Capítulo 5

Ejercicios con Winplot de Integración

5.1. Actividades con el programa teorema de la media.wp2

5.1.1. Funcionamiento:

- Se introducen en las variables **A** y **B** los extremos del intervalo de integración.
- Una función de trabajo $H(x)$. Para editar $H(x)$:
  - seleccionamos **Ecua->Definir Función**, que contiene dos funciones de trabajo $F(x)$ y $G(x)$. Para trabajar con cada una de ellas, en la propia ventana **Ecua->Definir Función**, basta asignar a $F(x)$ la función deseada, es decir $H(x) = F(x)$ o bien $H(x) = G(x)$.
  - En la variable **C** colocaremos en valor medio de $H(x)$ en $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.

    Par calcular este valor medio, procedemos así:

    1. Hacemos clic en **Una->Integración->Integrar** o bien pulsamos $< F7 >$.
    2. En la ventana Integración seleccionamos la función $H(x)$, los límites de integración y el método de integración numérica a emplear.
    3. Hacemos clic en el botón **definida**.
    4. Dividimos este valor entre $(\mathbf{B} - \mathbf{A})$ y lo llevamos a la variable **C**.
    5. Aparecerá un segmento horizontal a la altura del valor medio.
    6. Para calcular la intersección entre la curva de $H(x)$ y este segmento, hacemos clic en **Dos->Intersección** y en esta ventana hacemos clic sucesivamente en el botón **siguiente** para obtener todas las abscisas donde se produce una intersección. Podemos elegir en esta ventana una variable donde depositar los valores y también dejar el punto en el inventario.

5.1.2. Trabajos a realizar:

1. El teorema de la media asegura que $H(x)$ alcanza su valor medio en algún punto z de $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Trabaja con la función $F(x)$. Asegúrate de que el teorema puede aplicarse y

encuentra estos valores z. Modifica el intervalo $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ de tal modo que este punto z sea único, y encuéntralo.

2. Trabaja ahora con la función $G(x)$ en el intervalo $[-1, 2.5]$. ¿Existe el punto de del que habla el teorema de la media? ¿Y en el intervalo $[-1, 1.5]$?

5.2. Actividades con el programa funcion valor medio.wp2

5.2.1. Funcionamiento:

Se introducen los extremos del intervalo $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ y la función de trabajo $H(x)$ como en el programa anterior. Se introduce también la función $\overline{H}(x)$, que representa el valor medio de $H(x)$ en el intervalo $[\mathbf{A}, x]$, es decir,

$$\overline{H}(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x y(z)\, dz$$

5.2.2. Trabajos a realizar:

1. Estudiar si existe intersección entre las gráficas de $H(x)$ y $\overline{H}(x)$. Trabajar con varias parejas de funciones $H(x)$ y $\overline{H}(x)$. En el inventario tienes las siguientes:

$$H(x) = x^2, \quad \overline{H}(x) = \frac{1}{3(x-\mathbf{a})}(x^3 - \mathbf{a}^3) \quad \text{en} \quad [-1, 2]$$

$$H(x) = x \operatorname{sen} x, \quad \overline{H}(x) = \frac{1}{(x-\mathbf{a})}(\operatorname{sen} x - x\cos x + \mathbf{a}\cos\mathbf{a} - \operatorname{sen}\mathbf{a}) \quad \text{en} \quad [-1.2, 7]$$

$$H(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad \overline{H}(x) = \frac{0.5}{(x-\mathbf{a})}(\ln(x^2+1) - \ln(\mathbf{a}^2+1)) \quad \text{en} \quad [-0.2, 2.5]$$

2. ¿Cómo se comporta $\overline{H}(x)$ en dichos puntos de intersección? ¿Puedes explicar ese comportamiento?

3. $\overline{H}(x)$ no está definida en el punto $x = \mathbf{a}$, sin embargo ¿cómo se comporta la función en las proximidades de este punto? ¿Puedes explicarlo?

5.3. Actividades con el programa teorema fundamental.wp2

5.3.1. Funcionamiento:

Representa gráficamente dos funciones, una de ellas continua pero no derivable y la otra no continua.

5.3.2. Trabajos a realizar:

Se trata de estudiar en un ejemplo que la operación integración

$$G(x) = \int_a^x y(z)\,dz \tag{5.1}$$

- Define una función derivable si $y(x)$ es continua
- Define una función continua si $y(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito.

1. Tomar la función $y(x)$ continua en $[-1,1]$ pero no derivable en $x=0$. Evaluar la función (5.1) en algunos puntos próximos a $x=0$, por ejemplo -0.04, -0.03, -0.02, -0.01, 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04. Representar gráficamente estos puntos. Para ello, proceder así:
   - Abrir el cuaderno de Winplot seleccionando **Misc->cuaderno**
   - Anotar los valores de x, $G(x)$ en dos columnas. Por ejemplo, tres anotaciones podrían ser:
     -0.01 0.61495
     -0.02 0.6048
     -0.03 0.59455
   - Copiar en el portapapeles todos los datos anotados. Abrir **Ecua->Punto->Lista**, activar la casilla **pegar** y pinchar en el botón **dibujar**. En el inventario aparecerá la lista de puntos y se representarán gráficamente.

     Aunque sólo hemos representado algunos puntos de la gráfica de $G(x)$, ¿parece ser continua en $x=0$? ¿Derivable en $x=0$?
2. El mismo estudio, pero tomando la función $y(x)$ definida en $[-1,1]$ pero discontinua en $x=0$.

5.4. Actividades con los programas arco y solido de revolucion.wp2, visualizar superficie de revolucion.wp3

5.4.1. Funcionamiento:

arco y solido de revolucion.wp2

Representa gráficamente la función $F(x)$, calcula la longitud de un arco, el área de la superficie de revolución y el volumen del sólido de revolución obtenidos cuando la gráfica de $F(x)$ gira alrededor del eje OX.

visualizar superficie de revolucion.wp3

Representa gráficamente la superficie de revolución obtenida cuando la gráfica de una función gira alrededor del eje OX. El rango donde varía x se establece editando la superficie desde el inventario, dando el rango deseado al parámetro **u** $(uinf, usup)$.

5.4.2. Trabajos a realizar:

1. Calcular numéricamente la longitud del arco $y(x) = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1/3$, empleando **Una->Integración->Longitud del arco**.

2. Calcular numéricamente el área de la superficie de revolución que se obtiene cuando el arco anterior gira alrededor de OX. Emplear **Una->Integración->Superficie de rev**.

3. Calcular numéricamente el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando el arco anterior gira alrededor de OX. Emplear **Una->Integración->Volumen de revolución**.

4. Calcular numéricamente el área y el volumen de algunos sólidos toroidales. Aplicar también en estos casos las expresiones exactas de cálculo que se obtuvieron mediante integración y observar el error cometido en función del método numérico empleado y del número de subintervalos utilizados.