Capítulo 6

Problemas de funciones reales de varias variables reales

(En los problemas marcados con el icono es conveniente usar de un programa de ordenador para la representación gráfica de funciones, por ejemplo Winplot).

1. Para las siguientes funciones, indicar su dominio y estudiar la continuidad en los puntos indicados:

   a) $f(x,y) = \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$ en $(1,2)$

   b) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$

   c) $f(x,y) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$

   d) $f(x,y) = 3x^2 + y$ en $(2,1)$

   e) $f(x,y) = e^{xy}$ en $(1,1)$

   f) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xyz)$ en $(\pi,1,1)$

2. Considerar la función $f(x,y)$ definida del modo siguiente:

$$f(u,v) = \begin{cases} uv+1 & (u,v) \in (0,1)\times(0,1) \\ v+1.5 & (u,v) \in (0,1)\times(1,2) \end{cases}$$

   a) Representar gráficamente $f(u,v)$

   b) Estudiar la existencia de límite en su dominio.

3. El área de un paralelogramo de lados adyacentes a y b, viene dada por la relación $A = ab\,\operatorname{sen}(\theta)$, donde θ es el ángulo que forman dichos lados.

   a) Calcular los ritmos de cambio de A respecto de a y de b para $a = 10, b = 20, \theta = \pi/2$.

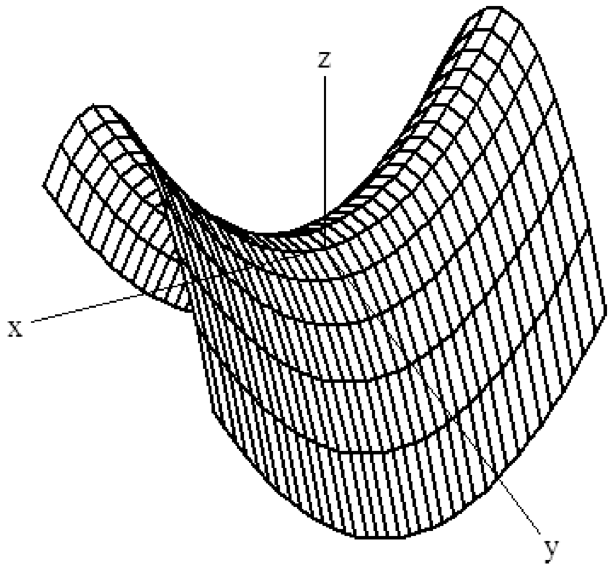
b) Supongamos que a, b y θ varían en el tiempo según las relaciones $a = 2t, b = 4t, \theta = t\pi/10$. Calcular el ritmo de A respecto a t para los mismos valores de a, b, θ.

4. Esbozar la gráfica de una función $f(x, y)$ que admita derivadas parciales en los siguientes casos:

   a) $f_x < 0, \quad f_y > 0$

   b) $f_x > 0, \quad f_y > 0$

5. Considerar la función $z(x, y)$ cuya gráfica se representa en la figura. Calcular el signo de los siguientes valores:



a) $z_x(4, 1)$	b) $z_y(4, 1)$	c) $z_x(-1, -1)$	d) $z_y(-1, -2)$
e) $z_{xx}(4, 1)$	f) $z_{xx}(-4, 1)$	g) $z_{yy}(-1, -2)$	h) $z_{yy}(1, -2)$

6. Un modelo para medir la sensación térmica S que experimentamos las personas viene dada por la relación:

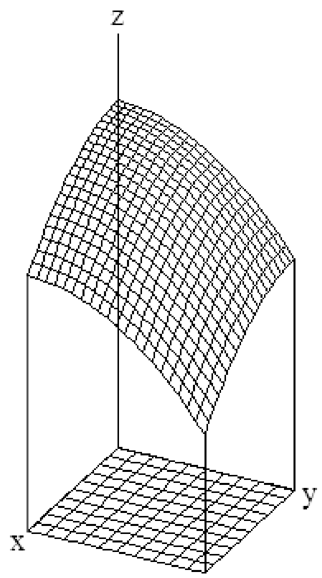
$$S(t, h) = 0.885\, t - 22.4\, h + 1.2\, t\, h - 0.544$$

   donde t es la temperatura del aire en °C y h es la humedad relativa expresada en forma decimal. Se pide:

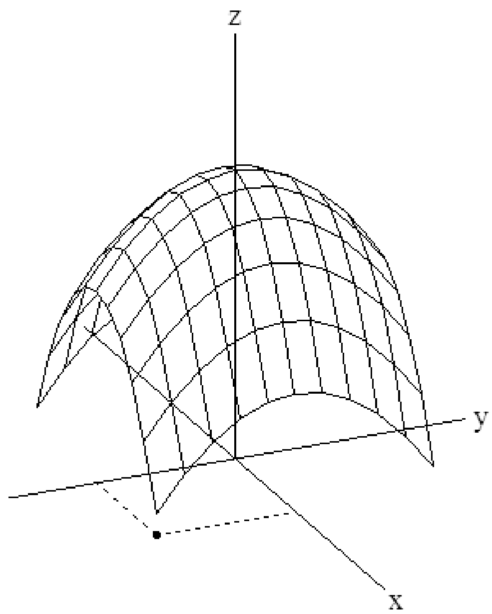
   a) Calcular los ritmos de cambio de S respecto a t y respecto a h si $t = 30°, h = 0.8$.

   b) ¿Qué influye más sobre S, la temperatura del aire o la humedad?

7. La temperatura T en cualquier punto (x, y) de una placa cuadrada de un metro de lado viene dada por el modelo $T(x, y) = 500 - 0.6x^2 - 1.5y^2$ (ver figura). Calcular el ritmo de cambio de T en $P(0{,}5, 0{,}3)$ respecto a la distancia recorrida sobre la placa en las direcciones de los ejes.



8. La temperatura T medida en grados centígrados en la superficie de una placa metálica viene dada por el modelo $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$, donde x e y se expresan en cm. (ver figura) ¿En qué dirección, a partir de $(2, -3)$ crece más rápidamente la temperatura?. ¿Cuál es ese ritmo de ese crecimiento?. Calcular qué trayectoria habrá que seguir desde $(2, -3)$ para obtener el mayor aumento de temperatura.



9. La ley de los gases ideales establece que $PV = nRT$, donde P es la presión, V el volumen y n el número de moles de gas, R una constante que depende del gas y T la temperatura. Demostrar que

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = -1$$

10. Estudiar la certeza de las siguientes afirmaciones acerca de una función $z(x, y)$:

    a) Si $z_x = z$, entonces $z = \mathrm{e}^x \cdot h(y)$

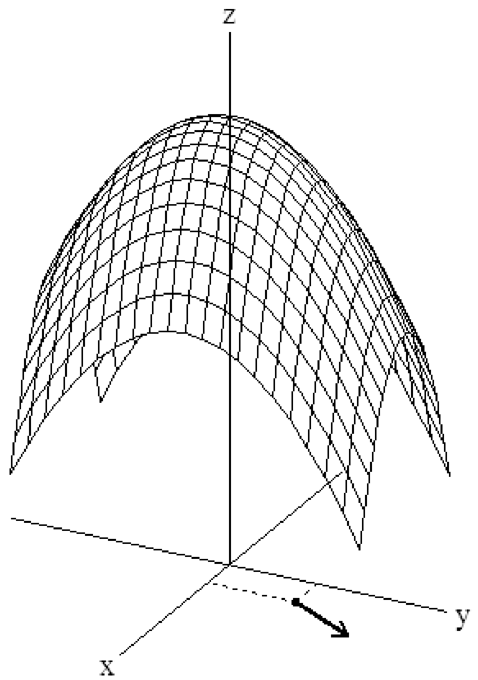
    b) Si $z(x, y) = f(x)g(y)$ entonces $z_x + z_y = f'(x)g(y) + f(x)g'(y)$

    c) Si $z_{xy} = 1$, entonces $z(x, y) = xy$

11. Dada la función $z(x, y) = 4 - x^2 - 0.25y^2$ se pide:

    a) Calcular la derivada direccional en el punto $(1, 2)$ en la dirección $u = (\cos \pi/3, \operatorname{sen} \pi/3)$, ver figura.

    b) Calcular la dirección v en la que la derivada direccional en el punto $(1, 2)$ es máxima. Interpretar el resultado según el gráfico de $z(x, y)$.



12. Calcular la derivada direccional de $z(x, y) = x^2 \operatorname{sen} 2y$ en el punto $(1, \pi/2)$ en la dirección $u = (3, -4)$.

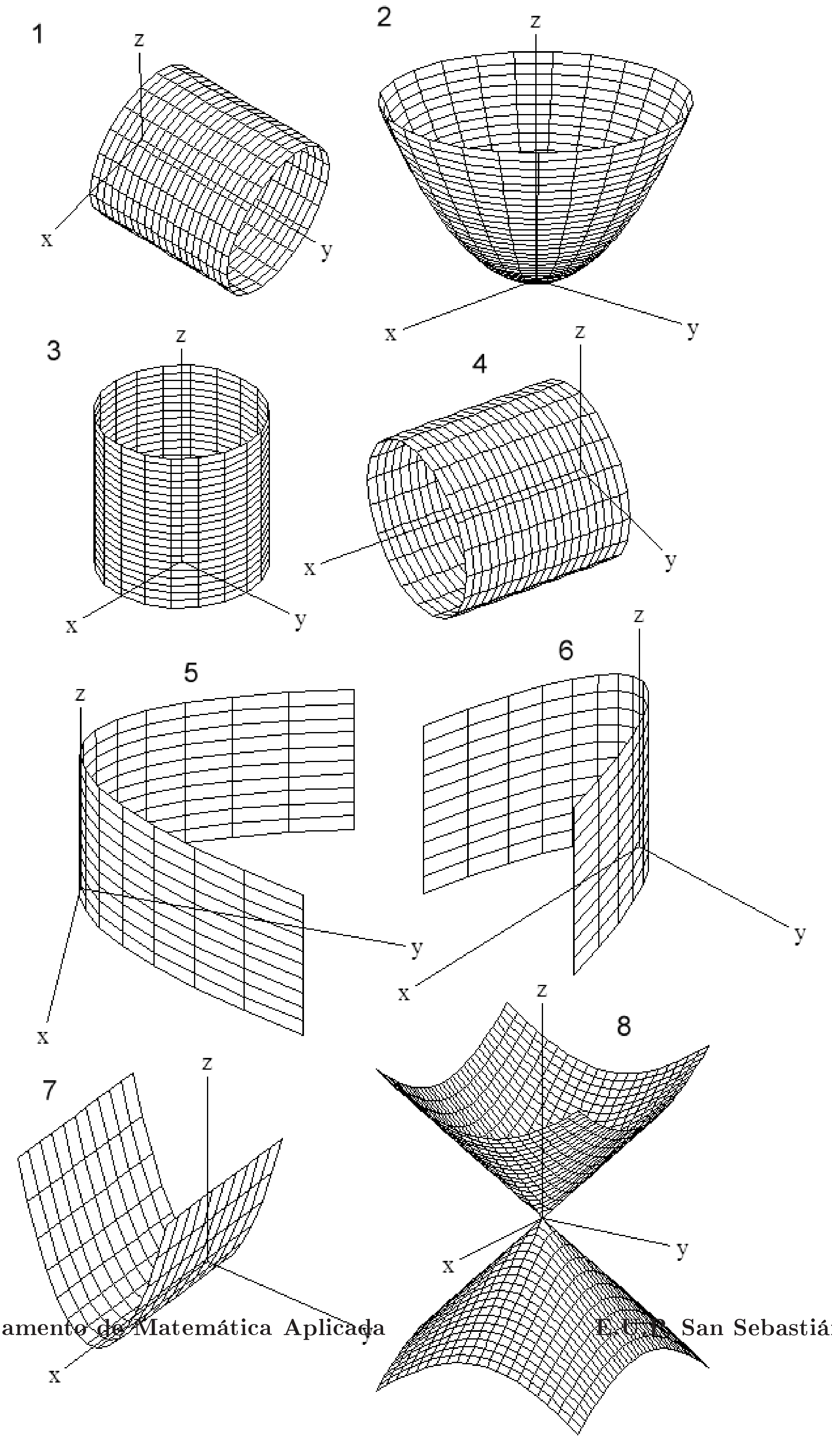
13. Calcular el gradiente de $z(x, y) = ylnx + xy^2$ en el punto $(1, 2)$.

14. Demostrar que la familia de funciones $u(x, t) = 0.5(y(x-ct)-y(x+ct))$ es solución de la ecuación de ondas unidimensional $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Esta ecuación describe las vibraciones de una cuerda elástica.

15. Relacionar cada una de las ecuaciones siguientes con una de las representaciones gráficas adjuntas:

    a) $z = x^2 + y^2$ c) $x^2 + y^2 = 1$ e) $x^2 + z^2 = 1$ g) $x^2 + y^2 = z^2$

    b) $z^2 + y^2 = 1$ d) $y = x^2$ f) $x = y^2$ h) $z = y^2$


1
2
3
4
5
6
7
8
x
y
z

16. Aplicando la definición, calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x,y) = ye^x$ en $(1,2)$ d) $f(p,q) = 3q^2 + p$ en $(2,1)$

b) $f(u,v) = 3u^2 - 2v + 5u`2$ en $(-1,2)$ e) $f(x,y) = e^{xy}$ en $(1,1)$

c) $f(x,y,z) = \cos(2x - yz)$ en $(0,0,0)$ f) $f(x,y,z) = \text{sen}(xyz)$ en $(\pi,1,1)$

17. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de las funciones del problema anterior en los puntos indicados.

18. En cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, aplicar el cambio de variables indicado:

a) $xz_x + yz_y = z$ con $\begin{cases} u = x \\ v = y/x \end{cases}$ c) $e^{2x}(z_{xx+} - z_{yy}) = 1$ con $\begin{cases} u + v = e^{x+y} \\ u - v = e^{x-y} \end{cases}$

b) $z_{xx} - a^2 z_{yy} = 0$ con $\begin{cases} u = y - ax \\ v = y + ax \end{cases}$ d) $2z_{xx} + z_{xy} - z_{yy} + z_y = 0$ con $\begin{cases} u = x + 2y + 2 \\ v = x - y - 1 \end{cases}$

19. En las siguientes ecuaciones realizar el cambio a coordenadas polares:

a) $xz_y - yz_x = 0$ b) $(x - y)z_x + (x + y)z_y = 0$

20. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $z_y = 0$ b) $z_x = 0$ c) $z_{xy} = 0$

d) $z_{yx} = 0$ e) $z_x = z$ f) $z_y = z$

21. Calcular las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \int_x^y \text{sen}\, t \, dt$ en $(1,2)$ f) $f(u,v) = \int_u^v e^{t^2} \, dt$ en $(1,1)$

b) $z = f(x, x/y)$ g) $z = f(x + y, xy)$

c) $z = f(2x, y^2)$ h) $z = f(x^2 + x, 2y + 1)$

d) $z = f(x^2 + y^2)$ i) $z = f(e^x, 2y + \ln y)$

e) $z = f(2x, 3x, 4x)$ j) $z = f(x, 2 + y)$ siendo $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t^2 \end{cases}$

22. Para resolver la ecuación diferencial $z_{xx} - 3z_{xy} + 2z_{yy} = 0$ se aplica el cambio de variables $u = x + Ay, v = x + By$, donde A y B son constantes reales. Elegir A y B de modo que la ecuación resultante al aplicar el cambio sea lo más sencilla posible y resolverla.