Capítulo 9

Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

(En los problemas marcados con el icono es conveniente usar de un programa de ordenador para la representación gráfica de funciones, por ejemplo Winplot).

1. Resolver las siguientes ecuaciones y trazar algunas soluciones particulares.

   a) $\dfrac{dy}{dx} = x + 2$ c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5t}{x}$ e) $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$ g) $x' = t(1 + x)$

   b) $\dfrac{dy}{dx} = y + 2$ d) $\dfrac{dz}{dx} = \sqrt{xz}$ f) $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{\sqrt{y}}{3z}$ h) $xy + y' = 100x$

2. Escribir y resolver las ecuaciones diferenciales que se describen en los siguientes enunciados:

   a) El ritmo de cambio de Q respecto a t es inversamente proporcional al cuadrado de t.

   b) El ritmo de cambio de P respecto a t es inversamente proporcional a $10 - t$.

   c) El ritmo de cambio de R respecto a x es proporcional a $L - R$.

3. Supongamos que el ritmo de cambio de y es proporcional a y. Se sabe que en $x = 0$ es $y = 4$, y que en $x = 3$ es $y = 10$. Calcular $y(x)$.

4. Averiguar en qué cuadrantes la solución $y(x)$ de las siguientes ecuaciones diferenciales son crecientes o decrecientes.

   a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}xy$ b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x^2y$

5. Encontrar el polinomio de McLaurin de orden 3 para aproximar la solución de los siguientes problemas:

a)	b)	c)	d)	e)
$\dfrac{dy}{dx} = xy^2$	$\dfrac{dy}{dx} = y$	$\dfrac{dN}{dy} = N + y$	$\dfrac{d^2R}{dz^2} = Rz + z^2 + 1$	$\dfrac{d^2H}{du^2} = (u+1)\mathrm{e}^H$
$y(0) = 0.5$	$y(0) = 2$	$N(0) = 1$	$\begin{cases} R(0) = 1 \\ R'(0) = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} H(0) = -1 \\ H'(0) = 3 \end{cases}$

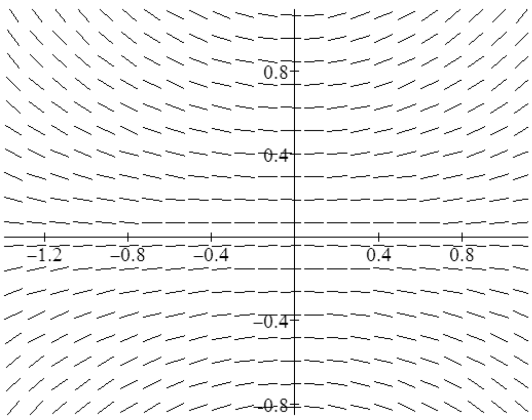
6. Comprobar que la siguiente EDO es exacta, y obtener su solución general:

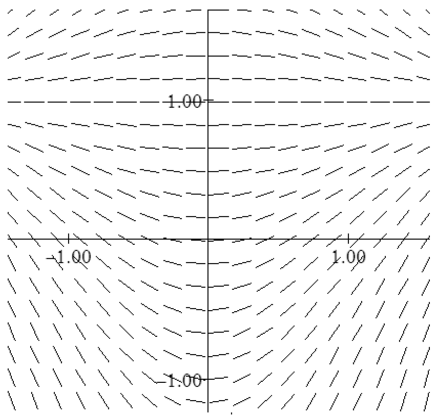
$$(2xy^2 - y\operatorname{sen} x + 2x - 1)\,dx + (2x^2y + \cos x + 1/y)\,dy = 0$$

7. Encontrar las funciones $y(x)$ tales que la tangente a la gráfica de $y(x)$ en cada punto (x, y) corta al eje OX en el punto $(x + 2, 0)$.

8. Encontrar las funciones $y(x)$ tales que la tangente a la gráfica de $y(x)$ pasa siempre por el origen.

9. Cada una de las figuras adjuntas representa el campo de pendientes asociado a una ecuación diferencial:





Considerar los dos siguientes problemas:

a) $\dfrac{dy}{dx} = x(1-y)$, $y(0) = 0.4$ b) $\dfrac{dy}{dx} = xy$, $y(0) = -0.5$

Se trata de:

a) Identificar el campo de pendientes de cada ecuación.

b) Sobre las figuras, trazar de forma aproximada la solución del problema.

c) Calcular el polinomio de McLaurin de orden tres para aproximar la solución en un entorno de $x = 0$.

d) Resolver de forma analítica el problema y comparar la solución exacta con las soluciones aproximadas obtenidas en los apartados anteriores.

10. Encontrar un modelo matemático que describa la Ley de enfriamiento de Newton: .El ritmo de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del ambiente". Supongamos que el comedor de una vivienda se encuentra a una temperatura de 18° C y que la sopa de un plato pasa de 55° C a 30° C en tres minutos. Trazar la gráfica de la temperatura de la sopa. £En qué instante la sopa se encontrará a temperatura ambiente?

11. En los siguientes ejercicios, comprobar que la familia de funciones indicada satisface la correspondiente EDO. Representar gráficamente la familia y encontrar la solución particular que satisface la condición inicial:

a)	b)	c)	d)
$y = Ce^{-2x}$	$y = C_1 \operatorname{sen}(3x) + C_2 \cos(3x)$	$y = C_1 x + C_2 x^3$	$3x^2 + 2y^2 = C$
$y' + 2y = 0$	$y'' + 9y = 0$	$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$	$3x + 2yy' = 0$
$y(0) = 3$	$\begin{cases} y(\pi/6) = 2 \\ y'(\pi/6) = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y(2) = 0 \\ y'(2) = 4 \end{cases}$	y(1)=3

12. Resolver las siguientes EDO y representar gráficamente la solución general:

a) $3x^2(1 + y^2)dx + dy = 0$

c) $y\sqrt{y^2 - 1}\, dx = \sqrt{1 - x^2}\, dy$

b) $e^{x^2 - y^2} + \dfrac{y}{x^2}\dfrac{dy}{dx} = 0$

d) $(1 + y)\, dx + \dfrac{dy}{x^2 - 2x} = 0$

13. Resolver las siguientes EDO, encontrando un factor integrante de la forma $F(x, y) = x^n y^m$:

a) $2y\, dx + (3y - 2x)\, dy = 0$

b) $\dfrac{1}{x}(2x - ey^2)\, dx - 3y^2\, dy = 0$

c) $y\, dx + (x^2 y^2 - x)\, dy = 0$

14. Resolver las siguientes EDO:

a) $(2x + y)\, dy = (x - 2)\, dx$

b) $y' = \dfrac{4y^2 + xy - 2y^2}{x^2}$

c) $x\, dy - y\, dx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

15. Aplicando el cambio de variable $u = 2y^3$, resolver la EDO

$$(x + 2y^3)\,dx + 6xy^2\,dy = 0$$

16. Resolver: $x^2y'' + 2xy' = 2$

17. Demostrar que si $z(x)$ es solución de la EDO lineal $y' + P(x)y = 0$, entonces también es solución la función $u(x) = Cz(x)$.

18. Resolver las siguientes EDO lineales:

    a) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 3x + 4$ b) $\dfrac{dy}{dx} - 3x^2y = \mathrm{e}^{x^3}$ c) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

    d) $y' - y = \cos x$ e) $y' + 2xy = 2x$ f) $(x + y)\,dx - x\,dy = 0$

19. Resolver los siguientes problemas:

a)	b)	c)	d)
$y'\cos x + y - 1 = 0$	$x^2y' + 2y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$	$x\,dy = (x + y + 2)\,dx$	$2xy' - y = x^3 - x$
$y(0) = 5$	$y(1) = \mathrm{e}$	$y(1) = 10$	$y(4) = 2$

20. La intensidad $I(t)$ que circula por un circuito RL serie satisface la ecuación diferencial $LI' + RI = E$, donde L es el valor de la inductancia, R el de la resistencia y E es la tensión aplicada. Se pide:

    a) Obtener $I(t)$ para cierto voltaje constante E_0.
    b) Estudiar en el caso anterior el comportamiento de $I(t)$ tras un largo período de tiempo.
    c) Obtener $I(t)$ si $I(0) = 0$ A, $E_0 = 110$ V, $R = 550\ \Omega$, $L = 4$ H.
    d) Obtener $I(t)$ si se aplica una tensión $E(t) = E_0\,\mathrm{sen}(t)$.
    e) Estudiar en el caso anterior el comportamiento de $I(t)$ tras un largo período de tiempo.

21. Encontrar la solución general de las siguientes EDO lineales:

    a) $y'' - 4y' + 13y = 0$ b) $y''' + 6y'' + 10y' = 0$ c) $y'' + 6y' + 25y = 0$

    d) $y''' + 2y'' = 0$ e) $y^{IV} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$

22. Empleando el método de los coeficientes indeterminados, resolver las siguientes EDO:

    a) $y'' + 2y' = 36\cos x$
    b) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x$
    c) $y'' - 2y' + y = -\mathrm{e}^x$
    d) $y''' - y'' - 9y' + 9y = 2x + 3$

23. Empleando el método de los operadores, resolver las siguientes EDO:

a) $y'' - 2y' = \cos x$

b) $y''' + 2y'' - 2y' = x + 2$

c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = -x\mathrm{e}^x$

d) $y''' - 4y'' + 4y' = e^x - \operatorname{sen} 2x$