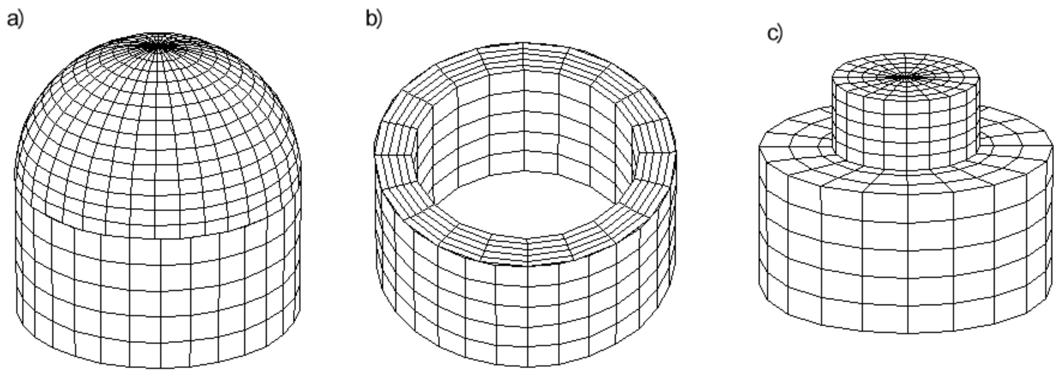
Capítulo 7

Problemas de Integración Múltiple

(En los problemas marcados con el icono es conveniente usar de un programa de ordenador para la representación gráfica de funciones, por ejemplo Winplot).

7.1. INTEGRAL DOBLE

1. Calcular una expresión analítica de todas las superficies que definen cada uno de los sólidos que aparecen en las figuras.



2. Representar gráficamente el sólido definido por las condiciones indicadas, y calcular su volumen.

a) $Z = \dfrac{y}{2},\ 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2,\ z = 0$ b) $z = 6 - 2y,\ 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2,\ z = 0$

c) $z = 4 - x - y,\ y = x,\ y = 2,\ x = 0,\ z = 0$ d) $z = 4,\ y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ z = 0$

e) $2x + 3y + 4z = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ f) $z = 1 - xy,\ y = x,\ x = 0,\ y = 1,\ z = 0$

g) $z = 4 - y^2,\ y = x,\ x = 0,\ z = 0$ h) $z = \mathrm{e}^{-\frac{x+y}{2}},\ 0 \leq x < \infty,\ 0 \leq y < \infty,\ z = 0$

3. Representar gráficamente el recinto de integración D, calcular el valor de la integral y escribirla cambiando el orden de integración.

a) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^1 (1 + 2x + 2y)\, dy$ c) $\displaystyle\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x`2}} (x + y)\, dy$ e) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{y-1} \mathrm{e}^{x+y}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^6 dy \int_{y/2}^{3} (x + y)\, dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{y-1}^{0} \mathrm{e}^{x+y}\, dx$ f) $\displaystyle\int_0^4 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2 y^2\, dx$

4. En los ejercicios siguientes, calcular la integral doble en el recinto indicado empleando coordenadas polares.

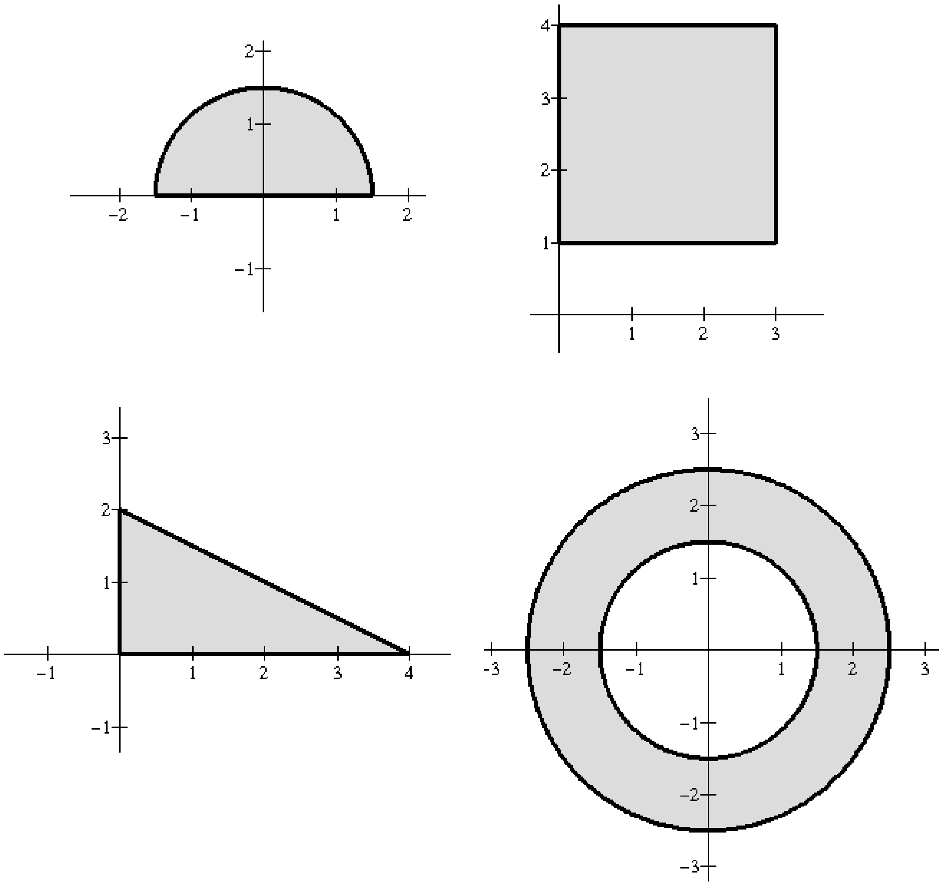
a) $z = x + y,\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

b) $z = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0$

c) $z = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right),\ x^2 + y^2 \leq 25,\ x \geq 0$

d) $z = 9 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

5. Las siguientes figuras muestran ciertos recintos planos. Escribir los límites de integración para una función $z(x, y)$, utilizando coordenadas rectangulares y polares. ¿En qué casos emplearías uno u otro tipo de coordenadas?.



6. En los siguientes ejercicios, calcular el valor de la integral doble indicada, identificando el recinto de integración y pasando a coordenadas polares.

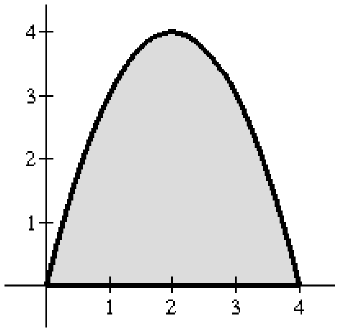
a) $\displaystyle\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\,dy$ e) $\displaystyle\int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy$ d) $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy$ f) $\displaystyle\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2\,dx$

7. Calcular el área de la región del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$, limitada por el plano $z = c$. Calcular el volumen del sólido limitado por ambas superficies.

8. Calcular el área de la porción del plano $z = 2 - x - y$ recortada por el cilindro $x^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

9. Hemos recortado una lámina metálica siguiendo una curva parabólica (ver figura).



Se pide:

a) Obtener la ecuación de la parábola.

b) Calcular el centro de gravedad M, suponiendo que la densidad $d(x, y)$ en cada punto es constante.

c) Supongamos ahora que la densidad $d(x, y)$ no es constante. Considerar las siguientes funciones:

$$d_1(x, y) = kx,\ d_2(x, y) = kxy,\ d_3(x, y) = k|x - y|,\ d_4(x, y) = k(4 - x)(4 - y)$$

Interpretar el significado de cada una de ellas, el de su gradiente y el de sus curvas de nivel. Estudiar el modo en que el centro de gravedad cambia dependiendo de la función considerada.

7.2. INTEGRAL TRIPLE

10. En los siguientes ejercicios, utilizar la integral triple para calcular el volumen del sólido limitado por las condiciones indicadas.

a) $x = 4 - y^2,\ z = 0,\ z = x$

b) $z = xy,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$

c) $z = 36 - x^2 - y^2,\ z = 0$

d) $z = 4 - x^2,\ y = 4 - x^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

e) $z = 9 - x^2,\ y = 2 - x,\ y = 0,\ z = 0,\ x \geq 0$

f) $z = x^2 + y^2,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$

11. En los siguientes ejercicios dibujar un esbozo del sólido cuyo volumen representa la integral triple, y reescribirla en el orden de integración indicado.

a) $\displaystyle\int_0^4 dx \int_0^{\frac{4-x}{2}} dy \int_0^{\frac{12-3x-4y}{4}} dz$
nuevo orden: $\int dz \int dx \int dy$

b) $\displaystyle\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{6-x-y} dz$
nuevo orden: $\int dy \int dx \int dz$

c) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz$
nuevo orden: $\int dx \int dy \int dz$

d) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{2x}^4 dy \int_0^{\sqrt{y^2-4x^2}} dz$
nuevo orden: $\int dz \int dy \int dx$

12. Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = z^2,\ z^2 = c^2$.

13. Expresar en coordenadas cilíndricas los sólidos del ejercicio 1.

14. Completar la siguiente tabla, expresando las coordenadas de cada punto en los diferentes sistemas:

Coordenadas cartesianas (x, y, z)	Coordenadas cilíndricas (θ, ρ, z)	Coordenadas esféricas (θ, φ, r)
$(0.096, 0.116, 0.45)$		
	$(1.44, 2.35, 3.3)$	
		$(1.445, 1.57, 1.85)$
	$(5.4, 1.75, -2.7)$	
$(-0.66, -0.216, 1.15)$		
		$(2.57, 2.1, 1.85)$

15. En cada uno de los siguientes ejercicios, dibujar un esbozo del sólido cuyo volumen en coordenadas cilíndricas viene expresado por la integral indicada.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^3 dr \int_0^r r\,dz$ b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_0^{3-r^2} r\,dz$

16. En cada uno de los siguientes ejercicios, dibujar un esbozo del sólido cuyo volumen en coordenadas esféricas viene expresado por la integral indicada.

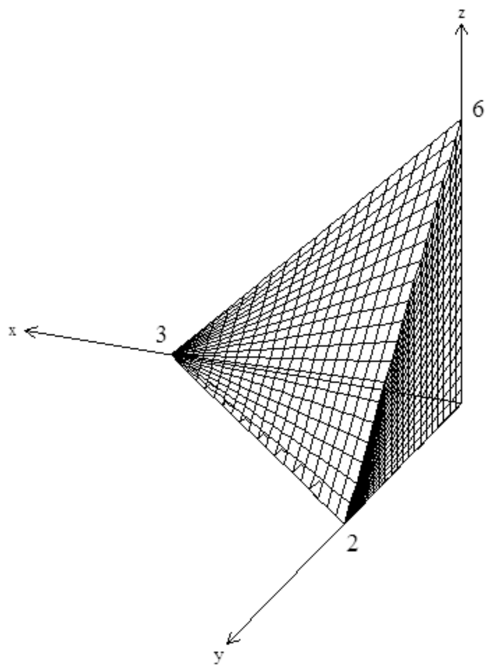
a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_0^4 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\,d\rho$ b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi} d\varphi \int_2^5 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\,d\rho$

17. Supongamos que la densidad puntual en cada punto P del sólido de la figura es proporcional al cuadrado de la distancia de P al origen. Se pide:

a) Interpretar en significado de la función de densidad.

b) Calcular el gradiente de la función de densidad e interpretarlo.

c) Calcular la masa del sólido.



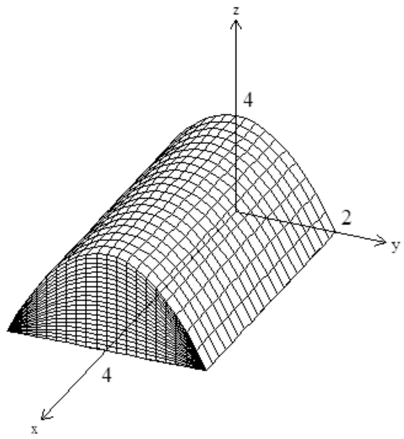
18. Dado el cilindro parabólico representado en la figura, se pide:

a) Calcular el centro de gravedad, suponiendo que la densidad puntual $d(x, y, z)$ es constante.

b) Supongamos ahora que la densidad $d(x, y, z)$ no es constante. Considerar las siguientes funciones:

$$d_1(x, y, z) = kx, \; d_2(x, y, z) = ky, \; d_3(x, y, z) = kz, d_4(x, y, z) = k(y + 2)$$

Interpretar el significado de cada una de ellas, el de su gradiente y el de sus superficies de nivel. Estudiar el modo en que el centro de gravedad cambia dependiendo de la función considerada.


z
4
2
y
4
x