Capítulo 8

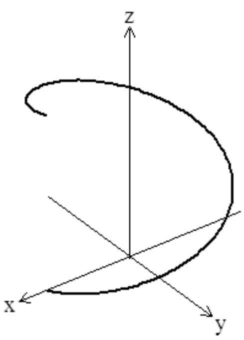
Problemas de Integración Curvilínea

(En los problemas marcados con el icono es conveniente usar de un programa de ordenador para la representación gráfica de funciones, por ejemplo Winplot).

8.1. INTEGRAL CURVILÍNEA

1. Calcular $\oint_C y^2\,dx + 2xy\,dy$, donde C es una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio R.

2. Calcular $\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, donde C es la hélice $x(t) = a\cos(t),\ y(t) = a\,\mathrm{sen}(t),\ z(t) = kt,\ t \in [0, 2\pi]$ (ver figura).



3. Calcular $\oint_C (\cos x - y\,\mathrm{sen}\,x)\,dx + \cos x\,dy$, donde C es el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0,1),\ B(2,3),\ D(1,4)$.

4. Calcular $\int_C 6x^2y\,dx + 10xy^2\,dy$, donde C es el segmento de la curva $y = x^3$, entre $M(1,1)$ y $N(2,8)$.

5. Calcular $\displaystyle\int_N^M (2x\cos y - y^2 \operatorname{sen} x)\,dx + (2y\cos x - x^2 \operatorname{sen} y)\,dy$, donde $N(\pi/2, \pi/2)$, $M(\pi/4, \pi/4)$.

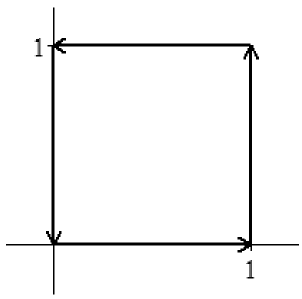
6. Empleando la fórmula de Green, calcular $\displaystyle\oint_C xy^2\,dx - x^2y\,dy$, donde C es la curva $x^2 + y^2 = a^2$.

7. Calcular $\displaystyle\int_{(a,b)}^{(c,d)} f(x)\,dx + g(y)\,dy$, donde $f(x)$, $g(y)$ son funciones continuas.

8. Sea $f(u)$ una función continua y C una curva cerrada. Demostrar que

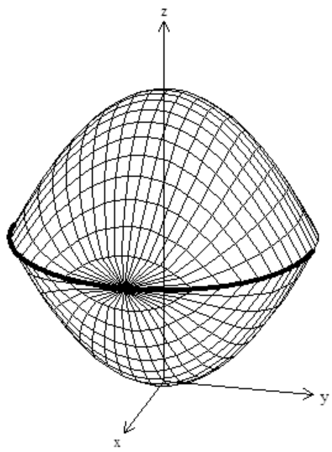
$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0$$

9. Calcular $\displaystyle\oint_C \sqrt{x^2y^2}\,dx + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\,dy$, donde C es la curva que aparece en la figura.



10. Sea C la curva definida como intersección entre las superficies (ver figura).

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2c^2 - z \end{cases}$$



Se pide:

a) Emplear coordenadas cilíndricas generalizadas para obtener una parametrización de C.

b) Calcular $\oint_C \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dx+\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy+2xyz\,dz$

11. Calcular el valor de $\int_C (6xy^2-y^3)\,dx+(6x^2y-3xy^2)\,dy$, para cada una de las siguientes curvas C:

a) C es el segmento de recta AB, A$(1,2)$, B$(3,4)$.

b) C es el arco de circunferencia de centro C$(2,3)$ y que pasa por los puntos A$(1,2)$, B$(3,4)$.

c) C es toda la circunferencia del apartado anterior.

12. Considerar la familia de parábolas $y=kx(x-1)$ que unen los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$. Sea C es una de estas parábolas, y $F(x,y)=(2xy,x^2)$ la fuerza aplicada en cada punto (x,y). Se pide:

a) Parametrizando C, demostrar que el trabajo efectuado por $F(x,y)$ no depende del valor de k.

b) Explicar el resultado obtenido en el apartado anterior.