Capítulo 7

Integral Múltiple

7.1. Planteamiento del problema

En el Tema 5 aprendimos a calcular el valor medio de una función de una variable $y(x)$ en un dominio $[a, b]$. Vamos a recordar algunas situaciones prácticas en las que este concepto de valor medio es útil.

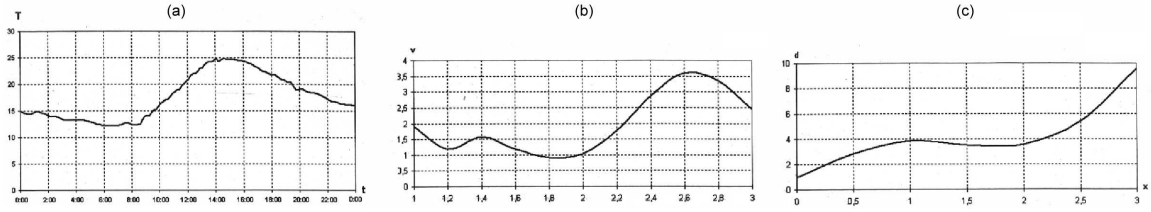

Figura 7.1: Gráficas

La Figura 7.1(a) muestra la gráfica de la función temperatura $T(t)$ que registró a lo largo del día un termómetro instalado en cierta localidad. A partir de ese gráfico, podemos hacernos una idea de cómo ha oscilado la temperatura. Por ejemplo, podemos calcular la máxima y la mínima temperaturas registradas, los intervalos del día en los que la temperatura ha aumentado o disminuido, los intervalos en los que la temperatura ha cambiado a mayor velocidad, etc. Y, por supuesto, también podemos obtener el valor medio $\overline{T}$ de la temperatura registrada a lo largo del día:

$$\overline{T} = \frac{1}{24} \int_0^{24} T(t)\, dt \tag{7.1}$$

La Figura 7.1(b) representa la velocidad $v(t)$ en m/s de un vehículo durante 3 segundos. También en este caso son interesantes los parámetros de velocidad máxima/mínima, intervalos de crecimiento, etc, y el valor medio de v:

$$\overline{v} = \frac{1}{3} \int_0^{3} v(t)\, dt \tag{7.2}$$

Finalmente, la Figura 7.1(c) representa el modo en que se distribuye la materia sobre una barra de 3 m de longitud, mediante la función densidad $d(x)$ para cada $x \in [0, 3]$, medida en gr/m. Como puedes ver, la distribución de materia no es uniforme, de modo que nos interesará de nuevo conocer parámetros como pueden ser máximo y mínimo absolutos, extremos locales, intervalos de crecimiento, etc, y también el valor medio de densidad:

$$\overline{d} = \frac{1}{3} \int_0^{3} d(x)\, dx \tag{7.3}$$

En general, el valor medio de una función continua $y(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se puede obtener del siguiente modo:

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^{b} y(x)\, dx \tag{7.4}$$

Ahora bien, en el Tema 6 (funciones reales de varias variables reales) vimos cómo lo más usual en los problemas reales de Ciencias e Ingeniería es que las funciones sean de dos, tres o más variables. ¿Cómo se podrá calcular el valor medio de una función $z = F(x, y)$ en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$? ¿Y si se trata de una función $w = F(x, y, z)$ definida en un recinto $V \subset \mathbb{R}^3$? Veamos algunos ejemplos muy parecidos a los anteriores.

Ejemplo 7.1 (temperatura atmósférica.) *Normalmente el estudio de la temperatura a lo largo del día en cierta localidad grande se realiza utilizando varios termómetros distribuidos por el territorio. Así pues, para un instante determinado del día, podemos pensar en una función temperatura $T(x, y)$ definida en cada punto (x, y) de la región geográfica R. Es razonable pensar que la función $T(x, y)$ sea continua en R, aunque sólo tendremos los valores de T medidos en los puntos (x, y) en los que están instalados los termómetros.*

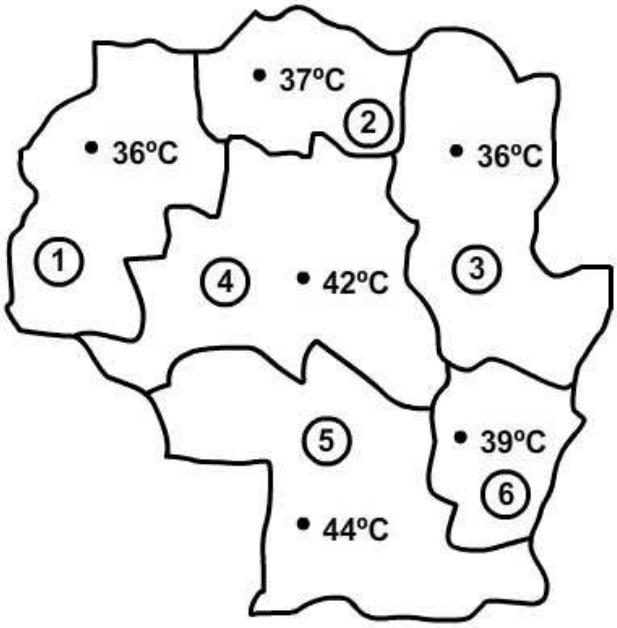

Figura 7.2: Mapa de temperaturas

La Figura 7.2 representa una región geográfica R dividida en seis zonas, en cada una de las cuales tenemos instalada una estación meteorológica. En la figura aparece también la temperatura que registra cada termómetro a las 12 del mediodía. Naturalmente, no podemos esperar que la temperatura en todos los puntos de cada zona sea idéntica a la que marca el termómetro, pero debemos trabajar con esa aproximación. A partir de los datos, ¿cuál será le temperatura media $\overline{M}$ de toda la región R en ese momento?

Una primera idea para hacer el cálculo consiste en obtener la media aritmética de las seis temperaturas:

$$\overline{M} \approx \frac{36 + 37 + 36 + 42 + 44 + 39}{6} = 39\,^{\circ}C$$

Sin embargo, en este procedimiento de cálculo no hemos tenido en cuenta que cada una de esas seis temperaturas representa a zonas geográficas de diferentes áreas. Las zonas 4 y 5, por ejemplo, tienen un área mayor que las demás, y por eso parece razonable pensar que sus temperaturas tengan un mayor peso en el cálculo del valor medio de temperatura global en R. Por esa razón hemos obtenido el área en Km^2 de cada una de las seis zonas, como aparece en la siguiente tabla:

Zona	Área (Km^2)	Temperatura (°C)
1	640	36
2	350	37
3	655	36
4	950	42
5	1040	44
6	370	39
Total	4005	

Ahora calculamos la media ponderada de los seis valores de temperatura:

$$\overline{M} \approx \frac{36 \cdot 640 + 37 \cdot 350 + 36 \cdot 655 + 42 \cdot 950 + 44 \cdot 1040 + 39 \cdot 370}{4005} = 39.87\,^{\circ}C$$

Como puedes ver, la diferencia entre ambos valores medios es de $0.87^{\circ}C$. Sin embargo, el valor $\overline{M} \approx 39.87^{\circ}C$ es más representativo de la temperatura media en la región R.

Ejemplo 7.2 (distribución de materia.) *Supongamos ahora que tenemos una lámina L en cuya superficie se deposita cierta cantidad de materia. De este modo, en cada punto $(x, y) \in L$ está definida una magnitud $F(x, y)$. Por ejemplo, $F(x, y)$ puede representar el grosor medido en mm de una imprimación que hemos aplicado a la lámina; o la cantidad de óxido medido en mg/cm^2 depositado sobre ella. ¿Cómo calcularíamos aproximadamente en valor medio de $F(x, y)$ en L? La idea es descomponer la lámina L en pequeñas zonas de igual área, tomar un punto cualquiera de cada uno de esas zonas y finalmente calcular la media exactamente igual que en el ejemplo 1. Observa la Figura 7.3. En (a) se muestra una lámina rectangular L, en (b) una descomposición de L en 12 zonas y en (c) una posible elección de los correspondientes puntos $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$.*

Si A es el área de cada una de las 12 zonas (por tanto el área total es $12A$) y $F(P_i)$ es el valor de la función $F(x, y)$ en el punto P_i, operando exactamente igual que en el ejemplo 7.1 para calcular aproximadamente el valor medio M de $F(x, y)$ en L:

$$\overline{F} \approx \frac{\sum_{i=1}^{12} A \cdot F(P_i)}{12A} = \frac{\sum_{i=1}^{12} F(P_i)}{12}$$

Observa que, al haber descompuesto el recinto L en zonas de igual área, en este caso basta con calcular la media aritmética de esos 12 valores $F(P_1), \ldots, F(P_{12})$.

Sin embargo, se nos plantean diversos problemas:

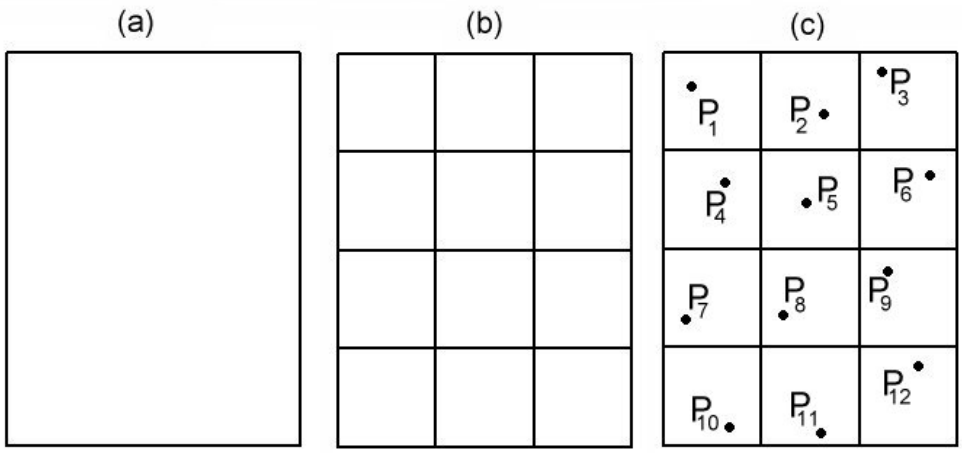

Figura 7.3: Distribución de óxido

1. En los ejemplos estudiados, hemos calculado el valor aproximado de la media de $F(x, y)$ a partir de una muestra de $F(x, y)$ en los puntos $P_i \in D,\ i = 1, \ldots, n$. Sin embargo, ¿cómo se podrá calcular el valor exacto de la media de $F(x, y)$?

2. También es interesante calcular el volumen limitado superiormente por una superficie $z = F(x, y)$ con $(x, y) \in L$ (ver Figura 7.4). Por ejemplo, si $F(x, y)$ representa el grosor de la capa de nieve que ha caído sobre una región L, este volumen representa la cantidad total de nieve sobre L.

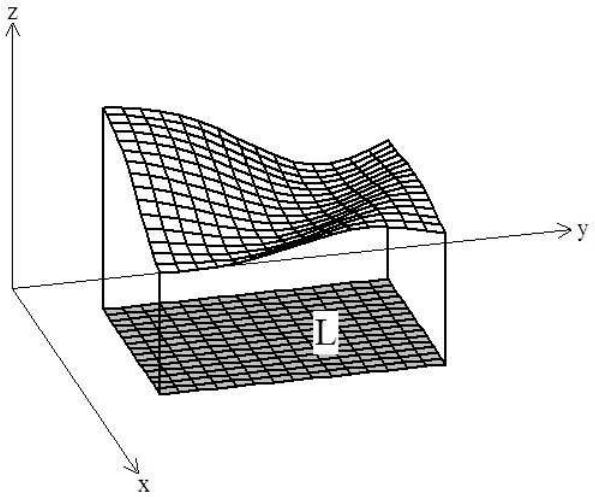

Figura 7.4: Distribución de nieve en 3D

3. Una pieza puede estar definida por varias superficies, como la representada en la Figura 7.5. Su volumen nos permite conocer la cantidad de material que será necesario para fabricarla. ¿Cómo calcular este volumen? ¿Y el área de su superficie?

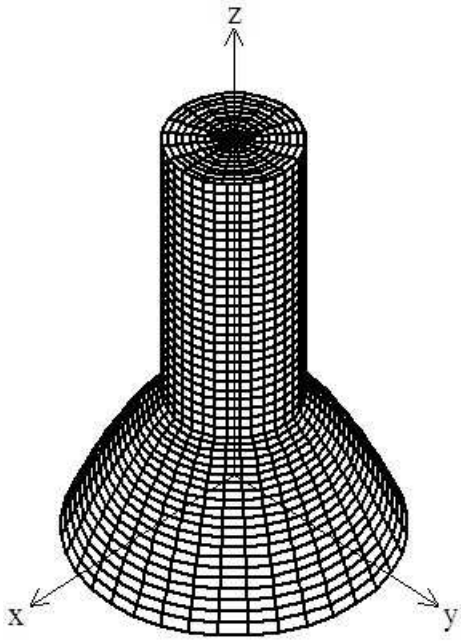

Figura 7.5: Pieza

4. Si la función $F(x, y)$ representa una concentración de materia en cada punto $(x, y) \in D$, hay otros parámetros importantes asociados a $F(x, y)$ que nos interesa calcular: ¿cuál es su centro de gravedad? ¿Su momento de inercia respecto a un punto o respecto a un eje? ¿La cantidad de materia contenida en D?

5. Si $w = F(x, y, z)$ es una función definida en un recinto $V \subset \mathbb{R}^3$, también tiene interés calcular el valor medio de F en V. Por ejemplo, $w = T(x, y, z)$ puede representar la temperatura en el interior de un recinto V del espacio (una pieza o un horno, por ejemplo). ¿Cuál será el valor medio de T en este caso? Y si $w = F(x, y, z)$ representa la concentración de materia en cada punto (x, y, z) de un sólido S, ¿cuál será la cantidad de materia contenida en S? ¿Y las coordenadas de su centro de gravedad? ¿Cómo calcular el momento de inercia de V respecto a un eje?

Como ves, se nos plantean muchas preguntas. A lo largo de este tema veremos cómo darles respuesta.

7.2. Integral doble en un dominio rectangular

Vamos a tratar de utilizar las mismas ideas que nos permitieron definir el concepto de valor medio de una función continua $y(x)$ definida en $[a, b]$. Recordemos el procedimiento que utilizamos.

1. Descomponemos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $h = (b - a)/n$:

   $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,\ x_i = a + ih,\ i = 0, ..., n$$

   $$[a, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots,\ [x_{n-1}, b]$$

2. Tomamos un punto cualquiera de cada uno de los subintervalos:

   $$z_i \in [x_i, x_{i+1}]\ i = 0, ..., n - 1$$

3. Calculamos

   $$\overline{y}_n = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot y(z_i) \tag{7.5}$$

   $$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot y(z_i) \tag{7.6}$$

   El valor (7.5) es una aproximación al valor medio de $y(x)$ en $[a, b]$. Además, si $y(x) \geq 0$ en $[a, b]$, el valor (7.6) es una aproximación al área limitada superiormente por la gráfica de $y(x)$ e inferiormente por el eje OX.

   La Figura 7.6(a) muestra una descomposición de $[a, b]$ en cuatro subintervalos, en cada uno de los cuales hemos elegido los puntos medios z_0, z_1, z_2, z_3. La suma de las áreas de los cuatro rectángulos es una aproximación al área limitada superiormente por la gráfica de $y(x)$ e inferiormente por el eje OX. Las figuras 7.6(b), 7.6(c) y 7.6(d) muestran la misma operación pero tomando un número creciente de subintervalos, con lo cual se van obteniendo mejores aproximaciones.

4. Para calcular el valor exacto de la media $\overline{y}$ de $y(x)$ en $[a, b]$ y del área A limitada superiormente por la gráfica de $y(x)$ e inferiormente por el eje OX, pasamos al límite cuando $n \to \infty$:

   $$\overline{y} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot y(z_i)$$

   $$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot y(z_i)$$

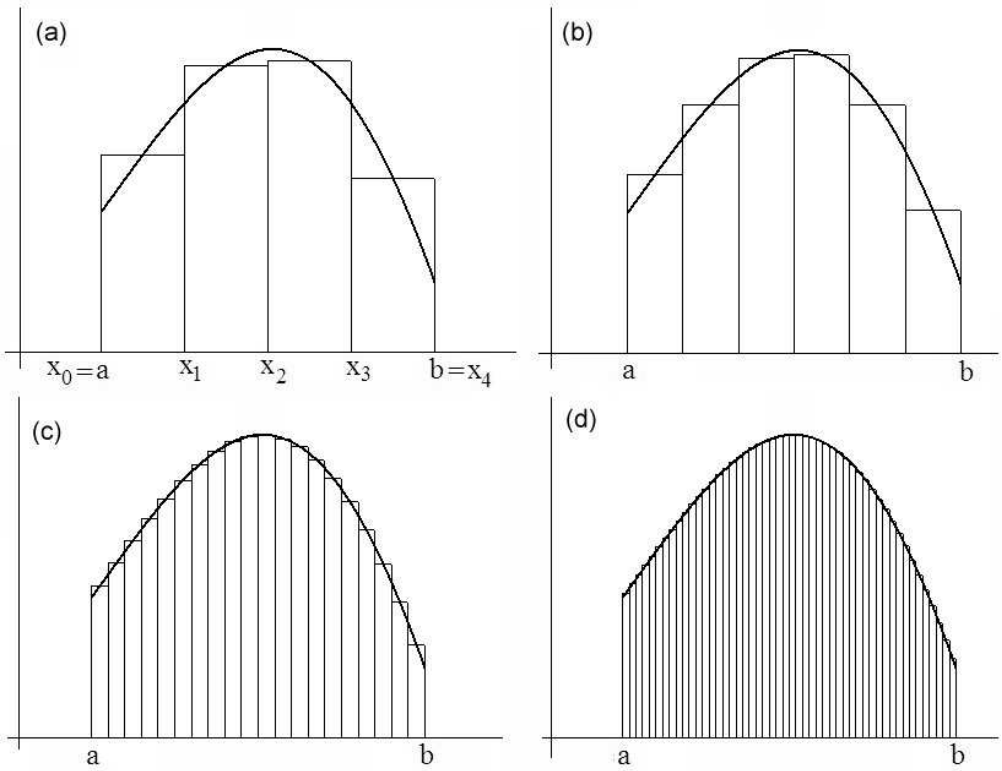

Figura 7.6: Ejemplo de la integral de una variable

Ahora vamos a tomar una función z=$F(x, y)$ sencilla, y tratar seguir un procedimiento similar pero en dos dimensiones. Sea z=$F(x, y) = xy + 1$ definida en $D = [0, 2] \times [0, 1]$. Observa la Figura 7.7(a). Hemos representado gráficamente la superficie $z = xy + 1$ en $D = [0, 2] \times [0, 1]$. Luego, hemos dividido el dominio $D = [0, 2] \times [0, 1]$ en nueve rectángulos y hemos tomado un punto de cada uno de ellos. En este caso, hemos elegido el vértice superior izquierdo de cada rectángulo. En la misma figura hemos presentado también las imágenes de estos nueve puntos.

Vamos a llamar $R_1, \ldots, R_9$ a los rectángulos y $P_1, \ldots, P_9$ a los puntos que hemos elegido. La Figura 7.7(b) muestra la superficie $z = F(x, y)$ y cada rectángulo R_i elevado a una altura $F(P_i)$. La Figura 7.7(c) muestra sólo estos rectángulos "elevados". Ya que el área de los nueve rectángulos es la misma (2/9) y que el área total del recinto D es 2, una aproximación al valor medio de $F(x, y) = xy + 1$ en $D = [0, 2] \times [0, 1]$ se calculará así:

$$\overline{F} \approx \frac{1}{2}\frac{2}{9}\left(F(P_1) + \ldots + F(P_9)\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{9}\left(F(0, 1/3) + F(0, 2/3) + F(0, 1) + F(2/3, 1/3) + \right.$$
$$\left. + F(2/3, 2/3) + F(2/3, 1) + F(4/3, 1/3) + F(4/3, 2/3) + F(4/3, 1)\right) = 1.44$$

Ahora, esos mismos cálculos nos sirven para calcular una aproximación del volumen limitado superiormente por la superficie e inferiormente por el dominio D. Observa la Figura

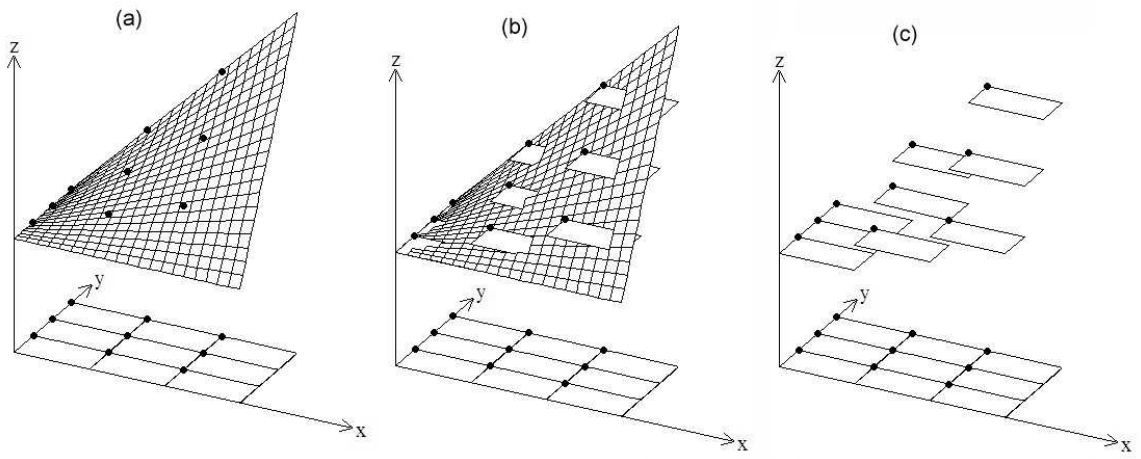

Figura 7.7: Superficie $xy + 1$

7.8, este volumen se aproxima sumando los volúmenes de nueve prismas rectangulares. Así pues, el valor aproximado del volumen será:

$$V = 2\overline{F} \approx 2.88$$

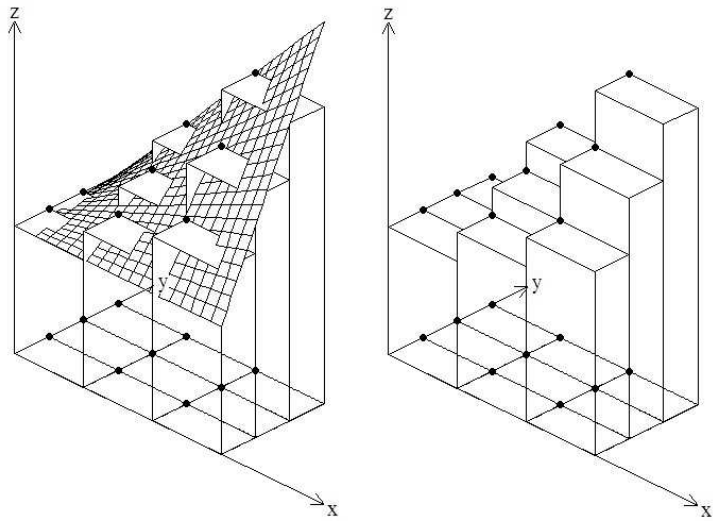

Figura 7.8: Ejemplo $xy + 1$: Volumen aproximado

Ahora vamos a realizar la misma operación, pero dividiendo en n partes los intervalos $[0, 2]$ y $[0, 1]$. Calcularemos el valor medio aproximado $\overline{F}_n$ y el volumen aproximado V_n.

Luego, parece que podemos esperar que el valor exacto V del volumen y el valor medio exacto de $\overline{F}$ sean:

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n$$

$$\overline{F} = \lim_{n\to\infty} \overline{F}_n$$

Manos a la obra. Primero descomponemos cada uno de los intervalos $[0,2]$ y $[0,1]$ en n partes:

$$F(x,y) = xy + 1 \quad x \in [0,2] \quad y \in [0,1]$$

$$x_i = \frac{2}{n} i \quad i = 0,1,\ldots,n \quad h = \frac{2}{n}$$

$$y_j = \frac{1}{n} j \quad j = 0,1,\ldots,n \quad k = \frac{1}{n}$$

Así pues, tendremos n filas y n columnas de rectángulos. Observa la Figura 7.9, vamos a llamar R_{ij} al rectángulo de la fila i-ésima y la columna j-ésima. Elegimos en cada uno de los rectángulos R_{ij} su vértice superior izquierdo, es decir:

$$P_{ij} = (x_i, y_{j+1}) \; i = 0,..,n-1, \; j = 0,...,n-1$$

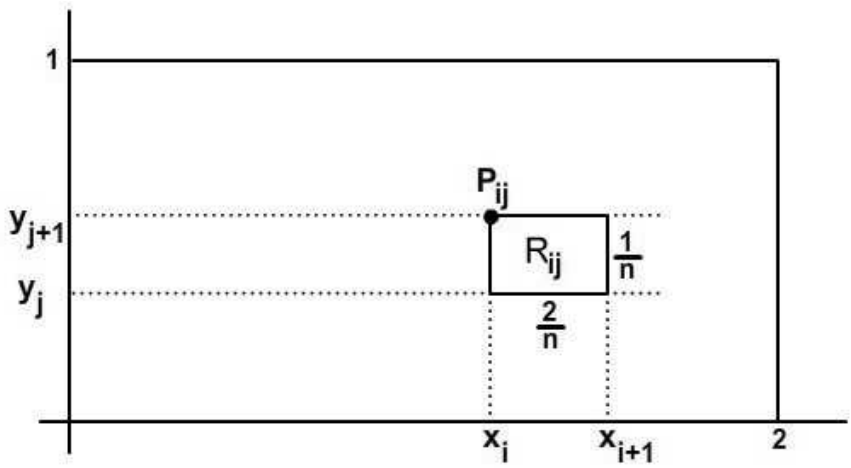

Figura 7.9: Rectángulo R_{ij}

Entonces:

$$F(P_{ij}) = F(x_i, y_{j+1}) = x_i \cdot y_{j+1} + 1 = \frac{2}{n} i \frac{1}{n}(j+1) + 1 = \frac{2}{n^2} i(j+1) + 1$$

El valor aproximado de la media de F será:

$$\overline{F}_n = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2}{n^2}\left(\frac{2}{n^2}i(j+1)+1\right)\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{n^4}i(j+1)+\frac{2}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{4}{n^4}\sum_{i=0}^{n-1}i(j+1)+\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n^4}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}i(j+1)\right)+2\right) =$$

$$= \frac{2}{n^4}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}i(j+1)\right)+1 = \frac{2}{n^4}\sum_{j=0}^{n-1}\left((j+1)\sum_{i=0}^{n-1}i\right)+1 =$$

$$= \frac{2}{n^4}\sum_{j=0}^{n-1}\left((j+1)\sum_{i=0}^{n-1}i\right)+1 = \frac{2}{n^4}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\frac{n(n-1)}{2}+1 =$$

$$= \frac{n-1}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)+1 = \frac{n-1}{n^3}\,\frac{n(n+1)}{2}+1 = \frac{n^2-1}{2n^2}+1$$

Ahora obtenemos el valor exacto de $\overline{F}$:

$$\overline{F} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2}+1 = \frac{3}{2}$$

Y el cuanto al volumen limitado superiormente por la superficie $z = xy+1$ e inferiormente por el dominio $D = [0,2]\times[0,1]$:

$$V = 2\overline{F} = 3$$

Ejercicio 7.1 *Cabe esperar que el valor medio de $F(x,y)$ no dependa del modo en que se elijan los puntos $P_{ij} \in R_{ij}$. Ahora, en vez de tomar como P_{ij} el vértice superior izquierdo del rectángulo R_{ij}, toma un punto diferente, por ejemplo el centro del rectángulo. Demuestra que el valor $\overline{F}$ obtenido es idéntico, y evidentemente el de V también.*

Ejercicio 7.2 *Para el mismo ejemplo $F(x,y) = xy+1$, ensayamos un modo diferente de descomponer $D = [0,2]\times[0,1]$ en rectángulos. Vamos a descomponer $[0,2]$ en los mismos n subintervalos de longitud $2/n$, pero ahora la altura será constante igual a 1. Así pues, tenemos definidos n rectángulos R_i, $i = 0,...,n-1$. Observa que cuando $n \to \infty$, el área de R_i tiende a 0. Ahora, toma en cada rectángulo el vértice superior izquierdo y trata de calcular del mismo modo el valor medio de F. ¿Qué ocurre? Después toma en cada rectángulo el vértice inferior izquierdo y trata de calcular del mismo modo el valor medio de F? ¿Qué ocurre? ¿Qué está fallando?*

Ahora vamos a aplicar estas ideas a una función continua cualquiera $F(x,y)$, definida en un dominio rectangular $D = [a,b]\times[c,d]$. Dividimos $[a,b]$ en n partes de longitud $h = (b-a)/n$ y $[c,d]$ en n partes de longitud $k = (d-c)/n$. Luego tomamos un punto P_{ij} de cada uno de los rectángulos y aplicamos las mismas ideas que en el ejemplo (ver Figura 7.10).

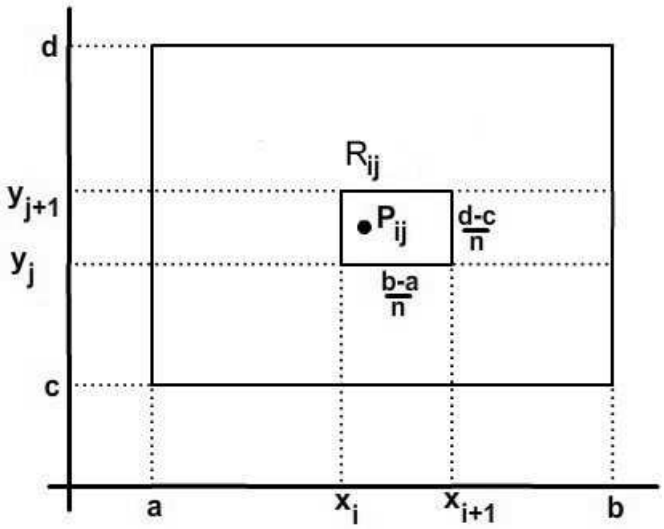

Figura 7.10: Caso general de R_{ij}

Para calcular de forma aproximada el valor medio de $F(x, y)$ tendremos:

$$\overline{F}_n = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} h\, k\, F(x_i, y_j) \right) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \sum_{i=0}^{n-1} h \left(\sum_{j=0}^{n-1} k\, F(x_i, y_j) \right)$$

Tomando límite:

$$\overline{F} = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} h \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} k\, F(x_i, y_j) \right) \tag{7.7}$$

Ahora bien, recuerda que si $h(x)$ es una función continua definida en un intervalo $[a, b]$ y $h = (b-a)/n$, se tiene:

$$\int_a^b h(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} h\, h(x_i)$$

Entonces, reconocemos en el límite interior de la ecuación (7.7) la integral **respecto a la variable y** de la función $h(y) = F(x_i, y)$ en el intervalo $[c, d]$. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} k\, F(x_i, y_j) = \int_c^d F(x_i, y)\, dy = A(x_i) \tag{7.8}$$

En (7.8), los valores $x_1, \ldots, x_n$ son constantes. Para cada valor constante x_i, se construye la función $h(y) = F(x_i, y)$ que es continua en $[c, d]$. En la Figura 7.11(a) hemos representado

la gráfica de una superficie $z = F(x, y)$ definida en $D = [a, b] \times [c, d]$. En la Figura 7.11(b), hemos tomado un valor $x_i \in [a, b]$ y hemos representado gráficamente la función $h(y) = F(x_i, y)$ con $y \in [c, d]$. Si ahora integramos la función $h(y) = F(x_i, y)$ en $[c, d]$, obtenemos un valor $A(x_i)$ que depende de x_i. Si $F(x, y) \geq 0$, dado un valor fijo $x_i \in [a, b]$, la función $A(x_i)$ nos da el área limitada superiormente por la curva $h(y) = F(x_i, y)$ en el intervalo $[c, d]$, como aparece en la Figura 7.11(c).

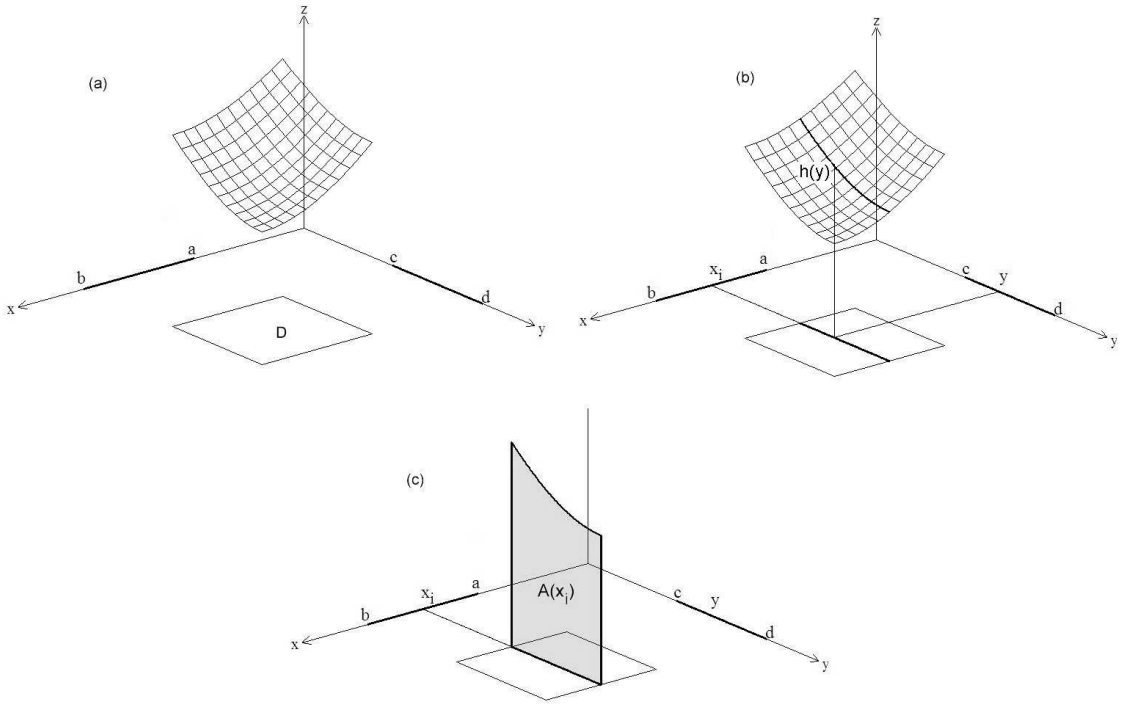

Figura 7.11: Caso general de integración

Entonces, (7.7) quedará:

$$\overline{F} = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} h\, A(x_i)$$

Pero ahora aplicamos idéntico razonamiento a la función $A(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} h\, A(x_i) = \int_a^b A(x)\, dx$$

Con lo cual:

$$\overline{F} = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \left(\int_c^d F(x, y)\, dy \right) dx$$

Y en cuanto al volumen V del sólido limitado superiormente por la superficie $z = F(x, y)$ e inferiormente por el recinto $D = [a, b] \times [c, d]$, si $F(x, y) \geq 0$, ver Figura 7.12:

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d F(x, y)\, dy \right) dx$$

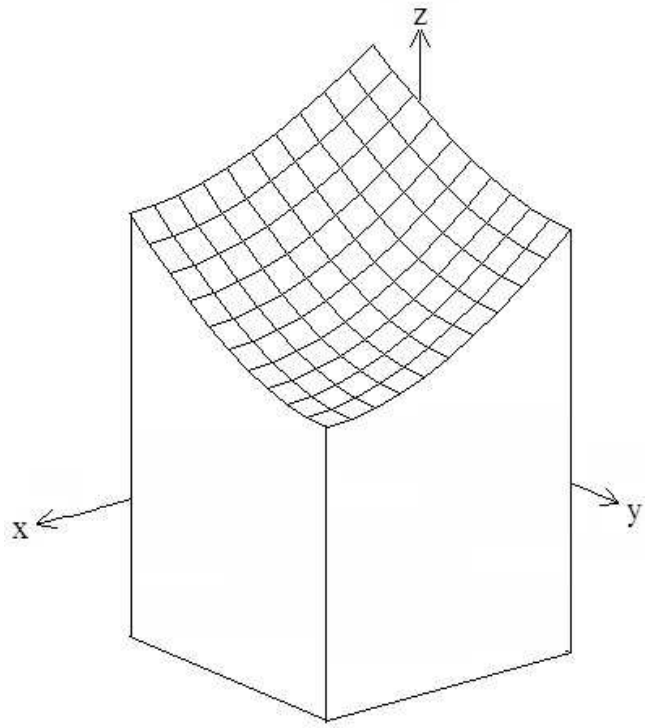

Figura 7.12: Volumen

Vamos a aplicar estas nuevas ideas a la función con la que hemos trabajado en este apartado, $F(x, y) = xy+1$, $D = [0, 2] \times [0, 1]$. Recuerda que aplicando un método "artesanal" (¡y trabajoso!), hemos comprobado que $\overline{F} = 3/2$ y $V = 3$. Vamos a verificar este resultado empleando el nuevo método que acabamos de desarrollar.

$$V = \int_0^2 \left(\int_0^1 (xy + 1)\, dy \right) dx \tag{7.9}$$

Calculemos la integral interior para obtener la función $A(x)$ con $x \in [0, 2]$:

$$\int_0^1 (xy + 1)dy = \frac{1}{2}xy^2 + y\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}x + 1 = A(x)$$

La Figura 7.13 muestra la superficie definida por $z = xy + 1$ en $D = [0, 2] \times [0, 1]$ y la función $h(y) = F(x, y)$, que es una recta de pendiente x para cada valor fijo x. Para cada x, $A(x)$ es el área limitada superiormente por la gráfica de $h(y)$ con $y \in [0, 1]$ (área de la región sombreada en la Figura 13)

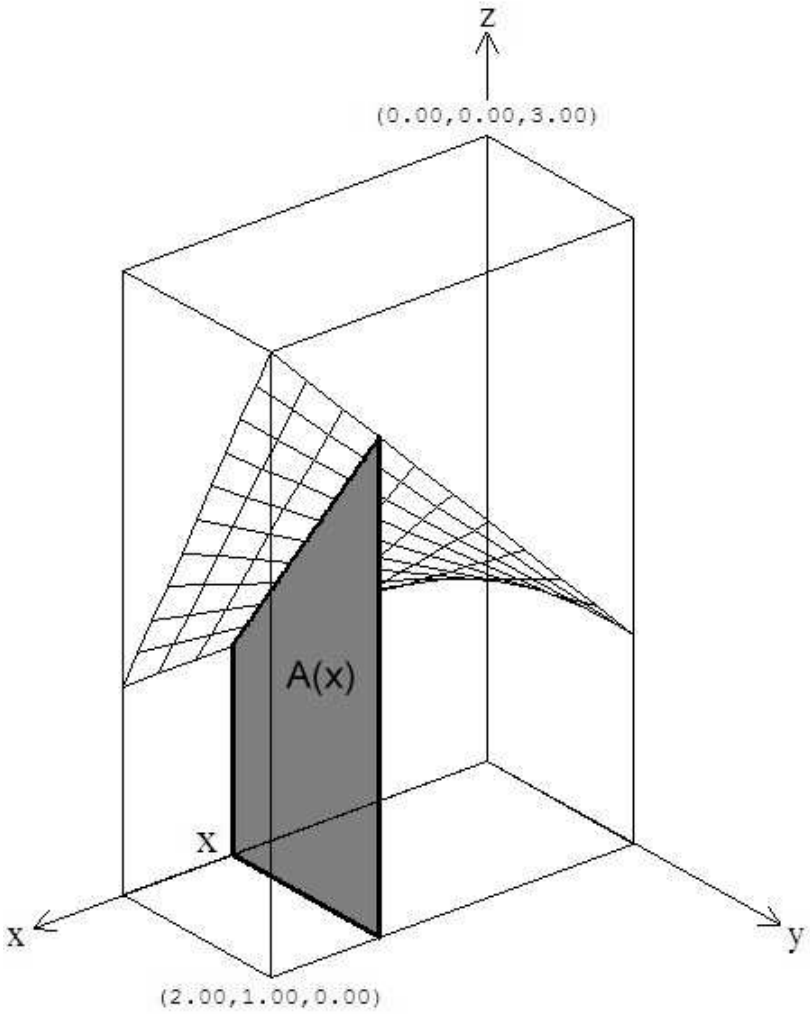

Figura 7.13: Cálculo para el caso $xy + 1$

Y ahora vamos a realizar la integral exterior de (7.8):

$$\int_0^2 A(x)dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx = \frac{1}{4}x^2 + x\Big|_{x=0}^{x=2} = 3$$

Y también $\overline{F} = 3/2$. Como ves, hemos obtenido idéntico resultado, pero de un modo mucho más sencillo. Dada una función continua $F(x, y)$ definida en un dominio rectangular

$D = [a, b] \times [c, d]$, para calcular $\overline{F}$:

$$\overline{F} = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \left(\int_c^d F(x, y)\, dy \right) dx$$

Y si $F(x, y) \geq 0$ en D, el volumen V limitado superiormente por la gráfica de $F(x, y)$ e inferiormente por el dominio D, se tiene:

$$V = (b-a)(d-c)\overline{F}$$

(ec 32)

Pues bien, hemos llegado así al concepto de integral doble y al concepto de valor medio que se deriva de él.

Definición 7.1 *La integral doble de una función $F(x, y)$ continua en $D = [a, b] \times [c, d]$, es el valor*

$$\iint_D F(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d F(x, y)\, dy \right) dx$$

Definición 7.2 *El valor medio de una función $F(x, y)$ continua en D=$[a, b]x[c, d]$, es el valor*

$$\overline{F} = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \iint_D F(x, y)\, dx\, dy$$

Ejercicio 7.3 *¿Qué ocurre si realizamos la doble integración de $F(x, y)$ pero en el orden contrario, la integral interior respecto a x y la exterior respecto a y? Interpreta gráficamente el significado de este cambio en el orden de integración, de un modo similar al de la Figura 7.11. Cambia el orden de integración en el ejemplo $F(x, y) = xy + 1$, $D = [0, 2] \times [0, 1]$. Demuestra que en general*

$$\iint_D F(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d F(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b F(x, y)\, dx \right) dy$$

Ejercicio 7.4 *Enuncia y demuestra todas las propiedades que puedas del concepto de integral doble, basándote en las propiedades de la integral de una variable. Por ejemplo, ¿son ciertas las siguientes igualdades?*

$$\iint_D K\, F(x, y)\, dx\, dy = K \iint_D F(x, y)\, dx\, dy$$

$$\iint_D (F(x, y) + G(x, y))\, dx\, dy = \iint_D F(x, y)\, dx\, dy + \iint_D G(x, y)\, dx\, dy$$

Ejercicio 7.5 *Supongamos que tenemos dos superficies definidas por sendas funciones $F(x, y)$, $G(x, y)$, continuas en $D = [a, b] \times [c, d]$. Supongamos que $F(x, y) \geq G(x, y)$ en D. Interpreta el significado del siguiente valor:*

$$\iint_D (F(x, y) - G(x, y))\, dx\, dy$$

Ejercicio 7.6 *Calcula la integral doble en el recinto $D = [a, b] \times [c, d]$ de la función constante $F(x, y) = 1$. Sabiendo que el valor resultante es el volumen de un sólido, ¿cómo interpretas el resultado obtenido?*

Ejercicio 7.7 *Si una función $F(x, y)$ es constante en $D = [a, b] \times [c, d]$, ¿cuál será su valor medio? Verifica el resultado haciendo el cálculo.*

Ejercicio 7.8 *. Recuerda el teorema de la media para funciones de una variable. Si $y(x)$ es una función continua definida en $[a, b]$, entonces $y(x)$ alcanza en $[a, b]$ su valor medio. Es decir, existe un cierto $w \in [a, b]$ tal que*

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x)\, dx = y(w)$$

Pues bien, en este ejercicio se trata de enunciar y demostrar este resultado para funciones continuas definidas en dominios de la forma $D = [a, b] \times [c, d]$. Para la función $F(x, y) = xy + 1$ definida en $[0, 2] \times [0, 1]$ (cuyo valor medio es $\overline{F} = 3/2$), calcula y representa gráficamente el conjunto de puntos $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 1]$ tales que $F(x, y) = 3/2$. Observa que este conjunto de puntos es una curva de nivel de $F(x, y)$.

Ejercicio 7.9 *Las figuras 7.14(a,b) muestran dos vistas de la superficie definida por la función $F(x, y) = 1 + 0.15x^2 \operatorname{sen}(\pi y/6)$, $D = [0, 6] \times [0, 6]$. Calcula el volumen V limitado superiormente por la superficie e inferiormente por D. Calcula el valor medio $\overline{F}$ de $F(x, y)$. Recuerda que, para funciones de una variable, las áreas limitadas por la gráfica situadas por encima y por debajo del valor medio son iguales (ver Figura 7.14(c)). La Figura 7.14(d) muestra la gráfica de $F(x, y)$ cortada con el plano $z = \overline{F}$. Las figuras 7.14(e,f) muestran dos vistas en las que hemos añadido la curva de nivel $F(x, y) = \overline{F}$. ¿Eres capaz de conjeturar una propiedad similar para funciones de dos variables?*

Ejercicio 7.10 *La Figura 7.15 muestra un mapa topográfico de un monte en el que se sospecha que hay yacimientos de carbón. Las cotas de altura se expresan en metros sobre el nivel del mar. Ya que se planea explotar todo el monte, calcula su volumen aproximado.*

7.3. Integral doble en un dominio cualquiera

Hasta ahora hemos trabajado funciones continuas $F(x, y)$ definidas en dominios rectangulares de la forma $D = [a, b] \times [c, d]$. Sin embargo, en las aplicaciones reales las funciones pueden estar definidas en dominios no rectangulares. Por ejemplo, nos puede interesar estudiar la temperatura $T(x, y)$ sobre cada punto (x, y) de la superficie de una plancha metálica, y esta plancha puede ser circular. ¿Cómo calcularemos entonces el valor medio de temperatura?

Observa la Figura 7.16. Supongamos que el dominio D de la función $F(x, y)$ está definido mediante dos funciones $f(x) \leq g(x)$ continuas en $[a, b]$. Vamos a aplicar las mismas ideas que nos han llevado en el apartado anterior a definir el concepto de integral doble de $F(x, y)$ en D.

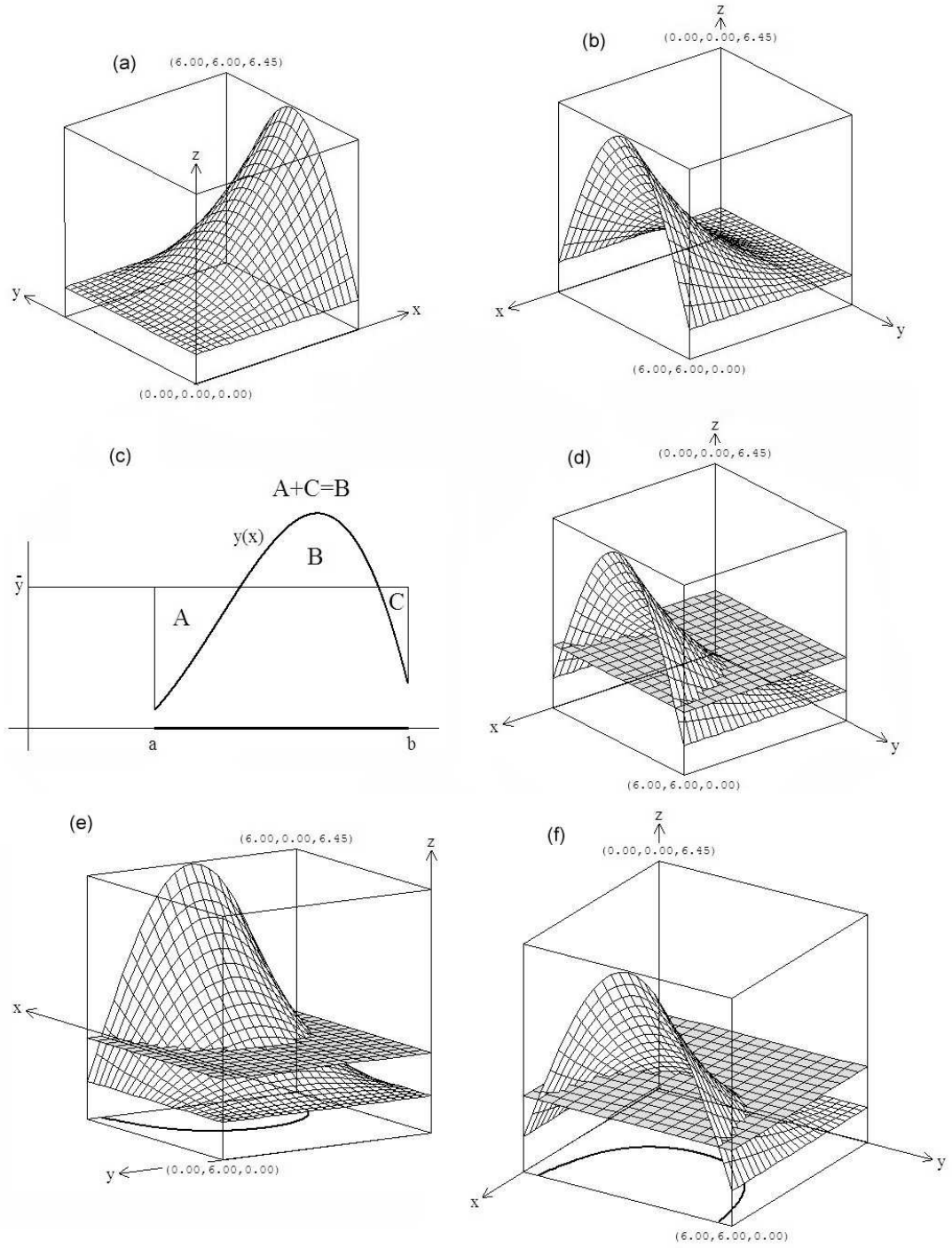

Figura 7.14: Conjetura del valor medio

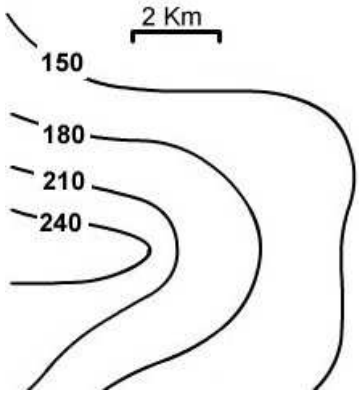

Figura 7.15: Monte

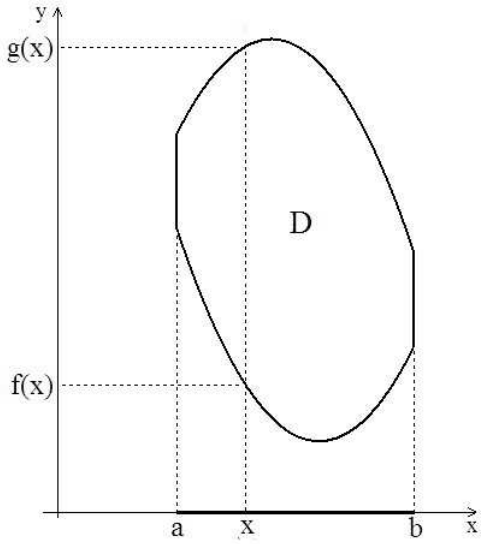

Figura 7.16: Dominio arbitrario

La Figura 7.17 muestra dos vistas de cierta superficie $z = F(x, y)$, $(x, y) \in D$. Como puede verse, para cada valor fijo de $x \in [a, b]$, el valor de y se encuentra en el intervalo $[f(x), g(x)]$.

Para dominios rectangulares, recuerda que fue muy sencillo descomponer D en pequeños rectángulos. Pues bien, la idea consiste en trazar un retículo que cubra nuestro dominio D, y tomar sólo los rectángulos totalmente contenidos en D. Observa la Figura 7.18. Hemos tomado un retículo cada vez más fino, y hemos sombreado los rectángulos interiores a D.

Es necesario que los rectángulos $R_1, R_2, \ldots, R_n$ estén contenidos en D porque el siguiente paso es tomar un punto cualquiera $P_i = (x_i, y_i) \in R_i$ y evaluar $F(P_i) = F(x_i, y_i)$. Si A_i es

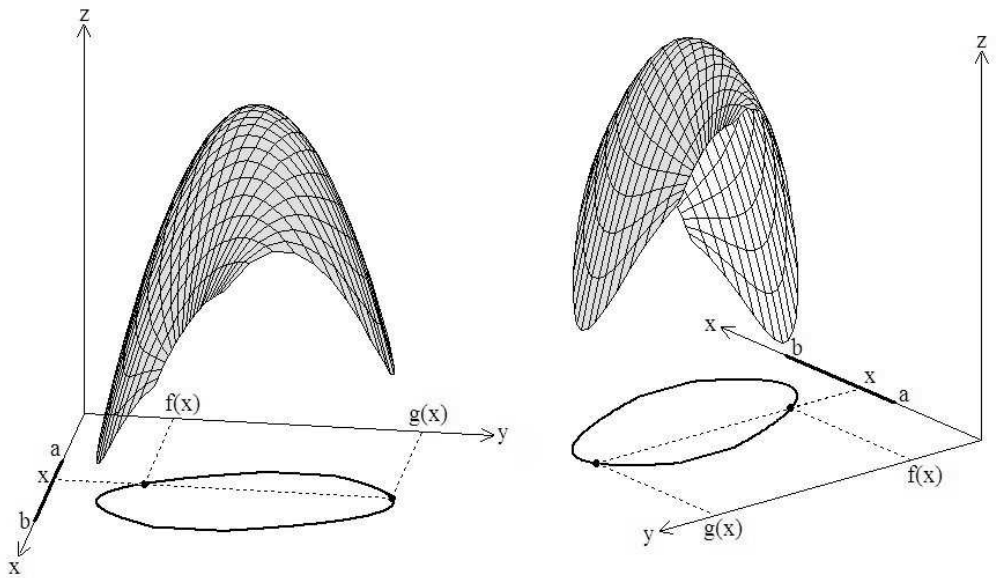

Figura 7.17: Dominio arbitrario de una superficie

al área de R_i, y R es el área de D, calculamos:

$$F_n = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\, A_1 \tag{7.10}$$

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\, A_1 \tag{7.11}$$

El valor F_n de (7.10) es una aproximación al valor medio $\overline{F}$ de $F(x, y)$. Si $F(x, y) \geq 0$ en D, el valor V_n de (7.11) es una aproximación al volumen V limitado superiormente por la gráfica de $z = F(x, y)$ e inferiormente por el dominio D. Ahora sólo nos falta tomar $n \to \infty$ para obtener $\overline{F}$ y V:

$$\overline{F} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\, A_1 \qquad\qquad V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\, A_1 \tag{7.12}$$

Como sucedía para dominios rectangulares, las expresiones (7.12) son difíciles de aplicar en la práctica. Afortunadamente, también va a ser posible evaluar (7.12) mediante una doble integración, de un modo muy parecido a como se hace para dominios rectangulares. Veamos cómo hacerlo:

1. Tomamos un punto cualquiera fijo $x \in [a, b]$. Para que (x, y) se encuentre en D, es necesario que $y \in [f(x), g(x)]$. La Figura 7.19(a) muestra este segmento desde $(x, f(x))$ hasta $(x, g(x))$ para cierto valor fijo $x \in [a, b]$.

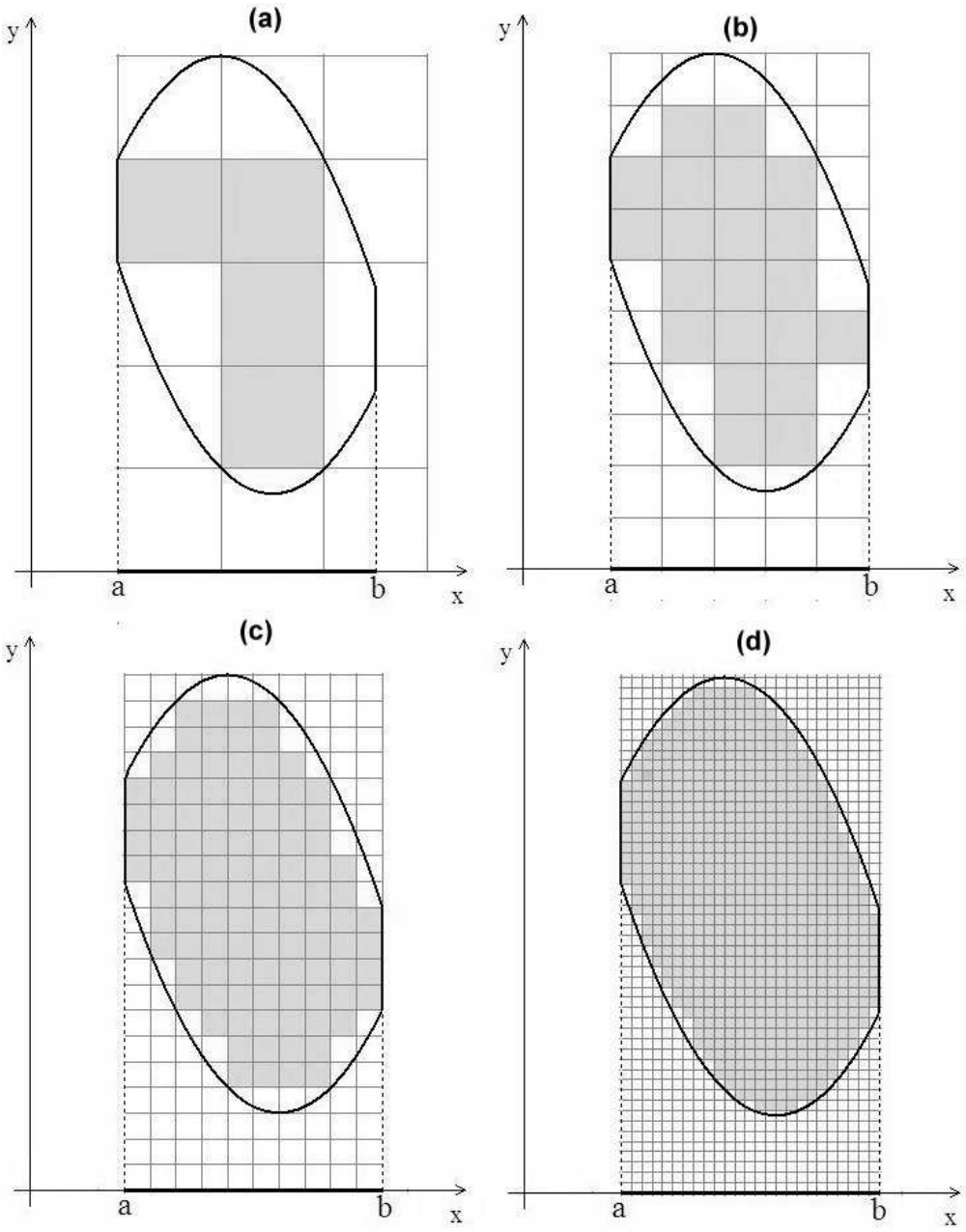

Figura 7.18: Particiones de un dominio

2. Para cada valor fijo de $x \in [a, b]$, la función $h(y) = F(x, y)$ es una función de la variable y, definida y continua en el intervalo $[f(x), g(x)]$. La Figura 7.19(a) muestra la representación de una de esas funciones.

3. Para cada valor fijo de $x \in [a, b]$, integramos en el intervalo $[f(x), g(x)]$ esta función

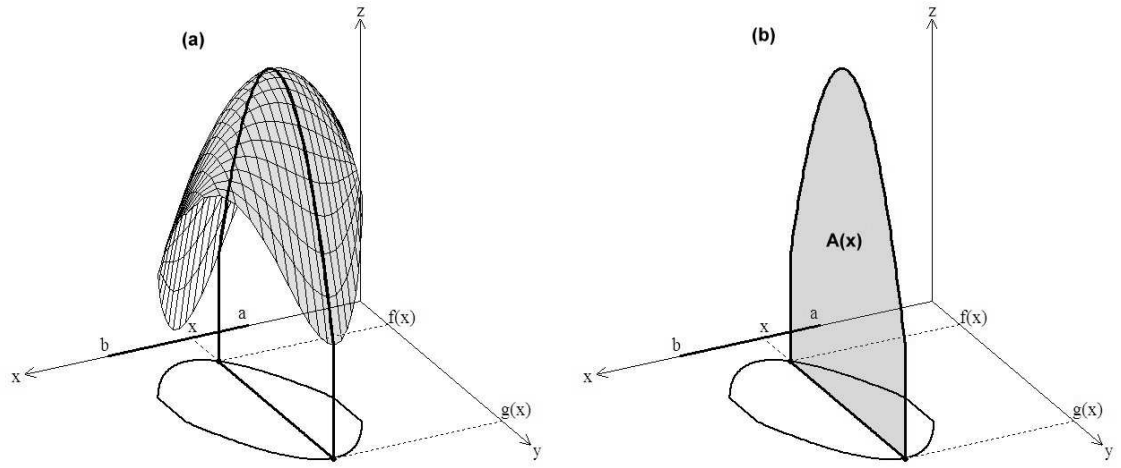

Figura 7.19: Caso general de $A(x)$

$h(y) = F(x, y)$. Es decir, calculamos

$$A(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} F(x, y)\, dy \tag{7.13}$$

La expresión (7.13) no es nada misteriosa: simplemente se integra $F(x, y)$ respecto a la variable y en el intervalo $[f(x), g(x)]$. Observa que en integrando de (7.13), x es constante. Evidentemente, el resultado de esta integración es una función sólo de x, a la que denotamos por $A(x)$. Si $F(x, y) \geq 0$, para cada x fijo, el valor $A(x)$ es el área limitada superiormente por la curva $h(y) = F(x, y)$ con $y \in [f(x), g(x)]$. La Figura 7.19(b) muestra sombreada éste área para cierto valor de x.

4. Ahora integramos $A(x)$ en $[a, b]$, con lo cual obtenemos los valores exactos de $\overline{F}$ y V:

$$\overline{F} = \frac{1}{R} \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x, y)\, dy \right) dx$$

$$V = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x, y)\, dy \right) dx$$

Observa la Figura 7.20(a). Hemos tomado el retículo de la Figura 7.18(a), y hemos aproximado el volumen V mediante la suma de los volúmenes de cuatro prismas rectangulares. Refinando el retículo (Figuras 7.18(b,c,d)) la aproximación converge al valor exacto del volumen V del sólido limitado superiormente por la superficie $z = F(x, y)$, $(x, y) \in D$. La Figura 7.20(b) representa este sólido.

Ya tenemos las definiciones generales de integral doble y valor medio. Si $F(x, y)$ es continua en un dominio D definido por las funciones, continuas en $[a, b]$, $f(x)$ y $g(x)$ ($f(x) \leq g(x)$), y R es el área de D, se tiene:

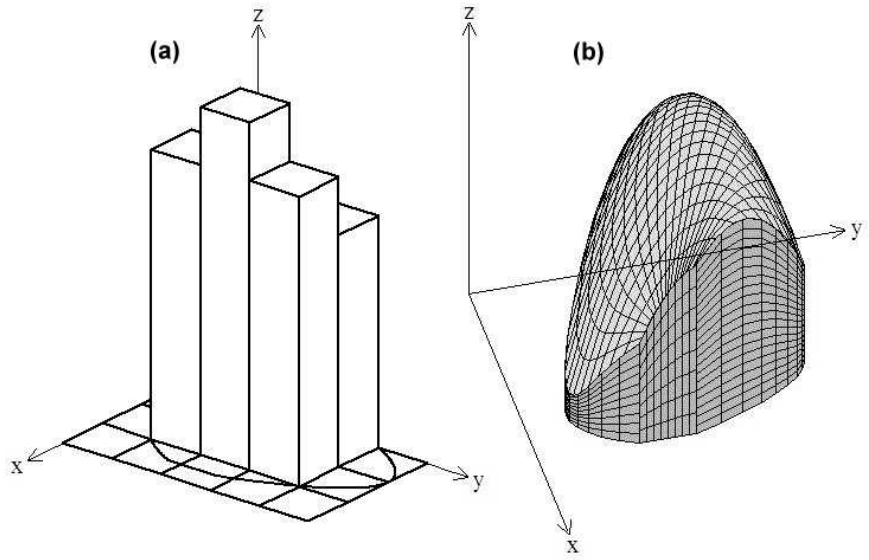

Figura 7.20: Volumen aproximado

Definición 7.3 *La integral doble de $F(x,y)$ en D es el valor*

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)\,dy \right) dx \tag{7.14}$$

Definición 7.4 *El valor medio de la función $F(x,y)$ en D es el valor*

$$\overline{F} = \frac{1}{R} \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)\,dy \right) dx \tag{7.15}$$

Sólo nos queda un pequeño detalle. Para aplicar (7.15), es necesario calcular previamente el valor R el área de D. ¿Cómo puede hacerse? Una posibilidad es utilizar lo que sabemos de integración de una variable:

$$R = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

Sin embargo, el siguiente ejercicio (similar al ejercicio 7.6) muestra cómo utilizar también la integral doble para calcular R.

Ejercicio 7.11 *Calcula la integral doble en el recinto D de la función constante $F(x,y) = 1$. Sabiendo que el valor resultante es el volumen de un sólido, ¿cómo interpretas el resultado obtenido?*

Ejercicio 7.12 *Considerar la función $F(x,y) = x+y$ definida en el recinto D limitado por las curvas $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3+1$, $x \in [0,1]$. Calcula el valor medio $\overline{F}$ de $F(x,y)$ en D y el volumen V del sólido limitado superiormente por la gráfica de $z = F(x,y)$, $(x,y) \in D$. Representa gráficamente el conjunto de puntos $(x,y) \in D$ en los que la función $F(x,y)$ alcanza su valor medio.*

Ejercicio 7.13 *Al igual que para dominios rectangulares, en la integral doble es posible cambiar en el orden de integración. De hecho, a veces la integral puede ser difícil o imposible de calcular dependiendo del orden de integración elegido. Observa la Figura 7.21. Si el dominio D de $F(x,y)$ está definido por dos funciones continuas $x = f(y)$, $x = g(y)$, $f(y) \leq g(y)$, $y \in [c,d]$, siguiendo el mismo procedimiento se demuestra que*

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{f(y)}^{g(y)} F(x,y)\,dx \right) dy$$

Utiliza este resultado para evaluar la integral de $F(x,y) = \mathrm{e}^{x^2}$, siendo D el recinto limitado por las funciones $f(x) = 0$, $g(x) = x$, $x \in [0,1]$ (elige el orden de integración adecuado).

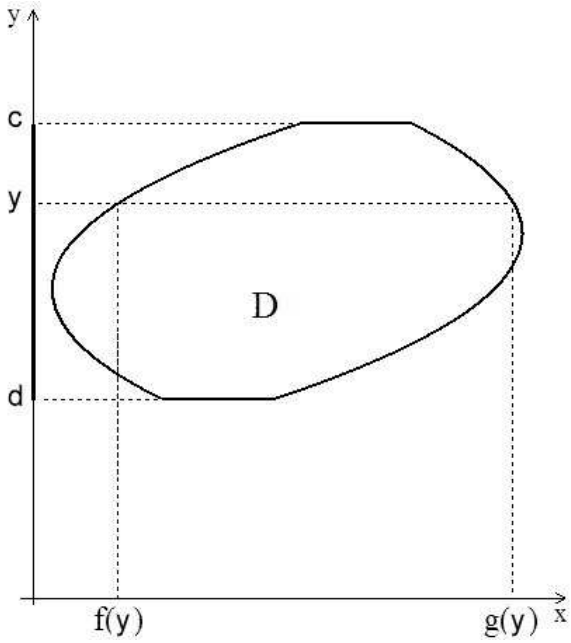

Figura 7.21: Cambio de orden de integración: Dominio arbitrario

Ejercicio 7.14 (similar al ejercicio 7.4) *Enuncia y demuestra todas las propiedades que puedas del concepto general de integral doble, basándote en las propiedades de la integral de una variable.*

Ejercicio 7.15 (similar al ejercicio 7.5) *Supongamos que tenemos dos superficies definidas por sendas funciones $F(x,y)$, $G(x,y)$, continuas en D. Supongamos que $F(x,y) \geq G(x,y)$ en D. Interpreta el significado del siguiente valor:*

$$\iint_D (F(x.y) - G(x,y))\, dx\, dy$$

7.4. Cambio de variables de integración

Acabamos de ver cómo el cálculo de la integral doble de una función continua en $D \subset \mathbb{R}^2$ se reduce al cálculo de dos integrales de variable real. Sin embargo, pronto nos encontramos con un problema que ya se nos presentó en la integración de una función de una variable $y(x)$ continua en $[a,b]$: ¿cómo calcular la integral si aplicamos un cambio de variable? Un cambio de variable adecuado podía simplificar en gran medida los cálculos de la integral de $y(x)$. Pues bien, lo mismo ocurre para funciones de dos variables. Por ejemplo, si el recinto de integración D es el círculo centrado en $(0,0)$ y radio 1 (ver Figura 7.22(a)), las funciones que limitan inferior y superiormente el recinto D contienen raíces cuadradas, lo cual puede complicar en gran medida la integración:

$$\begin{cases} f(x) = -\sqrt{1-x^2} \\ g(x) = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \qquad x \in [-1,1]$$

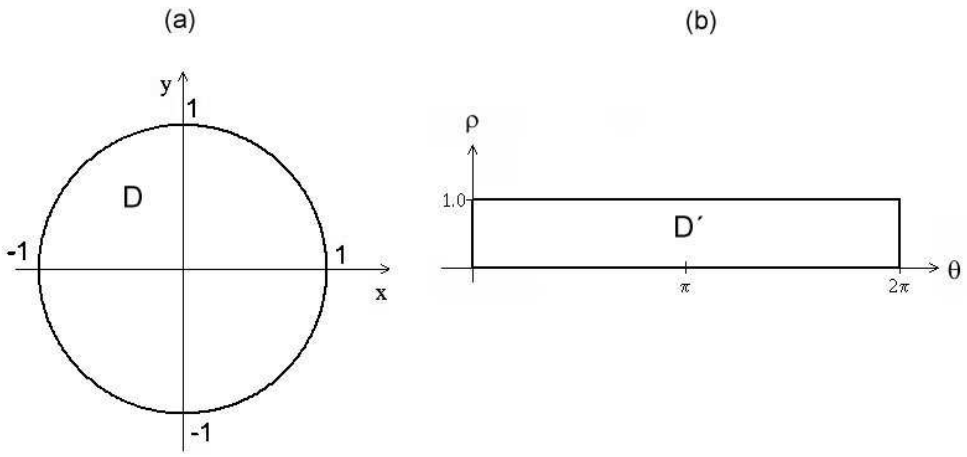

Figura 7.22: Cambio a polares

En cambio, este recinto tiene una descripción mucho más sencilla en coordenadas polares: si $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, simplemente el nuevo dominio de integración D' viene dado por $\theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0,1]$. Pasamos de integrar en un círculo D (Figura 7.22(a)) a integrar en un rectángulo D' (Figura 7.22(b)). La pregunta es, ¿cómo se aplica un cambio de variables de

integración en una integral doble? Vamos a recordar en primer lugar cómo se aplicaban los cambios de variable para integrar funciones de una variable real:

Supongamos que $y(x)$ es una función continua en $D = [a, b]$. Un cambio de variable de integración consiste en sustituir la variable x por una cierta función $x = h(t)$ definida en otro dominio $D' = [\alpha, \beta]$, que sea derivable, con derivada continua, tal que $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$. Entonces:

$$\int_a^b y(x)\,dx = \int_\alpha^\beta y(h(t))h'(t)\,dt \tag{7.16}$$

Observa en la Figura 7.23 el modo en que a cada $t \in D'$ le corresponde un valor $x \in D$.

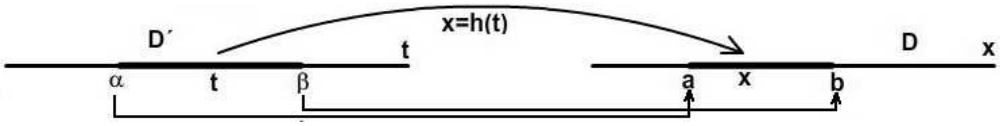

Figura 7.23: Cambio de variable en $\mathbb{R}$

Y ahora observa la Figura 7.24, que representa un cambio de variables en dos dimensiones. Las variables (x, y) van a sustituirse por las nuevas variables (u, v). El cambio de variables viene dado por dos funciones de dos variables $x = h(u, v)$, $y = g(u, v)$ definidas en D', con derivadas parciales continuas, de tal modo que a cada punto $(x, y) \in D$ le corresponda un único $(u, v) \in D'$ y viceversa.

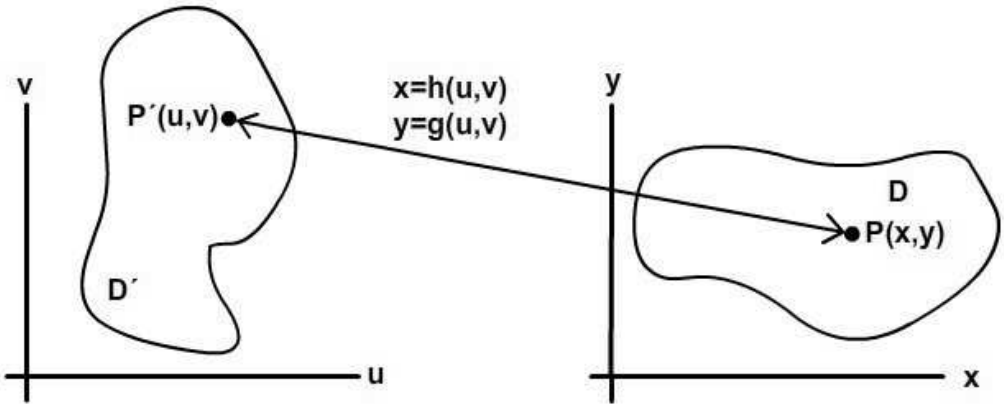

Figura 7.24: Cambio de variables en $\mathbb{R}^2$

Pues bien, si se cumplen todas las hipótesis anteriores, la expresión (7.17) indica cómo calcular la integral doble utilizando las nuevas variables (u, v) e integrando en el nuevo recinto de integración D':

$$\iint_D F(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} F(h(u, v), g(u, v))\,|J|\,du\,dv \tag{7.17}$$

donde

$$J = \begin{vmatrix} h_u(u,v) & h_v(u,v) \\ g_u(u,v) & g_v(u,v) \end{vmatrix} \tag{7.18}$$

Observa que en la expresión del cambio de variable (7.17), aparece el valor absoluto de J. Según se ve en (7.18), J es el determinante formado por las derivadas parciales de las funciones $h(u,v)$ y $g(u,v)$. J se llama "determinante Jacobiano". J es una función de las variables u y v, viene a ser un factor similar al factor $h'(t)$ que aparece en la expresión (7.16) del cambio de variable para integración de una variable.

Ejercicio 7.16 *Supongamos que D es un recinto limitado por las funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a,b]$. Se trata de probar que es posible aplicar un cambio de variables $x(u,v)$, $y(u,v)$ de modo que el nuevo recinto de integración sea el cuadrado $D' = [0,1] \times [0,1]$ (ver Figura 7.25).*

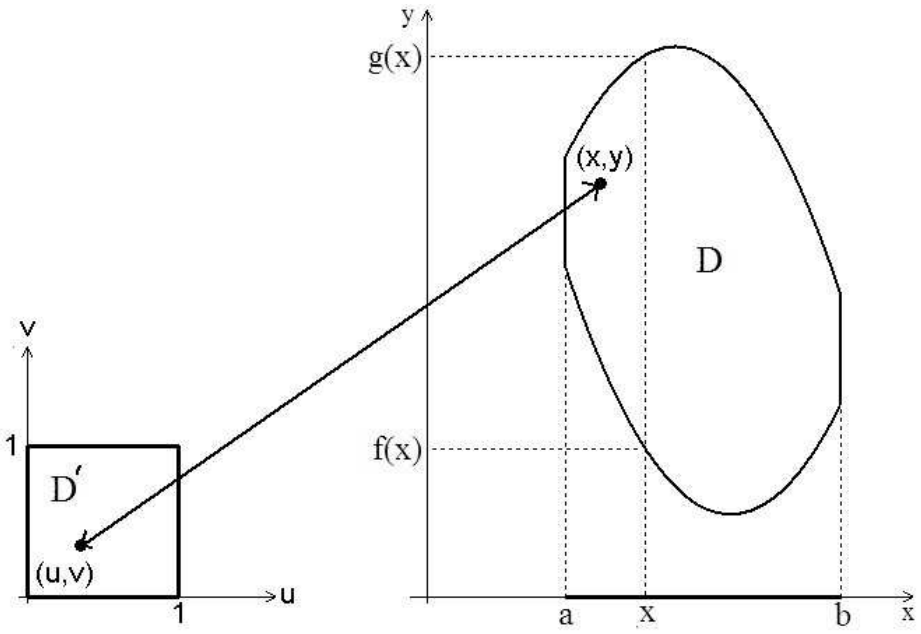

Figura 7.25: Ejercicio 7.16

Esta propiedad será muy interesante cuando utilicemos paquetes de software como Winplot, que permiten calcular numéricamente integrales dobles pero sólo en recintos rectangulares. Con el cambio de variables que vamos a describir, podemos conseguir que en recinto de integración sea el cuadrado $D' = [0,1] \times [0,1]$.

Considera el cambio de variables:

$$x(u,v) = a + (b-a)u$$
$$y(u,v) = v(F(x(u)) - G(x(u))) + G(x(u))$$

con $u \in [0,1]$, $v \in [0,1]$.

1. *Demostrar que es un cambio de variable admisible (es decir, a cada* (u,v) *le corresponde un único* (x,y) *y viceversa, y además* $x(u,v)$, $y(u,v)$ *son funciones continuas con derivadas parciales continuas).*

2. *Calcular el Jacobiano* J *del cambio de variable y demostrar que* $J \neq 0$.

3. *Aplicando este cambio de variables, evaluar la integral doble de* $F(x,y) = x + y$ *en el recinto* D *definido por las funciones* $f(x) = (x-2)(x-4)$, $g(x) = 0.5x$, $x \in [2,4]$ *(ver Figura 26).*

4. *Verificar el resultado, calculando directamente la integral doble de* $F(x,y) = x + y$ *en* D

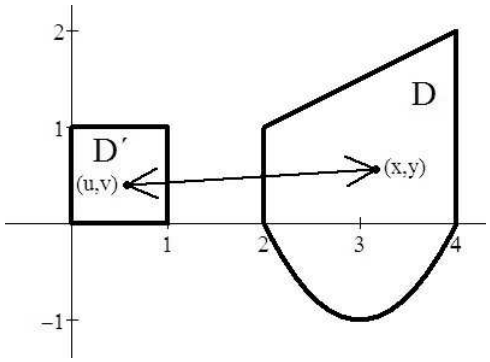

Figura 7.26: Ejercicio 7.16(3)

7.5. Cambio de variables a coordenadas polares y generalizadas

Como hemos explicado en el apartado anterior, los dominios de integración circulares son mucho más manejables empleando coordenadas polares. En el siguiente ejercicio debes explicar cómo hay que aplicar este cambio de variables.

Ejercicio 7.17 *Supongamos que* $F(x,y)$ *es una función continua en* D *y que aplicamos el cambio de variables* $x = \rho\cos\theta, y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, *obteniendo un nuevo recinto de integración* D'.

1. *Demuestra que se trata de un cambio de variables admisible.*

2. *Demuestra que el determinante Jacobiano vale en este caso* $J=\rho$.

3. *Escribe la expresión de cálculo de la integral doble de* $F(x,y)$ *en* D, *aplicando el cambio a coordenadas polares.*

4. *Si $F(x,y) = x^2+y^2$, calcula la integral doble de $F(x,y)$ en cada uno de los recintos que aparecen en la Figura 7.27, representando gráficamente en cada caso el nuevo recinto de integración D' (como en la figura 7.22).*

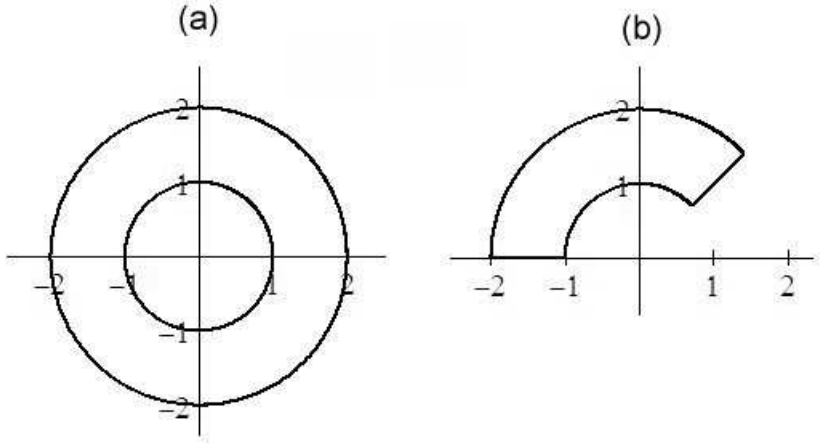

Figura 7.27: Ejercicio 7.17

Ejercicio 7.18 (coordenadas polares generalizadas.) *Si el recinto D no es circular sino elíptico, el cambio de variables a coordenadas polares no resulta útil. Supongamos que el recinto D viene definido por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. En este caso se puede aplicar el llamado cambio de variables a coordenadas polares generalizadas, definido por $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$. Calcula el Jacobiano de este cambio. Si $F(x,y) = 2xy$, aplica este cambio de variables para calcular la integral doble de $F(x,y)$ en cada uno de los recintos que aparecen en la Figura 28 (definidos por elipses o fragmentos de elipses), representando gráficamente en cada caso el nuevo recinto de integración D' (como en la figura 7.22).*

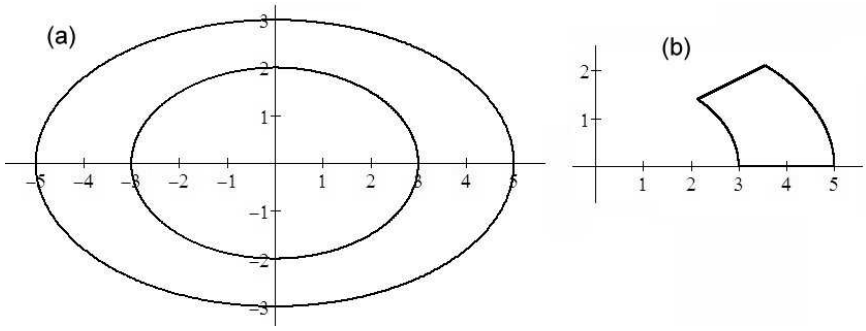

Figura 7.28: Ejercicio 7.18

7.6. Integral doble de funciones continuas por subdominios

Hasta ahora hemos considerado la integral doble de una función $F(x, y)$ continua en un dominio D. Sin embargo, a veces la función $F(x, y)$ está definida en un dominio de la forma $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 son recintos cuya zona común tiene área 0 y $F(x, y)$ es continua en cada uno de ellos individualmente, pero no es continua en D. Observa esta situación en el ejemplo de la Figura 7.29.

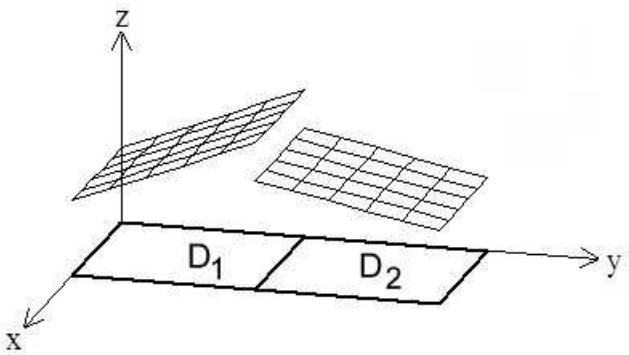

Figura 7.29: Unión de dominios

Si, por ejemplo, $F(x, y)$ es una distribución de temperatura sobre una placa D, es físicamente muy difícil que $F(x, y)$ sea discontinua. Ahora bien, la discontinuidad de $F(x, y)$ es frecuente, por ejemplo, cuando $F(x, y)$ representa la concentración de materia en cada punto $(x, y) \in D$. El recinto D puede ser una pieza construida con diferentes materiales (acero, caucho, aire, plástico, etc) que tengan densidades de masa muy diferentes. Observa la Figura 7.30. Se trata de la función de densidad puntual de materia de la superficie de una moneda de euro. Estas monedas están formadas por un disco interior de cobre-níquel y una corona circular de níquel-latón. Las densidades de estos materiales son aproximadamente 8.9 gr/ml y 8.4 gr/ml respectivamente, de modo que la función de densidad será discontinua, como aparece en la Figura 7.29. Si $(x, y) \in D_1$ $F(x, y) = 8.4$, mientras que si $(x, y) \in D_2$ $F(x, y) = 8.9$.

En estos casos, podemos definir la integral doble de la función $F(x, y)$ como sigue:

$$\iint_D F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} F(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} F(x, y)\, dx\, dy$$

con lo cual el cálculo de la integral doble en D se reduce a la suma de dos integrales dobles. Esta definición puede usarse para el cálculo del valor medio de una función $F(x, y)$, para el cálculo del volumen y en todas las aplicaciones adicionales de la integral doble que estudiaremos a continuación.

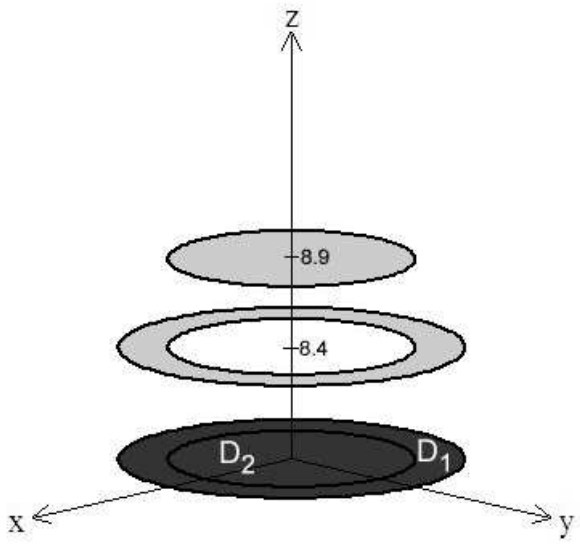

Figura 7.30: Diversas densidades

7.7. Otras aplicaciones del concepto de integral doble

Hemos visto cómo la integral doble de una función continua $F(x, y)$ en un dominio D puede emplearse para calcular el valor medio de $F(x, y)$ y el volumen del sólido limitado superiormente por la gráfica de la superficie $z = F(x, y)$ e inferiormente por el plano XY, $(x, y) \in D$. Pero hay otros parámetros importantes asociados a una función $F(x, y)$ que también pueden calcularse mediante una integral doble. Esta es la situación general en la que podemos reconocer el concepto de integral doble:

1. Tenemos cierto recinto plano D, donde está definida cierta función $F(x, y)$.

2. Tomamos una colección de n rectángulos contenidos en D : R_1, $R_2, \ldots,$ R_n, de tal modo que a medida que n aumenta, la base y la altura de R_i tienden a 0 y vamos "cubriendo" con estos rectángulos la superficie del recinto D.

3. Calculamos el área A_i de cada rectángulo R_i

4. Tomamos un punto cualquiera $(x_i, y_i) \in R_i$.

5. En estas condiciones, se tiene

$$\iint_D F(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\, A_i \tag{7.19}$$

7.7.1. Cálculo del área de una superficie

Sabemos cómo calcular el área A de un recinto plano D como el de la Figura 7.31 mediante una integral doble:

$$A = \iint_D dx\,dy$$

También sabemos cómo emplear la integral de funciones de una variable para calcular el área de una superficie obtenida cuando una curva gira alrededor de un eje. Pero ahora nos ocupamos del problema general: el cálculo del área de una superficie definida por una función continua cualquiera $z = F(x, y)$, $(x, y) \in D$, como la de la Figura 7.31.

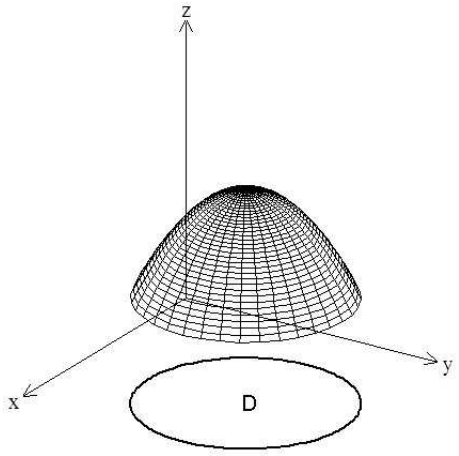

Figura 7.31: Área de una superficie

La idea consiste en aproximarnos a la superficie $z = F(x, y)$ mediante n fragmentos de planos tangentes, sumar las áreas de estos n fragmentos de plano y luego hacer que n tienda a infinito. Observa en la Figura 7.32 cómo a medida que aumentamos el número de fragmentos de planos, nos vamos aproximando más al área de la superficie.

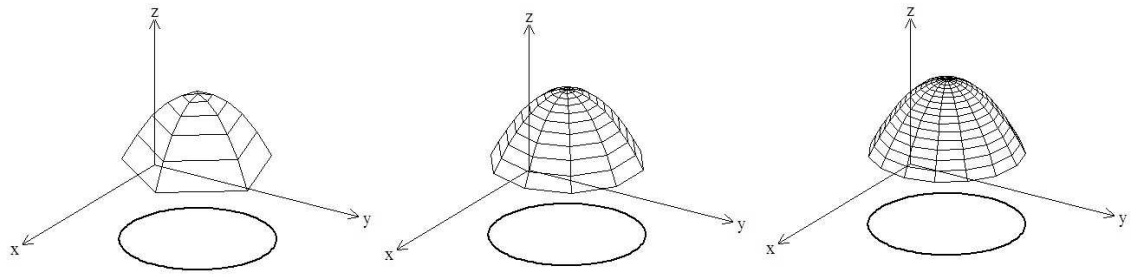

Figura 7.32: Aproximaciones de una superficie

Veamos cómo calcular el área de uno de esos trozos de plano tangente. Tomemos un punto cualquiera $(a, b) \in D$. Recuerda que la ecuación del plano tangente a la superficie $z = F(x, y)$ por el punto (a, b) es:

$$z = F(a, b) + (x - a)F_x(a, b) + (y - b)F_y(a, b) \tag{7.20}$$

Observa la Figura 7.33. Hemos representado un fragmento T del plano tangente correspondiente al rectángulo R de dimensiones h y k. Empleando (7.20), la coordenada z sobre el plano tangente de los vértices de R: $P(a + h, b)$, $Q(a, b + k)$ y $M(a + h, b + k)$ son:

$$\begin{aligned}
&P(a+h,b): && z = F(a,b) + h\,F_x(a,b)\\
&Q(a,b+k): && z = F(a,b) + k\,F_y(a,b)\\
&M(a+h,b+k): && z = F(a,b) + h\,F_x(a,b) + k\,F_y(a,b)
\end{aligned}$$

¿Cómo calcular el área A_T de T? Sería bueno que T fuera un paralelogramo porque entonces A_T sería el módulo del vector producto vectorial de u y v (ver Figura 7.33), $A_T = \|u \times v\|$. Pero comprobar que T es un paralelogramo es muy sencillo (hazlo como ejercicio, basta comprobar que n es paralelo a u y que w es paralelo a v).

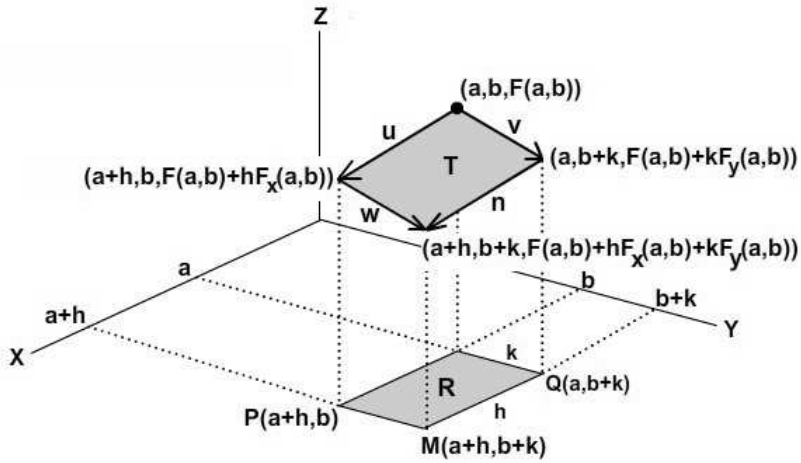

Figura 7.33: Rectángulo en el plano tangente

Así pues, Calculemos $A_T = \|u \times v\|$:

$$u = (h, 0, hF_x(a, b))$$
$$v = (0, k, kF_y(a, b))$$
$$u \times v = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & w \\ h & 0 & hF_x(a,b) \\ 0 & k & kF_y(a,b) \end{vmatrix} = -hk\,(F_x(a,b), F_y(a,b), -1) = -hk \cdot \nabla F(a,b)$$
$$A_T = \|u \times v\| = hk\sqrt{(F_x(a,b))^2 + (F_y(a,b))^2 + 1} \qquad (h, k > 0)$$

Pero el producto $A_R = hk$ es precisamente el área de R. Así pues:

$$A_T = A_R\sqrt{(F_x(a,b))^2 + (F_y(a,b))^2 + 1}$$

Recuerda que el plano tangente a una superficie $z = F(x,y)$ en un punto (a,b) es perpendicular al vector $(F_x(a,b), F_y(a,b), -1)$, y por eso el vector $u \times v$ es paralelo a $(F_x(a,b), F_y(a,b), -1)$. Así pues, obtenemos un bonito resultado: el área A_T del paralelogramo T es igual al área A_R del rectángulo R multiplicada por el módulo del vector perpendicular al plano tangente $(F_x(a,b), F_y(a,b), -1)$.

Bien, si ahora R es un rectángulo R_i del retículo con que dividimos D, (a,b) es el vértice superior izquierdo (x_i, y_i) de R_i y A_R es el área A_i de R_i, se tiene que el área S de la superficie será:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i\sqrt{(F_x(x_i,y_i))^2 + (F_y(x_i,y_i))^2 + 1} \tag{7.21}$$

Pero en la expresión (7.21) reconocemos que se trata de la integral doble en D de la función $H(x,y)$ construida a partir de $F(x,y)$:

$$H(x,y) = \sqrt{(F_x(x,y))^2 + (F_y(x,y))^2 + 1}$$

Es decir, el valor S del área de la superficie definida por $z = F(x,y)$, $(x,y) \in D$ es:

$$S = \iint_D \sqrt{(F_x(x,y))^2 + (F_y(x,y))^2 + 1}\, dx\, dy \tag{7.22}$$

Ejercicio 7.19 *¿Qué condiciones debe cumplir la función $F(x,y)$ para poder aplicar la expresión (7.22)?*

Ejercicio 7.20 *Supongamos que se tiene la función lineal $F(x,y) = Ax + By + D$ definida en un recinto D (ver Figura 7.34). Demuestra que el área de la superficie S es proporcional al área de D.*

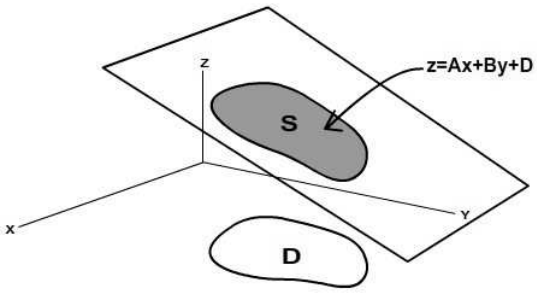

Figura 7.34: Ejercicio 7.20

7.7.2. Cálculo de la cantidad de materia contenida en una región plana

Otro problema que es posible resolver mediante la integral doble es el cálculo de la cantidad de materia M (masa) contenida en cierto recinto plano D. Supongamos que D es una región plana en cuya superficie se distribuye materia. Se supone que conocemos la función continua $F(x, y)$ definida en D que nos indica en cada punto (x, y) la concentración de materia. En valor de $F(x, y)$ se expresará en unidades de masa por unidad de superficie, por ejemplo, Kg/m^2 o mg/cm^2. En la representación gráfica de $F(x, y)$, la altura $z = F(x, y)$ nos indica el valor de concentración puntual de materia. Observa la Figura 7.35. Tomamos como siempre un retículo de la región D, un punto (x_i, y_i) de cada uno de los pequeños rectángulos R_i, y suponemos que la concentración de materia es constante en R_i e igual a $F(x_i, y_i)$. Entonces, si Ai es el área de R_i, la cantidad aproximada de materia contenida en R_i será $F(x_i, y_i) \cdot A_i$. Así pues:

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i) \cdot A_i \tag{7.23}$$

Pero en (7.23) reconocemos el concepto de integral doble de $F(x, y)$ en D, y por tanto:

$$M = \iint_D F(x, y)\, dx\, dy$$

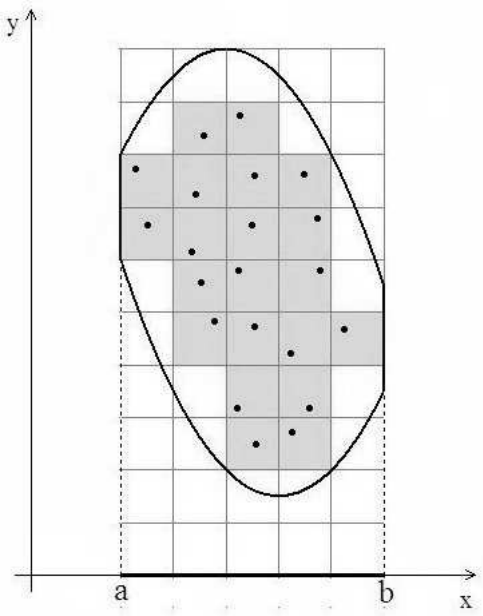

Figura 7.35: Reticulación en un dominio D

7.7.3. Cálculo del centro de gravedad de una región plana

Localizar el centro de gravedad $CG(x_c, y_c)$ o centro de masa de la región es útil en muchas situaciones porque nos permite tratar la región D como si toda su masa estuviera concentrada en dicho punto. Si, por ejemplo, D es una lámina rígida, podríamos mantenerla en equilibrio apoyada solamente sobre una punta colocada justo en su centro de gravedad (Figura 7.36).

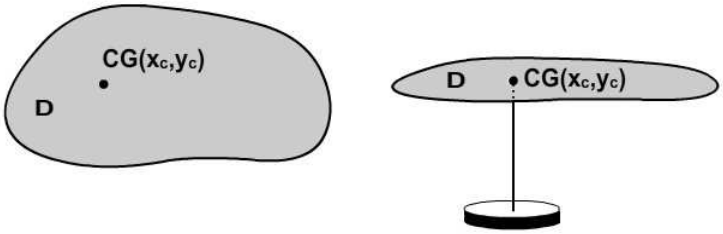

Figura 7.36: Centro de gravedad

Observa la Figura 7.37, representa un sistema formado por cuatro masas puntuales. ¿Cuál es su centro de gravedad $CG(x_c, y_c)$?

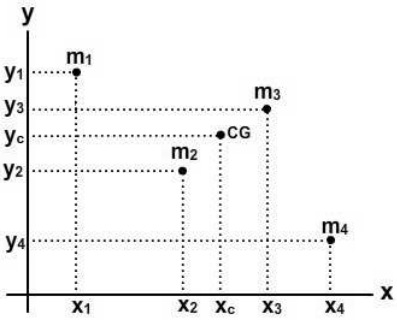

Figura 7.37: Centro de gravedad de 4 masas

La masa total es M=$m_1 + m_2 + m_3 + m_4$. La coordenada x_c es la media de las cuatro coordenadas x_1, x_2, x_3 y x_4, ponderando cada coordenada con el valor de su masa. Es decir:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4}{M}$$

Cuanto mayor sea una masa m_i, más "tira" de la media, aproximando x_c al valor x_i. Exactamente lo mismo ocurre para la coordenada y_c.

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + y_4 m_4}{M}$$

En general, puede hacerse la misma operación para calcular el centro de gravedad $CG(x_c, y_c)$ de un sistema formado por n masas puntuales. Si cada masa m_i se concentra en

el punto (x_i, y_i) $i = 1, \ldots, n$, entonces:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{M} \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{M} \tag{7.24}$$

Supongamos ahora que D es una región plana en cuya superficie se distribuye materia, y que $F(x, y)$ es la función definida en cada punto $(x.y) \in D$ que nos indica la concentración de materia en ese punto. Tomamos un retículo de la región D formado por n rectángulos $R_1, \ldots, R_n$ y un punto (x_i, y_i) de cada uno de los R_i. Si suponemos que la concentración de materia en cada R_i es constante y vale $F(x_i, y_i)$, llamando A_i al área de R_i, la cantidad de materia contenida en R_i será $m_i = F(x_i, y_i)A_i$. En estas condiciones, aplicando (7.24) obtenemos una aproximación de las coordenadas del centro de gravedad $CG(x_c, y_c)$ de D:

$$x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F(x_i, y_i) A_i}{\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i) A_i} \qquad y_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i F(x_i, y_i) A_i}{\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i) A_i}$$

Ahora tomamos límites cuando $n \to \infty$ y obtenemos los valores exactos de x_c e y_c:

$$x_c = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F(x_i, y_i) A_i}{\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i) A_i} \qquad y_c = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i F(x_i, y_i) A_i}{\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i) A_i} \tag{7.25}$$

Pero en las ecuaciones (7.25) reconocemos el concepto de integral doble de las funciones $F(x, y)$, $xF(x, y)$ e $yF(x, y)$:

$$x_c = \frac{\iint_D xF(x, y)\, dx\, dy}{M} \qquad y_c = \frac{\iint_D yF(x, y)\, dx\, dy}{M}$$

Ejercicio 7.21 *El centro de gravedad $CG(x_c, y_c)$ de un recinto D, ¿se encuentra siempre en el propio recinto D?*

Ejercicio 7.22 *Los escaladores saben que el centro de gravedad del cuerpo humano está situado aproximadamente en el ombligo, y mientras escalan, se mueven de tal manera que su centro de gravedad se aleja lo menos posible de ese punto. La Figura 7.38(a) muestra la silueta aproximada de una persona. Calcula las coordenadas de su centro de gravedad. ¿Cómo resulta modificado si la persona estira un brazo como en la Figura 7.38(b)?*

Ejercicio 7.23 *Observa la Figura 7.39(a). Una lámina con forma parabólica está construida de un material cuya función de densidad puntual $F(x, y)$ en cada punto (x, y) es proporcional a la coordenada y. Calcular $F(x, y)$, representarla gráficamente y trazar algunas de sus curvas de nivel. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la lámina. Luego hemos recortado de la lámina el cuadrado que aparece en la Figura 7.39(b). ¿Cuál será ahora el centro de gravedad?*

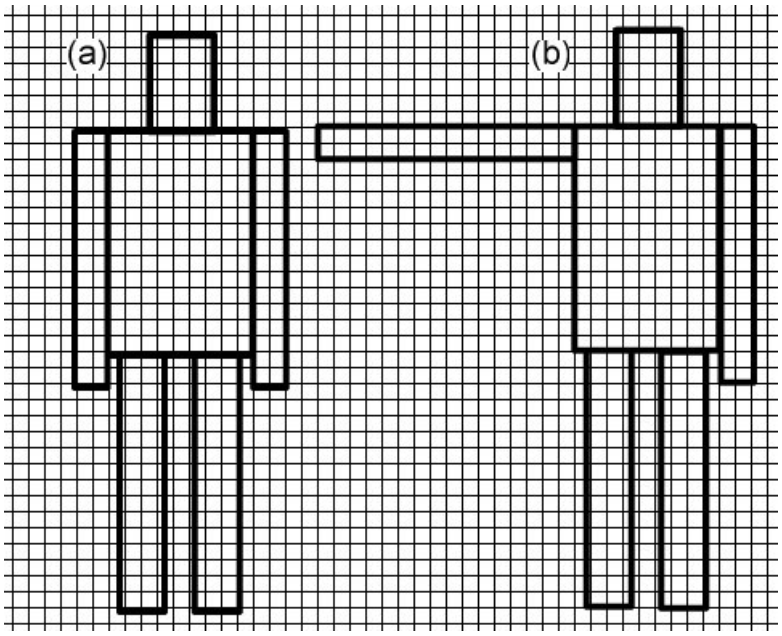

Figura 7.38: Ejercicio 7.22

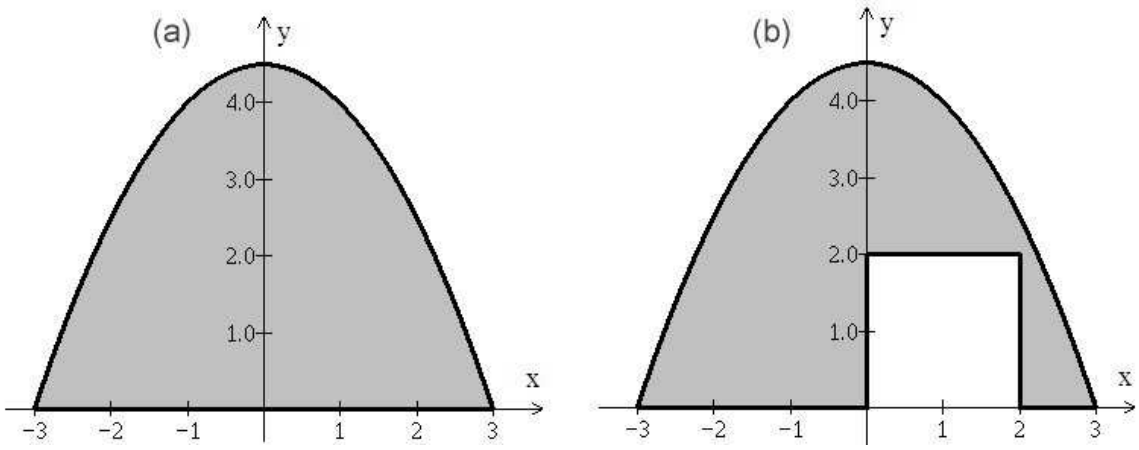

Figura 7.39: Ejercicio 7.23

Ejercicio 7.24 *La posición del centro de gravedad es un factor importante para la estabilidad de los vehículos. Los vehículos que tienen su centro de gravedad más elevado, como las camionetas, tienen mayor probabilidad de volcar. La Figura 7.40(a) muestra la silueta de un vehículo cuya función de densidad de masa se supone constante. Calcula la posición de su centro de gravedad. Supongamos ahora que colocamos en la baca del vehículo un pesado bulto cuya función de densidad de masa es constante pero k veces la del vehículo. Calcula la nueva*

posición del centro de gravedad. ¿Cómo cambia la posición del centro de gravedad a medida que el valor de k aumenta? (piénsalo primero y luego verifícalo haciendo las operaciones).

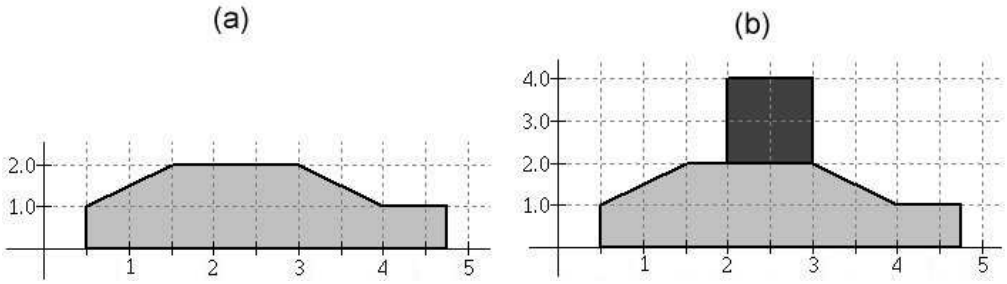

Figura 7.40: Ejercicio 7.24

Ejercicio 7.25 *Los aviones llevan gran cantidad de combustible que, a medida que se va consumiendo, hace que el centro de gravedad del aparato cambie de posición. La Figura 7.41(a) muestra un depósito de combustible para instalar en el ala del avión. La Figura 7.41(b) muestra una sección $x = k$ del depósito, formada por las parábolas $z(y) = \pm 0.07(y+1)(y-8)$, $y \in [0, 8]$. La Figura 41(c) muestra la misma sección, donde el combustible (zona sombreada en la figura) llega hasta cierto nivel h. Se trata de:*

1. *Estudiar cómo cambia el centro de gravedad $CG(y_c, z_c)$ de esta sección, a medida que el nivel h de combustible desciende.*
2. *Volviendo a la Figura 7.41(a), ¿cuál será la coordenada x_c del centro de gravedad?*

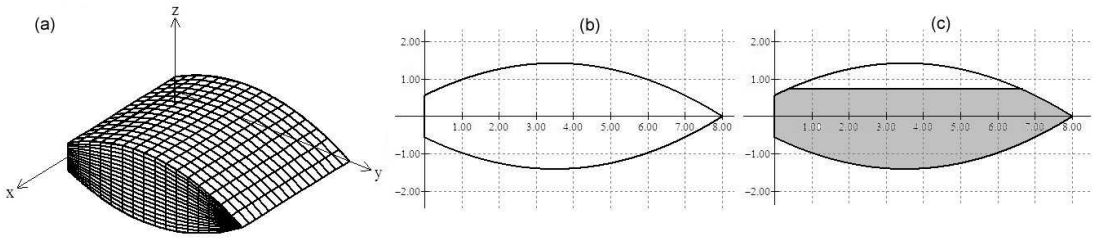

Figura 7.41: Ejercicio 7.25

7.7.4. Cálculo de los momentos de inercia de una región plana

La integral doble también puede utilizarse para medir la facilidad con que una lámina D puede girar alrededor de un eje. El concepto físico relacionado se llama momento de inercia. Cuanto mayor sea el momento de inercia del recinto D respecto a un eje, más fuerza es

necesario aplicar para hacer que D gire respecto a ese eje. Es muy corriente que los ejes respecto a los que se calculan los momentos de inercia sean los ejes coordenados. De este modo, denotaremos por I_y e I_x los momentos de inercia de una masa respecto a los ejes OY y OX respectivamente.

Tomemos por ejemplo una patinadora y una gimnasta de barras asimétricas, que tengan dimensiones y masa similares. El momento de inercia de la patinadora respecto al eje vertical de su cuerpo es mucho menor que el momento de inercia de la gimnasta respecto a la barra horizontal (Figura 7.42). Por tanto, el esfuerzo que tendrá que hacer la primera para lograr el giro es mucho menor que el de la segunda.

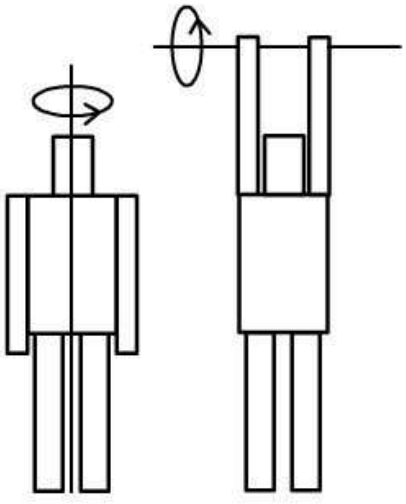

Figura 7.42: Momentos de inercia

¿Cómo se puede construir un parámetro que sirva para medir la resistencia de una masa a girar alrededor de un eje? Supongamos que la masa m se concentra en un punto. La resistencia al giro está relacionada con el valor de m y con su distancia d al eje de giro. Cuanto mayor sea m y cuanto mayor sea d, mayor es la resistencia al giro. Por eso, el momento de inercia para la masa puntual se define del modo siguiente: $I = md^2$. Una pregunta: ¿por qué crees que se toma el cuadrado de d, en vez de definir simplemente $I = md$?

Supongamos ahora que D es un recinto con densidad de masa $F(x, y)$ para cada $(x, y) \in D$. Supongamos que el eje de giro es OY. Ver Figura 7.43. Tomamos, como siempre, un retículo formado por n rectángulos R_i de área A_i, contenidos en D y elegimos un punto $(x_i, y_i) \in R_i$. Para cada índice i, suponemos que la masa contenida en R_i se concentra en el punto (x_i, y_i).

El momento de inercia I_y del recinto D respecto al eje OY será aproximadamente:

$$I_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_i^2 F(x_i, y_i) A_i$$

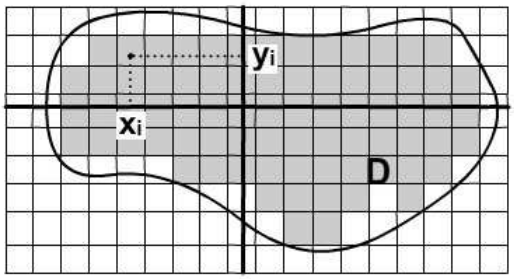

Figura 7.43: Reticulación en D

Pasando al límite obtenemos el valor exacto de I_y:

$$I_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 F(x_i, y_i) A_i \tag{7.26}$$

Pero en (7.26) reconocemos el concepto de integral doble de la función $x^2F(x,y)$ en D:

$$I_y = \iint_D x^2 F(x,y)\, dx\, dy$$

Razonando del mismo modo, llegamos al momento de inercia del recinto D respecto al eje OX:

$$I_x = \iint_D y^2 F(x,y)\, dx\, dy$$

Ejercicio 7.26 *Explica cómo pueden calcularse los momentos de inercia de un recinto D respecto a los ejes $x = a$ e $y = b$. ¿Y respecto a un eje cualquiera $y = ax + b$?*

Ejercicio 7.27 *Considera el recinto D con densidad constante y frontera parabólica $y(x) = -0.5(x-3)(x+3)$ de la Figura 7.44.*

1. *Compara los valores de I_x e I_y.*
2. *Demuestra que el eje OY es el eje vertical respecto al cual el momento de inercia es mínimo. INDICACIÓN: Considera un eje cualquiera $x = a$ (ver Figura 7.44), calcula la función $I(a)$ que nos da el momento de inercia respecto a ese eje y finalmente encuentra el mínimo de $I(a)$. De paso, puedes interpretar cómo se comporta $I(a)$ cuando $a \to \pm\infty$.*

Ejercicio 7.28 *El momento de inercia I_P de una lámina D respecto a un punto $P(a,b)$ mide la resistencia de la masa contenida en D a girar alrededor de P.*

1. *Explica cómo puede definirse I_P.*

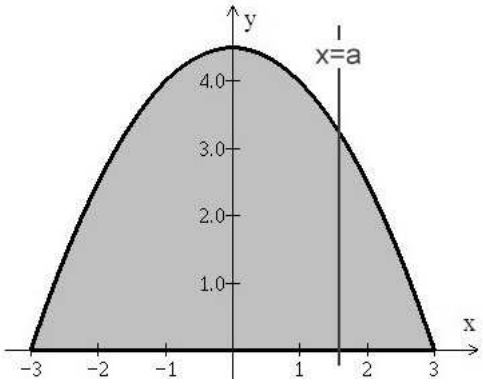

Figura 7.44: Ejercicio 7.27

2. *Compara los valores de I_P si D es un círculo de radio R centrado en el origen y P es el propio origen o bien P es un punto situado en su frontera (toma densidad de masa constante).*

Ejercicio 7.29 *En 1960 las raquetas de tenis se fabricaban con forma elíptica de semiejes $a = 4$, $b = 2$, mientras que las de 1990 tenían semiejes $a = 6$, $b = 3$. Teniendo en cuenta que es deseable el menor esfuerzo posible de la muñeca del tenista para hacer girar la raqueta, ¿qué diseño de raqueta es mejor? (Recuerda que la ecuación de la elipse es $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$. Recuerda también el cambio de variables a coordenadas polares generalizadas).*

7.8. Integral triple

7.8.1. ¿Qué problemas no pueden resolverse mediante la integral doble?

Hemos utilizado el concepto de integral doble para estudiar algunas propiedades de una función $F(x, y)$ definida en un dominio plano D. Así, hemos aprendido a calcular:

1. El valor medio de $F(x, y)$ en D.
2. El volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = F(x, y)$, $(x, y) \in D$.
3. El área de la superficie $z = F(x, y)$, $(x, y) \in D$.
4. El área de la región D.

   Y si $F(x, y)$ representa una densidad de masa en cada punto $(x, y) \in D$, sabemos calcular:

5. La cantidad de materia contenida en D.
6. Las coordenadas del centro de gravedad de D.
7. El momento de inercia de D respecto a un eje.

Ejercicio 7.30 *Escribe la expresión de cálculo para cada uno de estos siete parámetros.*

Sin embargo, la integral doble no nos permite estudiar las propiedades de cierta magnitud definida en una región V el espacio. V puede ser, por ejemplo, un horno: en cada uno de cuyos puntos (x, y, z) podemos medir la temperatura $T(x, y, z)$. ¿Cuál será el valor medio $\overline{T}$ de $T(x, y, z)$? Si conseguimos calcular $\overline{T}$, podremos representar gráficamente la superficie de nivel $F(x, y, z) = \overline{T}$ formada por los puntos $(x, y, z) \in V$ tales que la temperatura es igual al valor medio.

La función $F(x, y, z)$ también puede representar una concentración de materia en un sólido R. ¿Cuál será el centro de gravedad $CG(x_c, y_c, z_c)$ de R? Si el sólido R debe girar alrededor de un eje, ¿cuál será el momento de inercia de R respecto a ese eje?

Vamos a seguir el mismo procedimiento para construir la integral de una función $F(x, y, z)$ en el sólido R. Comencemos por el cálculo del valor medio de la función.

7.8.2. Valor medio de una función $F(x, y, z)$

Supongamos que $F(x, y, z)$ es una función continua definida en recinto R del espacio. La Figura 7.45(a) muestra un posible recinto. Ahora tomamos un retículo formado por cajas cuyas caras son paralelas a los planos coordenados. La Figura 7.45(b) muestra un retículo que contiene a R, del cual tomamos sólo los n elementos R_i contenidos totalmente en R, como muestra Figura 7.45(c).

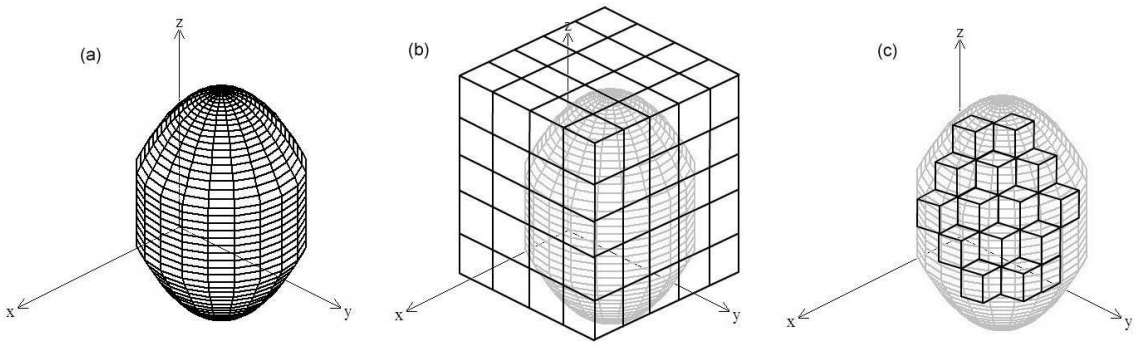

Figura 7.45: Reticulación en $\mathbb{R}^3$

El siguiente paso es tomar un punto cualquiera $(x_i, y_i, z_i) \in R_i$ y evaluar $F(x_i, y_i, z_i)$. Una aproximación al valor de la función $F(x, y, z)$ consiste en suponer que $F(x, y, z)$ es constante en cada R_i, y vale precisamente $F(x_i, y_i, z_i)$. Si el volumen de R_i es V_i y el volumen de R es V, ya tenemos nuestra aproximación al valor medio de $F(x, y, z)$ en el recinto R:

$$\overline{F} \approx \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) V_i$$

Finalmente, hacemos que el largo, el ancho y el alto de cada caja R_i tiendan a 0 a medida que n tiende a infinito, con lo cual ya tenemos el valor exacto de $\overline{F}$:

$$\overline{F} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) V_i$$

Ahora denotamos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) V_i = \iiint_R F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{7.27}$$

y llamamos al término de la derecha de (7.27) integral triple de la función continua $F(x, y, z)$ en R. Se puede demostrar que si $F(x, y, z)$ es continua, la integral triple existe.

Según lo que hemos visto:

$$\overline{F} = \frac{1}{V} \iiint_R F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

7.8.3. Cálculo de la integral triple

La definición (7.27) de integral triple es difícil de aplicar en la práctica. Afortunadamente, al igual que sucedía con la integral doble, el cálculo de la integral triple se reduce al cálculo de integrales de una sola variable. En este caso serán tres las integrales a calcular. Veamos cómo se hace.

Observa la Figura 7.46(a). Hemos representado gráficamente las superficies definidas por dos funciones $u(x.y)$ y $v(x, y)$. El dominio D de ambas funciones está definido por las funciones $g(x)$ y $h(x)$, $x \in [a, b]$, siendo $g(x) \leq h(x)$. En la Figura 7.46(b) hemos añadido el fragmento de cilindro lateral para mostrar el sólido R limitado por ambas superficies. En los puntos de R está definida la función $F(x, y, z)$ para la cual deseamos calcular la integral triple en R.

Fijamos un valor cualquiera $x \in [a, b]$. La Figura 7.47 muestra las curvas que se obtienen tomando en ambas superficies dicho valor constante de x. Para cada $x \in [a, b]$ fijo, el punto (x, y, z) se encuentra en R si $y \in [g(x), h(x)]$ y si $z \in [u(x, y), v(x, y)]$, como aparece en la Figura 7.47.

Pues bien, la integral triple se calcula como sigue:

$$\iiint_R F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} F(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx \tag{7.28}$$

Veamos qué operaciones encierra (7.28):

- **Primero** se calcula la integral de $F(x, y, z)$ en el intervalo $[u(x, y), v(x, y)]$
- **respecto a la variable z**, tomando x e y constantes en $F(x, y, z)$. El resultado es una función de x e y. Vamos a llamar, por ejemplo, $S(x, y)$ a esta función.

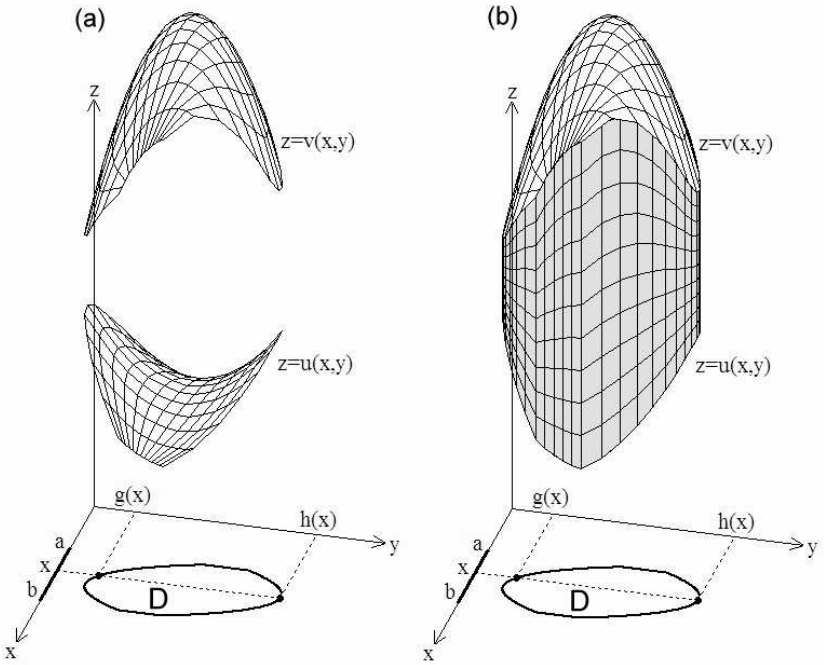

Figura 7.46: Superficies y volumen que definen

- **Después** se calcula la integral de $S(x, y)$ en el intervalo $[g(x), h(x)]$ respecto a la variable y, tomando x como constante. El resultado es una función de x. Vamos a llamar por ejemplo $I(x)$ a esta función.
- **Finalmente** de calcula la integral de $I(x)$ en el intervalo $[a, b]$ respecto a la variable x. El resultado es el valor de la integral triple de $F(x, y, z)$ en R.

Ejercicio 7.31 *Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ definida en el sólido R definido por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + 3z = 6$.*

1. *Representa gráficamente el sólido R*
2. *Calcula las funciones $S(x, y)$ e $I(x)$*
3. *Calcula la integral triple de $F(x, y, z)$ en R utilizando los diferentes órdenes de integración posibles.*
4. *Calcula el valor medio $\overline{F}$ de $F(x, y, z)$ en R.*
5. *Representa gráficamente la superficie de nivel $F(x, y, z) = \overline{F}$*

Ejercicio 7.32 *Calcula el valor de la integral triple de $F(x, y, z) = 1$ en un sólido cualquiera R. ¿Conclusión?*

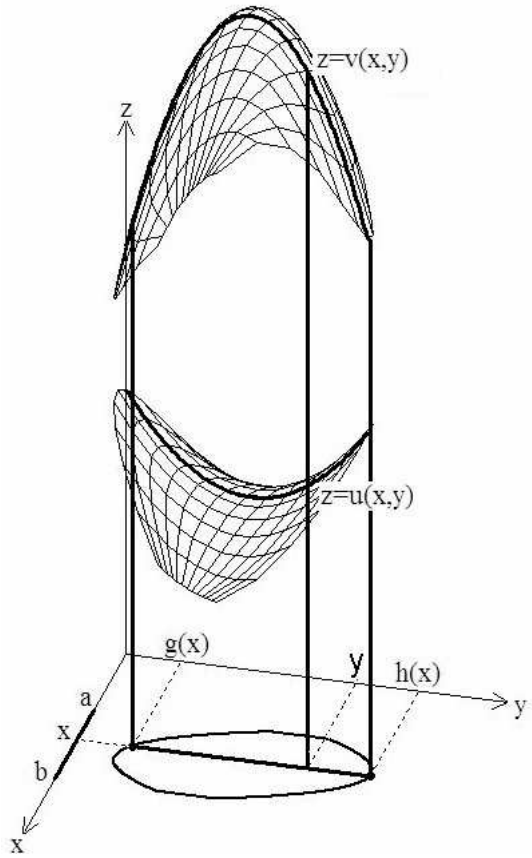

Figura 7.47: Sección para $x = cte$

7.8.4. Coordenadas cilíndricas y esféricas

En el cálculo de la integral triple de una función $F(x, y, z)$ en el recinto R, nos encontramos con un problema que ya se nos presentó en la integración doble: ¿cómo calcular la integral si aplicamos un cambio de variables? Un cambio de variable adecuado puede simplificar en gran medida los cálculos de la integral. Por ejemplo, si el recinto de integración R es un cilindro circular (Figura 7.48(a)) o una esfera (Figura 7.48(b)), las funciones a colocar como límites de integración al aplicar (7.28) contienen raíces cuadradas, lo cual puede complicar en gran medida la integración.

Ejercicio 7.33 *Calcula dichos límites de integración los recintos de la Figura 7.48.*

En cambio, estos dos tipos de recintos pueden manejarse mucho más fácilmente si, en vez de utilizar coordenadas rectangulares, utilizamos coordenadas cilíndricas en el primer caso y coordenadas esféricas en el segundo. Veamos en qué consisten ambos sistemas de coordenadas.

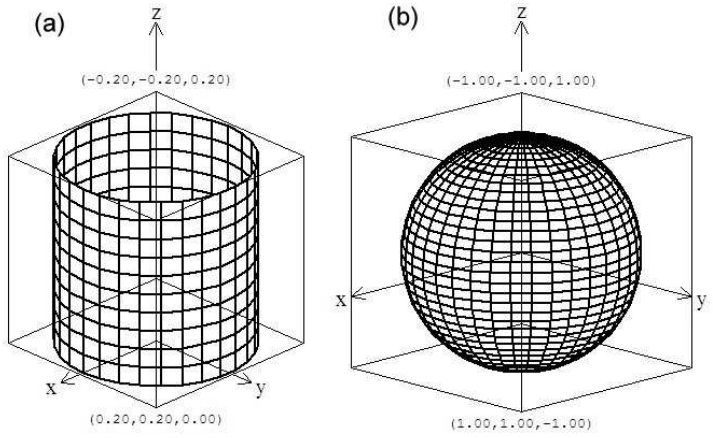

Figura 7.48: Cilindro y esfera

Coordenadas cilíndricas

Un sistema de coordenadas es un modo de identificar de forma única cada punto. Por ejemplo, en el plano podemos localizar cada punto P mediante sus coordenadas rectangulares (x, y) y también mediante sus coordenadas polares (ρ, θ). Además, podemos obtener x e y a partir de ρ y θ y viceversa:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} & \rho \geq 0 \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ \theta = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x} & x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{7.29}$$

Pues bien, el sistema de coordenadas polares (7.29) nos da una idea para representar un punto $P(x, y, z)$ cualquiera del espacio: escribimos x e y en coordenadas polares, y mantenemos la misma coordenada z. Así pues, el punto $P(x, y, z)$ se representará en coordenadas cilíndricas como $P(\rho, \theta, z)$, donde la conversión entre uno y otro sistema de coordenadas se obtiene de (7.29). La Figura 7.49 muestra la representación en coordenadas rectangulares y cilíndricas de un punto P.

Este cambio de coordenadas puede simplificar el recinto de integración. Por ejemplo (ver Figura 7.50(a)), si el recinto R es el cilindro circular definido por las condiciones $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq H$, el cambio de variables a coordenadas cilíndricas nos permitirá integrar en un sólido R' más sencillo (ver Figura 7.50(b)), definido por $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\rho = a$, $0 \leq z \leq H$.

Ejercicio 7.34 *El sistema de coordenadas cilíndricas no sólo es útil para manejar más fácilmente superficies cilíndricas. En cada uno de los siguientes apartados se define un recinto R en coordenadas rectangulares. Se trata representar gráficamente R y el nuevo recinto R' que se obtiene al aplicar el cambio a coordenadas cilíndricas (como en la figura 7.50).*

1. $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$
2. $x^2 - y^2 = z - 2$, $x^2 + y^2 = 1$

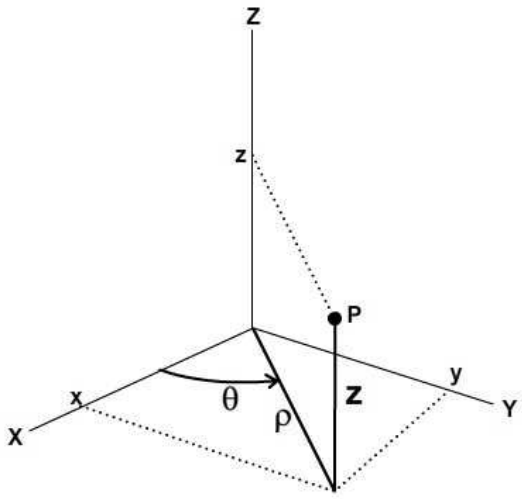

Figura 7.49: Coordenadas cilíndricas

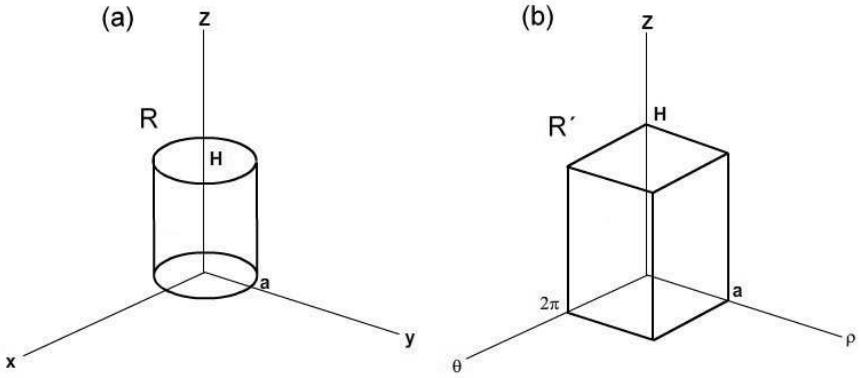

Figura 7.50: Cilindro en coordenadas cilíndricas

3. $x^2 + y^2 = z$, $x^2 + y^2 = 1$

Ejercicio 7.35 (Coordenadas cilíndricas generalizadas.) *Recordando cómo definimos el sistema de coordenadas polares generalizadas en el apartado 6, define el sistema de coordenadas cilíndricas generalizadas. En cada uno de los siguientes apartados se define un recinto R en coordenadas rectangulares. Se trata representar gráficamente R y el nuevo recinto R' que se obtiene al aplicar el cambio a coordenadas cilíndricas generalizadas (como en la figura 7.50).*

1. $2x^2 + 3y^2 = z^2, , z = 0$, $z = 1$.
2. $x^2 + 5y^2 = z$, $z = 0$, $z = 2$.

Coordenadas esféricas

Observa la Figura 7.51. El punto $P(x, y, z)$ se escribe en coordenadas esféricas como $P(\theta, \varphi, r)$, siendo:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \qquad r \geq 0,\ 0 \geq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta < 2\pi \tag{7.30}$$

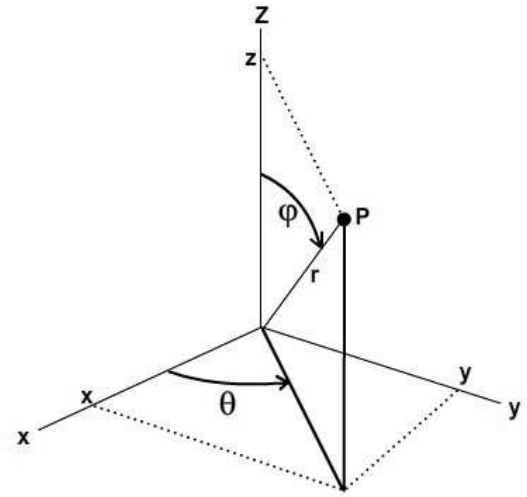

Figura 7.51: Coordenadas esféricas

Una pregunta. ¿Por qué crees que el valor del parámetro φ oscila dentro del intervalo $[0, \pi]$ en vez de en $[0, 2\pi]$?

Ejercicio 7.36 *A partir de (7.30), escribe los valores de θ, φ y r en función de x, y, z.*

De este modo, (ver Figura 7.52(a)), si el recinto R es la esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, el cambio de variables a coordenadas esféricas nos permitirá integrar en un sólido R' más sencillo (ver Figura 7.52(b)), definido por $r = a$.

Ejercicio 7.37 *El sistema de coordenadas esféricas no sólo es útil para manejar más fácilmente las superficies esféricas. En los siguientes apartados se define un recinto R en coordenadas rectangulares. Se trata representar gráficamente R y el nuevo recinto R' que se obtiene al aplicar el cambio a coordenadas esféricas (como en la figura 7.52).*

1. $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$
2. $x^2 - y^2 = z - 2$, $x^2 + y^2 = 1$

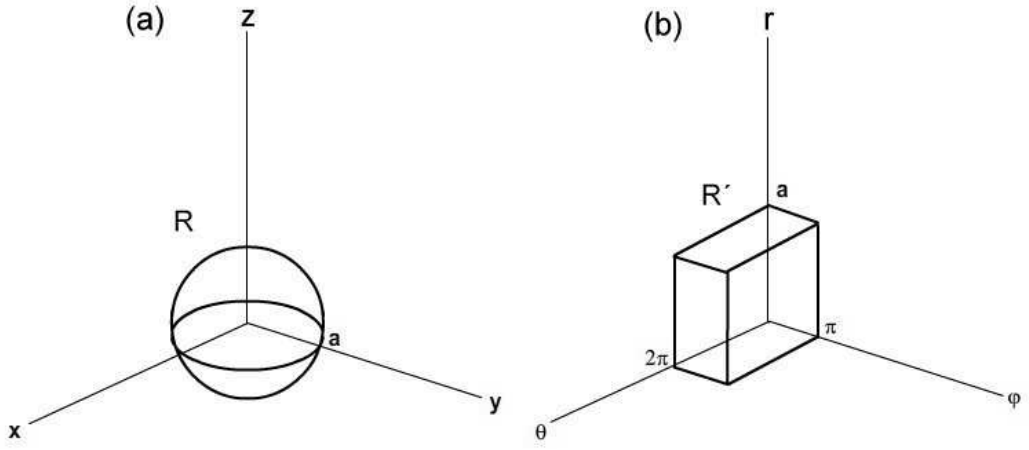

Figura 7.52: Ejercicio 7.36

7.8.5. Cambio de variables de integración

Hemos definido dos cambios de variables que nos permiten escribir algunos tipos de recintos de integración de un modo más simple (cilindros, esferas, conos, etc). La pregunta es, ¿cómo se aplica un cambio de variables en el cálculo de la integral triple? Pues se hace de un modo muy parecido al de la integral doble. La Figura 7.53 representa un cambio de variables en tres dimensiones, en el que las variables (x, y, z) van a sustituirse por las nuevas variables (u, v, w). El cambio de variables viene dado por tres funciones $x = h(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = s(u, v, w)$ definidas en R', con derivadas parciales continuas, de tal modo que a cada punto $(x, y, z) \in R$ le corresponda un único $(u, v, w) \in R'$ y viceversa. Pues bien, si

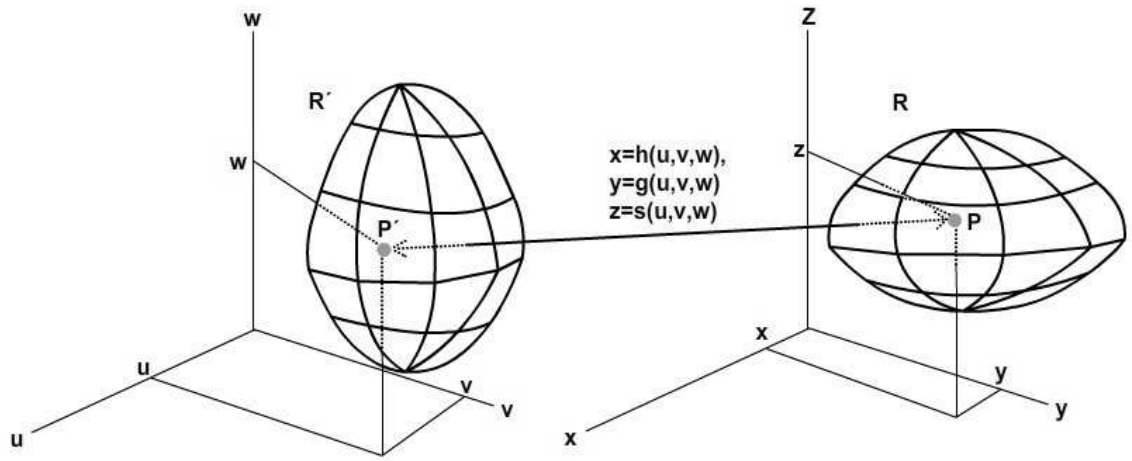

Figura 7.53: Cambio de variables en $\mathbb{R}^3$

se cumplen todas las hipótesis anteriores, la expresión (7.31) indica cómo calcular la integral doble utilizando las nuevas variables (u, v, w) y el nuevo recinto de integración R':

$$\iiint_R F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} F\left(h(u,v,w).g(u,v,w), s(u,v,w)\right)\,|J|\,du\,du\,dw \quad (7.31)$$

donde

$$J = \begin{vmatrix} h_u & h_v & h_w \\ g_u & g_v & g_w \\ s_u & s_v & s_w \end{vmatrix} \quad (7.32)$$

Observa que, al igual que en la integral doble, en la expresión del cambio de variable (7.31), aparece el valor absoluto del determinante Jacobiano J, pero ahora en tres dimensiones. Según se ve en (7.32), J está formado por las derivadas parciales de las funciones $h(u, v, w)$, $g(u, v, w)$ y $s(u, v, w)$.

Ejercicio 7.38 *Demuestra que $J = \rho$ para el cambio de variables a coordenadas cilíndricas y $J = r^2 \operatorname{sen}\varphi$ para el cambio a coordenadas esféricas. Usando (7.31) escribe en estos dos casos particulares las expresiones del cambio de variables de integración.*

7.8.6. Otras aplicaciones de la integral triple

Hemos visto cómo la integral triple de una función continua $F(x, y, z)$ en un dominio R del espacio puede emplearse para calcular el valor medio de $F(x, y, z)$ y el volumen del sólido R (ejercicio 7.30). Ahora, si $F(x, y, z)$ representa la densidad de masa en cada punto $(x, y, z) \in R$, podemos razonar exactamente igual que para la integral doble, y utilizar la integral triple en el cálculo de la masa m contenida en R, su centro de gravedad $CG(x_c, y_c, z_c)$ y el momento de inercia de R respecto a un eje:

Masa:

$$M = \iiint_R F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Centro de gravedad:

$$x_c = \frac{\iiint_R x\,F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{M}$$
$$y_c = \frac{\iiint_R y\,F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{M}$$
$$z_c = \frac{\iiint_R z\,F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{M}$$

Momentos de inercia de R respecto a los ejes OX, OY, OZ :

$$I_x = \iiint_R (y^2 + z^2)\, F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$I_y = \iiint_R (x^2 + z^2)\, F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\, F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

ec 82.

7.9. Integral triple de funciones continuas por subdominios

La siguiente discusión es idéntica a la que realizamos en el apartado 5 para la integral doble. Hasta ahora hemos considerado la integral triple de una función $F(x, y, z)$ continua en un dominio R. Sin embargo, a veces la función $F(x, y, z)$ está definida en un dominio de la forma $R = R_1 \cup R_2$, donde R_1 y R_2 son recintos cuya zona común tiene volumen 0 y $F(x, y, z)$ es continua en cada uno de ellos individualmente, pero no es continua en R. En estos casos, podemos definir la integral triple de la función $F(x, y, z)$ como sigue:

$$\iiint_R F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{R_1} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{R_2} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Si, por ejemplo, $F(x, y, z)$ es una distribución de temperatura en cada punto de un sólido R, es físicamente muy difícil que $F(x, y, z)$ sea discontinua. Ahora bien, la discontinuidad de $F(x, y, z)$ es frecuente, por ejemplo, cuando $F(x, y, z)$ representa la concentración de materia en cada punto $(x, y, z) \in R$. El recinto R puede ser una pieza construida con diferentes materiales (acero, caucho, aire, plástico, etc) que tengan densidades de masa muy diferentes, con lo cual el cálculo de la integral triple en R se reduce a la suma de varias integrales triples. Esta definición puede usarse para el cálculo del valor medio de una función $F(x, y, z)$, para el cálculo del volumen R y en todas las aplicaciones adicionales de la integral triple que hemos estudiado.

Ejercicio 7.39 *Considera el sólido R formado por un prisma triangular y un prisma rectangular, cuyas cotas aparecen en la Figura 7.54. Supongamos que ambos tienen una densidad de masa constante, pero la del prisma triangular es doble que la del rectangular.*

1. *Calcula la masa del sólido.*
2. *Calcula su centro de gravedad.*
3. *¿Respecto a qué eje coordenado será más fácil hacer que gire el sólido?*

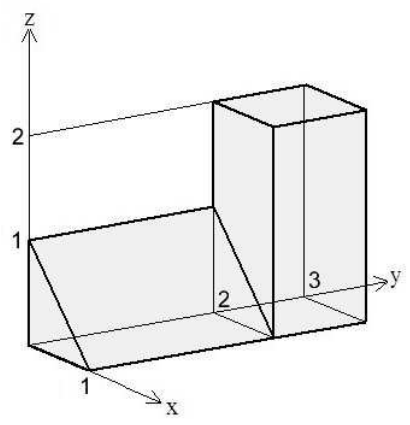

Figura 7.54: Ejercicio 7.39