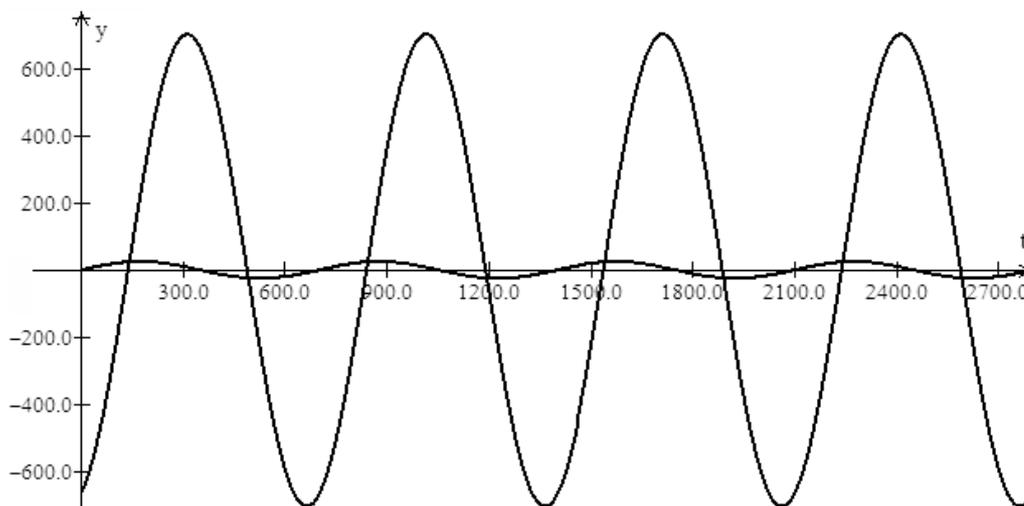


Figura 9.32: Factor de amplificación

con una fuerza cuya frecuencia sea próxima o igual a la de la resonancia? Pues le ocurrirá lo que le ocurrió al puente de Tacoma. Una solución técnica consiste en amortiguar mejor el sistema (conseguir β grande) y calcular la estructura de tal modo que su frecuencia de resonancia no pueda alcanzarse mediante las excitaciones a las que se supone que estará sometida normalmente. Volveremos a hablar de la resonancia en el tema 11.

Ejercicio 9.30 *Supongamos que estamos probando diversos sistemas de amortiguación del resorte, y que experimentalmente hemos medido la amplitud máxima de la oscilación que se produce para ciertos valores de m, k, F_0 y w . ¿Cuál será el factor de amortiguación β ? Aplicar el resultado a los siguientes parámetros: $m = 35 \text{ Kg}$, $k = 2500 \text{ Kg/m}$, $F_0 = 600$, $w = 6$, amplitud máxima de oscilación = 0.472. Calcular en este caso la amplitud máxima de oscilación en resonancia.*

Oscilación en circuitos eléctricos

Ya hemos explicado cómo una misma ecuación diferencial lineal de orden 2 puede modelizar dos fenómenos físicos completamente diferentes: las oscilaciones de un muelle y las de la intensidad que circula por un circuito RLC (ver Figura 9.2). La EDO que describe la oscilación $y(t)$ de un muelle sometido a una fuerza $F(t) = F_0 \text{ sen } wt$ es

$$my'' + \beta y' + ky = F(t) = F_0 \text{ sen } wt$$

Mientras que la EDO que describe la carga $q(t)$ del condensador en un circuito RLC al que se aplica una tensión $E(t) = E_0 \text{ sen } wt$ Voltios es:

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E_0 \text{ sen } wt \quad (9.86)$$

L =Valor de la inductancia (en Henrios)

R =Valor de la resistencia (en Ohmios)

C =Valor de la capacidad (en Faradios)

La Tabla 3 muestra la equivalencia que existe entre los parámetros mecánicos y eléctricos que aparecen en ambos modelos.

Tabla 3

Modelo mecánico	Modelo eléctrico
Masa m	Inductancia L
Constante de amortiguación β	Resistencia R
Constante del resorte k	Inverso de la capacidad $1/C$
Fuerza impulsora $F(t) = F_0 \text{ sen } wt$	Tensión de entrada $E(t) = E_0 \text{ sen } wt$
Desplazamiento del muelle $y(t)$	Carga $q(t)$ del condensador

La equivalencia entre ambos sistemas muestra que para un sistema mecánico dado se puede construir un modelo de circuito eléctrico cuya corriente $I(t)$ dará los valores de desplazamiento $y(t)$ en el sistema mecánico. Esto tiene una gran importancia práctica porque los circuitos eléctricos son sencillos de montar y es fácil medir las intensidades que circulan por ellos mediante un simple polímetro, mientras que los sistemas mecánicos son complicados y caros, y no resulta sencillo medir los desplazamientos en ellos. Además, en un sistema mecánico no es fácil aplicar fuerzas periódicas $F(t) = F_0 \text{sen } \omega t$ que tengan exactamente la amplitud y la frecuencia deseada. Por el contrario, para trabajar con circuitos eléctricos existen generadores de señales capaces de inyectar al circuito tensiones de cualquier frecuencia.

Ejemplo 9.4 *Estamos pensando en diseñar un sistema vibrante formado por un resorte del que pende una masa, a la que aplicamos una fuerza $F(t) = 350 \text{sen } \omega_0 t$. Nos interesa estudiar la oscilación del muelle bajo resonancia. Los parámetros del sistema son: $m = 15 \text{ Kg}$, $k = 5000 \text{ Kg/m}$, $\beta = 50$. La EDO que describe la posición $y(t)$ de la masa es:*

$$15y'' + 50y' + 5000y = 350 \text{sen } \omega t$$

Ahora podemos aplicar los resultados anteriores y comprobar que:

$$\omega_0 = 18.105$$

$$y(t) = -0.383 \cos(18.105t) + 0.035 \text{sen}(18.105t)$$

$$\text{Frecuencia de resonancia} = \omega_0/(2\pi) = 2.881 \text{ Hz}$$

$$\text{Amplitud máxima de la oscilación en resonancia} = 0.385 \text{ m}$$

La Figura 9.33 muestra la gráfica de $y(t)$.

Ahora nos interesará construir un prototipo del sistema mecánico para hacer ensayos. Sin embargo, este sistema mecánico no es fácil de construir ni de experimentar con él, de modo que podemos optar por construir un modelo eléctrico equivalente. En este caso, la equivalencia de unidades será: $L = 15$ Henrios, $R = 50$ Ohmios, $C = 1/5000 = 0.0002$ Faradios, $E(t) = 350 \text{sen}(18.105t)$ Voltios. La EDO del modelo será:

$$15q'' + 50q' + 5000q = 350 \text{sen } \omega t$$

Ahora bien, no es mucho más manejable trabajar con inductancias y tensiones más pequeñas, de modo que aplicamos el factor de escala $1/25$ a la EDO anterior, resultando:

$$0.6q'' + 2q' + 200q = 14 \text{sen } \omega t$$

Así pues, podemos montar nuestro prototipo de circuito con $L = 0.6 \text{ H}$, $R = 2 \Omega$, $C = 0.005 \text{ F} = 5 \text{ mF}$, aplicando una tensión $E(t) = 14 \text{sen}(18.105t)$. Los valores de $q(t)$ medidos en el circuito equivalen a los valores de desplazamiento $y(t)$ en el sistema mecánico equivalente.

La ecuación (9.86) es la ecuación de la carga del condensador. Pero en la mayor parte de los problemas prácticos con circuitos, la cantidad física que nos interesa no es $q(t)$ sino

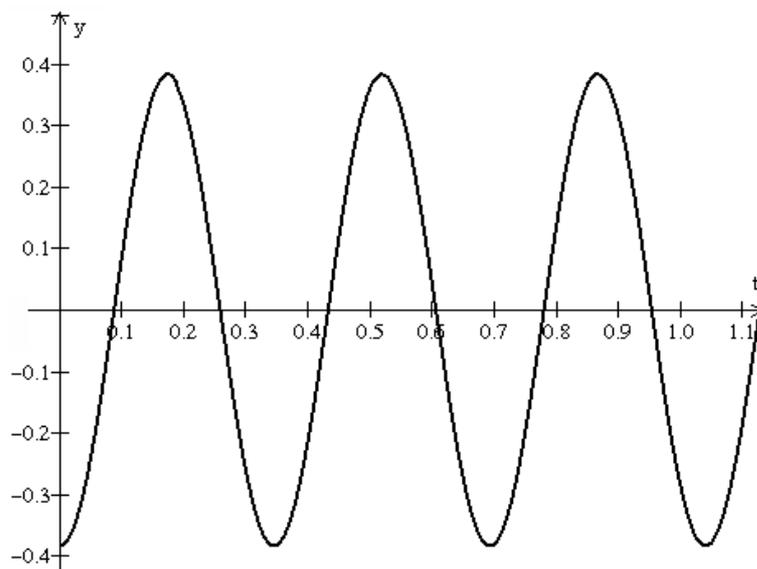


Figura 9.33: Oscilación de un muelle en resonancia

la intensidad $I(t)$ que circula por el circuito. Teniendo en cuenta que $q'(t) = I(t)$, derivando (85) se obtiene la ecuación diferencial de un circuito RLC al que se aplica una tensión $E(t) = E_0 \operatorname{sen} wt$ Voltios:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E_0 w \cos wt \quad (9.87)$$

donde:

Para encontrar la solución de la EDO (9.87), se procede exactamente igual que en el caso mecánico, y se obtiene que tras un largo período de tiempo se puede considerar que la intensidad $I(t)$ que circula por el circuito es:

$$I(t) = A \cos(wt) + B \operatorname{sen}(wt) \quad (9.88)$$

Ahora, para obtener los coeficientes A y B , sustituimos (9.88) en (9.87), lo cual da lugar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A \left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right) + BRw = E_0 w \\ -ARw + B \left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right) = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} E_0 - w & Rw \\ 0 & \frac{1}{C} - Lw^2 \end{vmatrix}}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2w^2} = \frac{E_0w - \left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2w^2} \quad (9.89)$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{C} - Lw^2 & E_0w \\ -Rw & 0 \end{vmatrix}}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2w^2} = \frac{Rw^2E_0}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2w^2}$$

Ahora, para calcular la amplitud de la función (9.88):

$$\begin{aligned} \sqrt{A^2 + B^2} &= \frac{\sqrt{E_0^2w^2 \left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2E_0^2w^4}}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2w^2} = \frac{E_0w\sqrt{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2w^2}}{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2w^2} = \\ &= \frac{E_0w}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - Lw^2\right)^2 + R^2w^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{wC} - Lw\right)^2 + R^2}} \quad (9.90) \end{aligned}$$

También calculamos el valor w_0 tal que la amplitud de la intensidad $I(t)$ que circula por el circuito es máxima, esto es, el valor que debe tener w para alcanzar la resonancia del circuito, que curiosamente no depende del valor de R :

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.91)$$

Ejercicio 9.31 Demuestra que el máximo de (9.90) tiene lugar cuando w toma el valor w_0 calculado según la expresión (9.91). Demuestra que en este caso el coeficiente A de la relación (9.89) es igual a 0. Calcula la expresión de la intensidad $I(t)$ en este caso.

Ejemplo 9.5 Vamos a considerar el circuito RLC dado por $R = 10 \Omega$, $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ mF} = 0.001 \text{ F}$, $E(t) = 0.6 \text{ sen } 4\pi t$. En este caso, la tensión de entrada tiene una amplitud de 0.6 V , una frecuencia de $4\pi/(2\pi) = 2 \text{ Hz}$ y un periodo $T = 0.5$ segundos. La Figura 9.34 muestra la gráfica de $E(t)$.

El modelo matemático que describe la intensidad $I(t)$ que circula es:

$$0.1I'' + 10I' + 10^3I = 7.536 \cos 4\pi t$$

Empleando las relaciones (9.89), la corriente en estado estacionario será:

$$I(t) = 0.0075 \cos(4t) + 0.001 \text{ sen}(4t)$$

y su amplitud :

$$\sqrt{(0.0075)^2 + (0.001)^2} = 0.0076 \text{ Amperios}$$

La Figura 9.35 muestra la gráfica de $I(t)$.

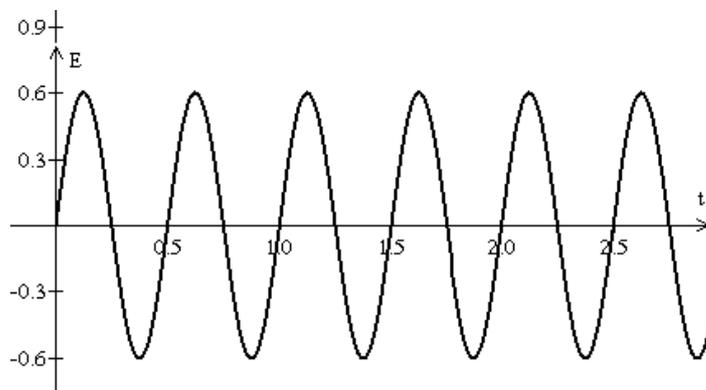


Figura 9.34: Tensión alterna

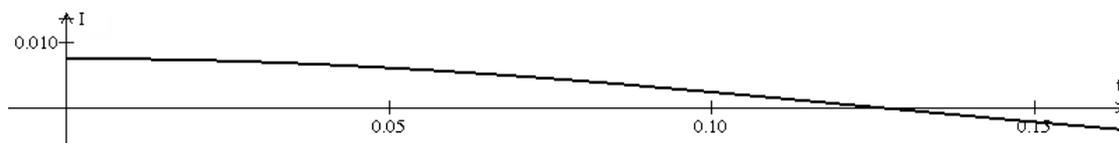


Figura 9.35: Intensidad en caso de no resonancia

Aplicando (9.91), la resonancia se alcanza con $\omega_0 = 100$. Vamos a introducir en el circuito una tensión de la misma amplitud (0.6 V) pero con la frecuencia de resonancia, $E(t) = 0.6 \text{ sen}(100t)$. Repitiendo los cálculos, la intensidad resultante será

$$I(t) = 0.06 \text{ sen}(100t)$$

y la amplitud 0.06, casi ocho veces mayor. La Figura 9.36 muestra las gráficas de ambas funciones $I(t)$. Observa el gran aumento de intensidad que se produce en resonancia.

Ejercicio 9.32 La frecuencia de resonancia de un circuito RLC tiene una importante aplicación para la sintonización de emisoras en los aparatos de radio. Observa la Figura 9.37.

La señal recibida por la antena del receptor llega al circuito RLC como una tensión que tiene cierta frecuencia $\omega/(2\pi)$, $E(t) = E_0 \text{ sen}(\omega t)$. Cuando se gira el mando del aparato, en realidad se está modificando el valor de C (o de L), de tal modo que el circuito entre en resonancia a esa frecuencia de entrada. Con ello se consigue una señal que tiene la misma frecuencia que la de entrada, pero amplificada.

1. Supongamos que el mando del aparato permite modificar el valor de C . ¿Para qué valor de C se obtiene resonancia del circuito?
2. Supongamos que el mando del aparato permite modificar el valor de L . ¿Para qué valor de L se obtiene resonancia del circuito?

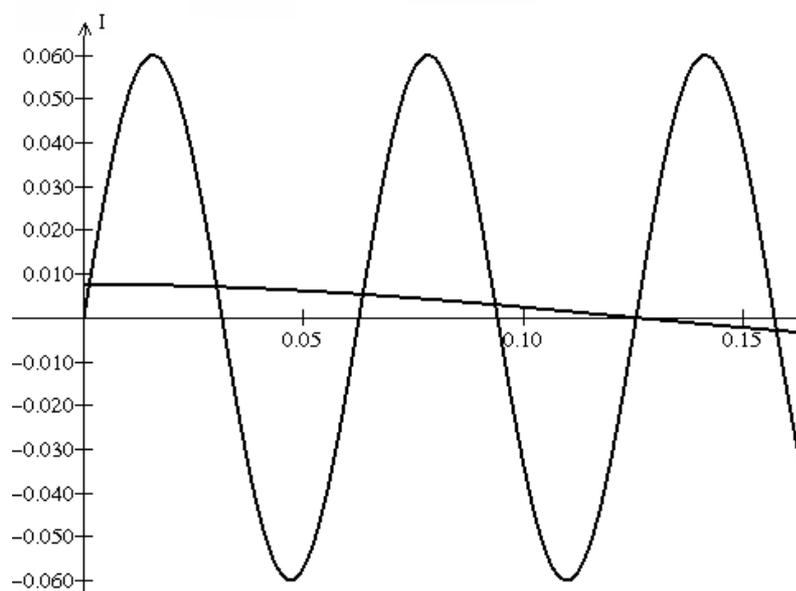


Figura 9.36: Intensidad en caso de resonancia

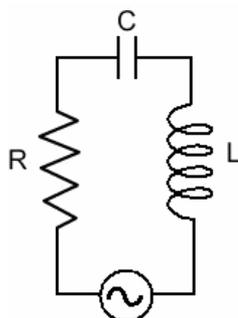


Figura 9.37: Circuito RCL

9.6. Aspectos computacionales

9.6.1. Aproximaciones de Taylor de orden 1, 2 y 3

Sabemos que el problema

$$y' = F(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (9.92)$$

no siempre tiene solución (recuerda el teorema de existencia del apartado 9.4). Pero, aunque exista, no siempre será posible encontrar la solución explícita o implícita. En muchos casos tendremos que conformarnos con una solución aproximada. Seguidamente veremos algunos procedimientos para encontrar esta solución aproximada.

En el apartado 9.2.2 ya realizamos un primer acercamiento a la resolución aproximada del problema (9.92), empleando nuestra macroestrella teorema de Taylor. Si suponemos como hipótesis que la función solución de (9.92) es derivable hasta orden n en el punto x_0 , entonces se puede construir un polinomio $P_n(x)$ que se aproxime a $y(x)$ en un entorno del punto x_0 :

$$P_n(a+h) = y(a) + y'(a)h + \frac{y''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

$$P_n(a+h) \approx y(a+h) \quad (9.93)$$

La Figura 9.38 muestra la gráfica de la solución del problema con el que trabajamos en el apartado 9.2.2:

$$y'(x) = x^2y, \quad y(1.26) = -0.6$$

También aparece en la figura la representación gráfica de los polinomios $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$.

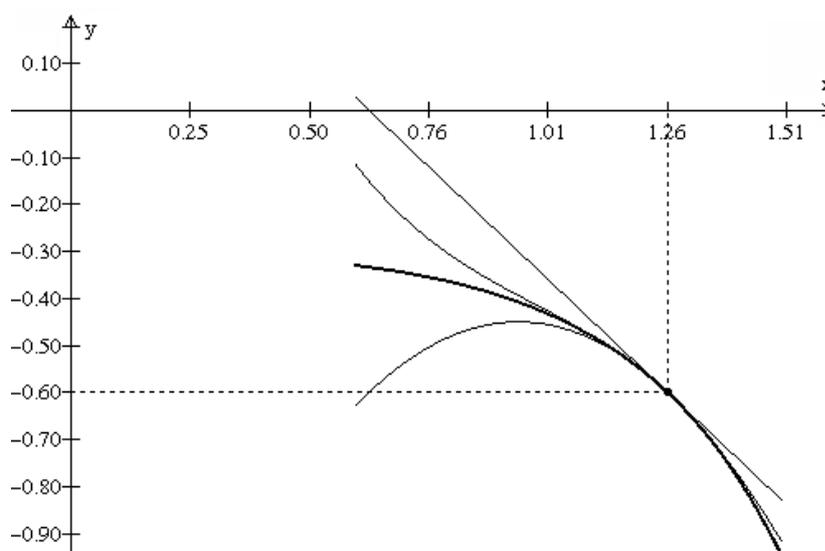


Figura 9.38: Aproximación por Taylor

Para aplicar este procedimiento, calculamos las derivadas sucesivas de $y(x)$ en el punto x_0 a partir de $y' = F(x, y)$. Sin embargo, la aproximación obtenida no es en general suficiente en los puntos relativamente alejados de x_0 . Además, la función $y(x)$ debe ser derivable hasta el orden necesario y hay que calcular sus derivadas sucesivas en x_0 .

Observa que este procedimiento utiliza para calcular la aproximación de la función $y(x)$ sólo información sobre $y(x)$ en el punto x_0 : $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, etc. Con toda esta información, se construye otra función $P_n(x)$ que se aproxima a $y(x)$. Pues bien, el enfoque que normalmente se utiliza en la práctica es diferente. No se trata de encontrar una segunda

función que se aproxime a $y(x)$ en un intervalo. Se trata de tomar la sucesión de puntos espaciados uniformemente una cantidad h :

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \dots, x_{n+1} = x_n + h = x_0 + (n+1)h$$

y encontrar de forma aproximada los valores de $y(x)$ en ellos:

$$y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_{n+1})$$

Veamos cómo hacerlo si sólo disponemos de $y'(x) = F(x, y)$. Si tomamos la aproximación de Taylor (9.93) para $n=1$:

$$y(a+h) \approx y(a) + y'(a)h \tag{9.94}$$

Conociendo y_0 , empleamos (9.94) para calcular aproximadamente $y(x_1)$, ya que $y'(x_0)$ es conocido. A partir de $y(x_1)$ e $y'(x_1)$, utilizamos de nuevo (9.94) para calcular aproximadamente el valor de $y(x_2)$, y así sucesivamente. El algoritmo que resulta se llama método de Euler, y puede escribirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} y_1 &= y(x_1) \approx y(x_0) + y'(x_0)h = y(x_0) + F(x_0, y_0)h \\ y_2 &= y(x_2) \approx y(x_1) + y'(x_1)h = y(x_1) + F(x_1, y_1)h \\ &\vdots \\ y_{n+1} &= y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + y'(x_n)h = y(x_n) + F(x_n, y_n)h \\ y_{n+1} &= y(x_n) + y'(x_n)h = y(x_n) + F(x_n, y_n)h \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

La idea puede extenderse empleando la aproximación de Taylor de orden 2, 3, etc. Por ejemplo, para $n=2$:

$$\begin{aligned} y(a+h) &\approx y(a) + y'(a)h + \frac{y''(a)}{2}h^2 \\ y''(x) &= F_x(x, y) + y'F_y(x, y) = F_x(x, y) + F(x, y)F_y(x, y) \\ y_{n+1} &= y_n + h F(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} (F_x(x_n, y_n) + F(x_n, y_n)F_y(x_n, y_n)) \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ejemplo 9.6 La Tabla 4 muestra los valores obtenidos al calcular las aproximaciones mediante los métodos de Euler y de Taylor de orden 2 con $h = 0.05$ para el problema

$$y' = x^2y, y(0.85) = 0.8$$

En este caso la solución exacta $y(x) = 0.65191e^{x^3/3}$ puede obtenerse fácilmente mediante separación de variables. La Tabla 4 también muestra el valor exacto de $y(x)$ en cada punto y el error cometido por cada método (absoluto y porcentaje respecto al valor exacto). Como puede verse, el error es menor empleando la aproximación de Taylor de orden 2, pero en ambos métodos el error aumenta a medida que nos alejamos del punto inicial x_0 .

Tabla 4

x_k	Valor exacto $y(x_k)$	Aprox. Euler y_k	Error Euler	% error Euler	Aprox. Taylor orden 2 y_k	Error Taylor orden 2	% error Taylor orden 2
0.8500	0.8000	0.8000	0.0000	0.0000	0.8000	0.0000	0.0000
0.9000	0.8312	0.8289	0.0023	0.2803	0.8311	0.0001	0.0132
0.9500	0.8676	0.8625	0.0051	0.5878	0.8648	0.0028	0.3216
1.0000	0.9098	0.9014	0.0084	0.9255	0.9038	0.0060	0.6595
1.0500	0.9589	0.9465	0.0124	1.2963	0.9490	0.0099	1.0314
1.1000	1.0159	0.9986	0.0173	1.7038	1.0013	0.0146	1.4400
1.1500	1.0823	1.0591	0.0233	2.1500	1.0619	0.0204	1.8876
1.2000	1.1597	1.1291	0.0306	2.6395	1.1321	0.0276	2.3782
1.2500	1.2501	1.2104	0.0397	3.1750	1.2136	0.0364	2.9151
1.3000	1.3559	1.3049	0.0510	3.7613	1.3084	0.0475	3.5031
1.3500	1.4804	1.4152	0.0652	4.4010	1.4190	0.0614	4.1450
1.4000	1.6271	1.5442	0.0830	5.0992	1.5483	0.0788	4.8447
1.4500	1.8010	1.6955	0.1055	5.8600	1.7000	0.1010	5.6079

Ejercicio 9.33 Para calcular la aproximación en puntos situados a la izquierda de x_0 , basta tomar un paso $h < 0$. Aplica este procedimiento al ejemplo anterior, tomando el paso $h = -0.05$. Confecciona para este caso una tabla similar a la Tabla 4.

Ejercicio 9.34 Deduce el algoritmo de aproximación de Taylor de orden 3, llamado fórmula de Euler mejorada. Aplícalo al ejemplo anterior, confeccionando la correspondiente tabla.

9.6.2. Método de Runge-Kutta de orden 4

Se trata de uno de los métodos numéricos más utilizados para la resolución aproximada del problema (9.92), y se basa en la aproximación de Taylor de orden 4. Mostraremos únicamente el algoritmo de cálculo:

Para cada $n = 0, 1, 2, \dots$

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

donde las constantes k_i se van obteniendo en secuencia del siguiente modo:

$$k_1 = hF(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hF(x_n + 0.5h, y_n + 0.5k_1)$$

$$k_3 = hF(x_n + 0.5h, y_n + 0.5k_2)$$

$$k_4 = hF(x_n + h, y_n + k_3)$$

La Tabla 5 muestra la aplicación del método de Runge-Kutta al ejemplo anterior. Como puede observarse, es mucho más preciso que los anteriores métodos.

Tabla 5

x_k	Valor exacto $y(x_k)$	Aprox. R-K y_k	Error R-K	% error R-K
0.8500	0.8000	0.8000000	0.0000000	0.0000000
0.9000	0.8312	0.8312300	0.0000000	0.0000000
0.9500	0.8676	0.8675700	0.0000000	0.0000000
1.0000	0.9098	0.9098100	0.0000000	0.0000000
1.0500	0.9589	0.9588900	0.0000000	0.0000000
1.1000	1.0159	1.0159400	0.0000000	0.0000000
1.1500	1.0823	1.0823200	0.0000000	0.0000000
1.2000	1.1597	1.1596800	0.0000100	0.0008623
1.2500	1.2501	1.2500600	0.0000000	0.0000000
1.3000	1.3559	1.3559200	0.0000100	0.0007375
1.3500	1.4804	1.4803400	0.0000100	0.0006755
1.4000	1.6271	1.6271200	0.0000100	0.0006146
1.4500	1.8010	1.8010300	0.0000000	0.0000000

Finalmente, la Figura 9.39 muestra la gráfica de la solución exacta (trazo fino) y las aproximaciones obtenidas mediante los métodos de Euler y Runge-Kutta (trazo grueso), con $h = 0.05$. Los puntos obtenidos con estas aproximaciones se han unido mediante una poligonal, dando lugar a un trazo continuo. Se aprecia el error del método de Euler, pero el método de Runge-Kutta da lugar a una aproximación que prácticamente coincide con $y(x)$.

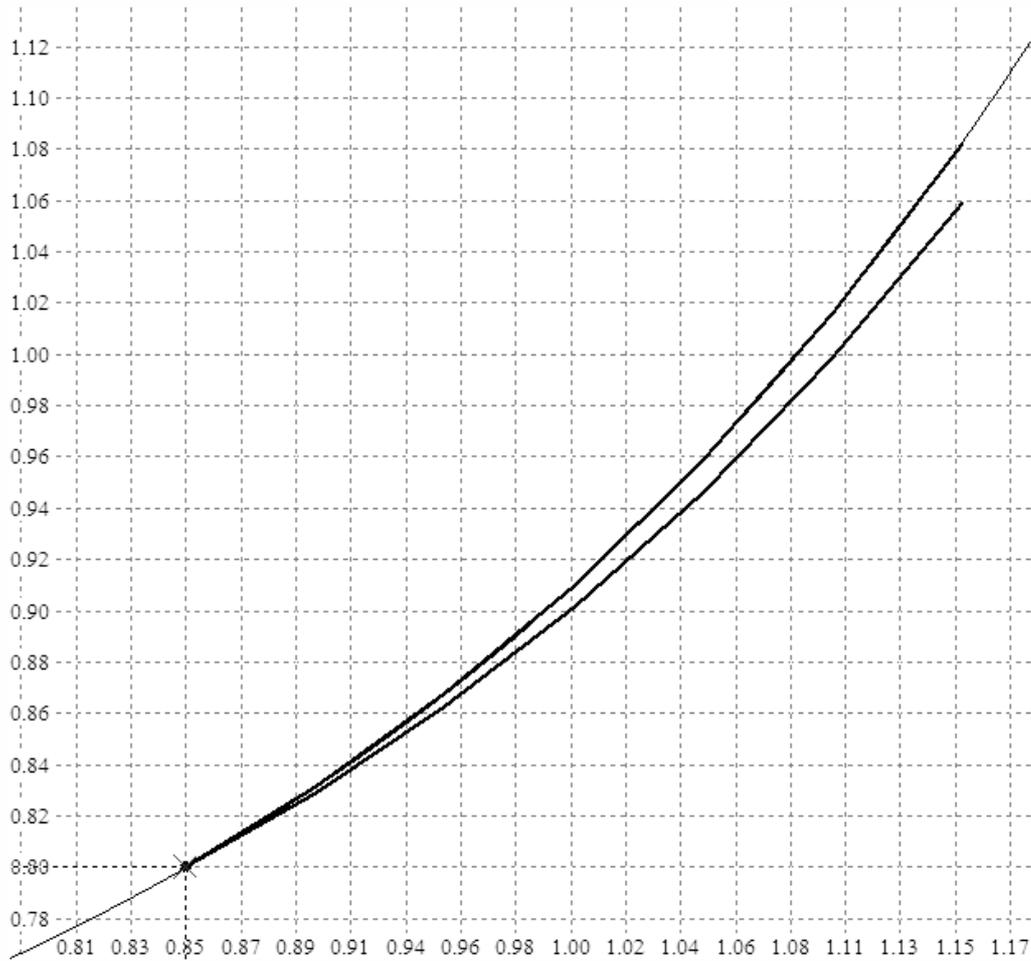


Figura 9.39: Solución y aproximaciones de Euler y Runge-Kutta