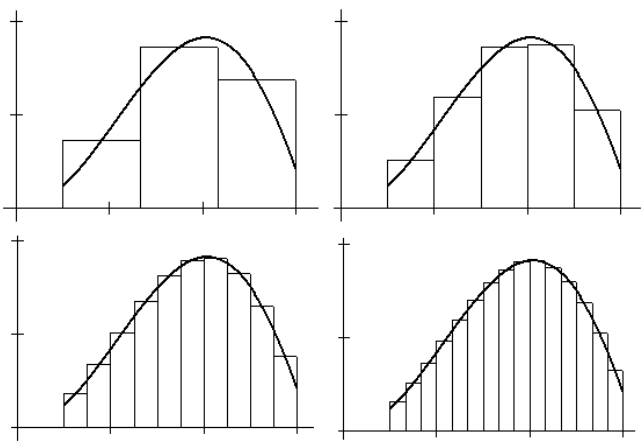
Capítulo 5

Problemas de integración

(En los problemas marcados con el icono es conveniente usar de un programa de ordenador para la representación gráfica de funciones, por ejemplo Winplot).

5.1. Integrales

1. Para definir el valor de la integral de una función $y(x)$ continua en $[a, b]$, hemos seguido el siguiente proceso (ver figura):



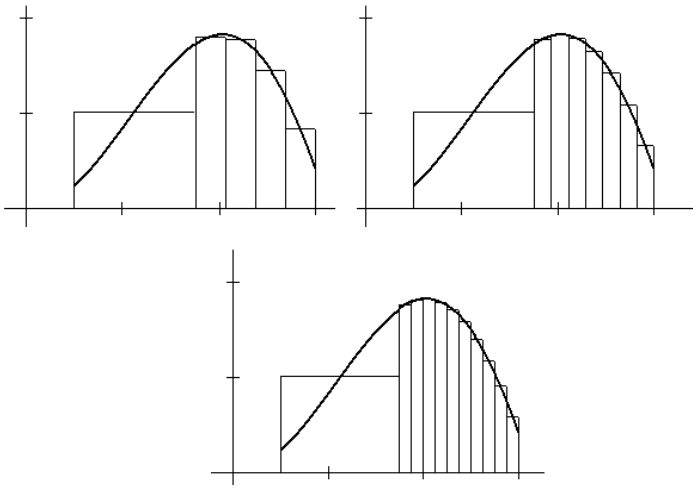
- Dividir $[a, b]$en subintervalos $[x_k, x_{k+1}]$ $k = 0, \ldots, n-1$, donde la distancia entre x_k y x_{k+1} es igual a $h = (b-a)/n$.
- Calcular $T(h) = \sum_{k=0}^{n-1} hy(z_k),\ z_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Si $y(x) \geq 0$, $T(h)$ es aproximadamente el área A limitada por la curva $y(x)$ y el eje OX, $x \in [a, b]$.

- A medida que h se acerca a 0, $T(h)$ se aproxima más al valor de A. Por tanto:

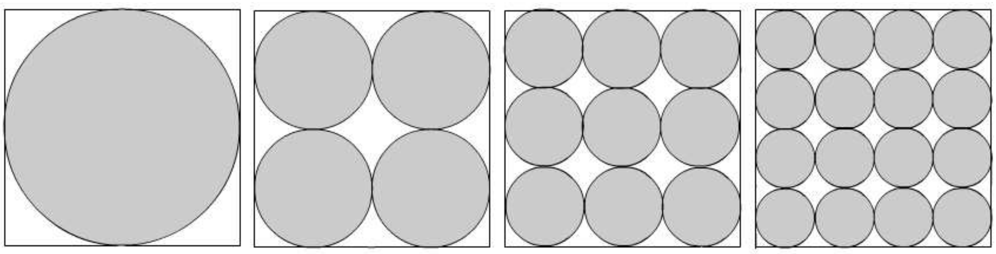
$$\lim_{h\to 0} T(h) = \int_a^b y(x)\, dx = A$$

Ahora bien, ¿podíamos haber dividido el intervalo $[a, b]$ de otro modo para conseguir también convergencia hacia el valor A del área?. Estudia las dos situaciones siguientes y extrae conclusiones:

a) Tomamos siempre como primer subintervalo $[a, (a + b)/2]$, es decir, la mitad izquierda de $[a, b]$. Luego, el restante $[(a + b)/2, b]$ lo vamos dividiendo en subintervalos de igual longitud (ver figura).



b) Aproximamos el área de un cuadrado mediante círculos (ver figura). Las aproximaciones, ¿son cada vez más exactas?.



2. Calcula el valor medio de la función $y(x)$ en $[0, c]$. Estudia el crecimiento de este valor medio y su convergencia cuando c tiende a infinito.

$$y(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Decide si la siguiente afirmación es cierta: ”Supongamos que $y(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ tal que su integral es nula en todo intervalo $[a, b]$. Entonces, $y(x) = 0$ para todo x real”.

4. Sean $y(x)$, $u(x)$ dos funciones cuyas dos primeras derivadas son continuas y tales que $y(x) \leq u(x)$ para todo x. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

   a) $y'(x) \leq u'(x)$ para todo x

   b) $y''(x) \leq u''(x)$ para todo x

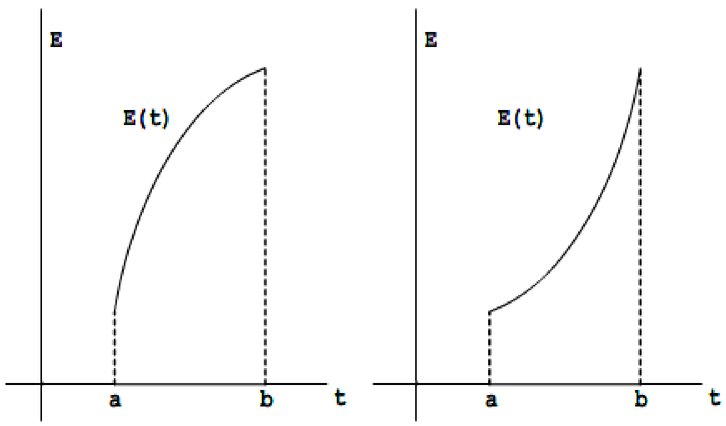
   c) $\int_a^b y(x)\,dx \leq \int_a^b u(x)\,dx$ para todo intervalo $[a, b]$

5. Sea $y(x)$ una función continua en $[0, 2]$, tal que $2 \leq y(x) \leq 4$. Acota el valor de la media de $y(x)$.

6. ¿Cuales de los siguientes valores no es nulo?:

$$a)\ \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen}^3 x\,dx \quad b)\ \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 \operatorname{sen} x\,dx \quad c)\ \int_{0}^{\alpha} \cos x\,dx \quad d)\ \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^3 x\,dx \quad e)\ \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 x\,dx$$

7. Las gráficas adjuntas muestran el espacio $E(t)$ recorrido por dos vehículos en el intervalo de tiempo $[a, b]$. Se pide:



   a) Para cada unos de ellos, la aceleración media ¿ha sido positiva o negativa?

   b) Supongamos que la velocidad en $t = a$ de uno de los vehículos era de 70 Km/h y en $t = b$ de 40 Km/h; para el otro vehículo, la velocidad en $t = a$ fue de 12 Km/h y en $t = b$ de 35 Km/h. Identifica qué par de datos se corresponden con cada gráfica.

   c) Representa cada par de datos de velocidades sobre la correspondiente gráfica.

   d) Si los vehículos circulan durante 15 segundos, ¿cuál es el valor de la aceleración media de cada vehículo?.

8. Obtén los valores medios de las funciones $y(x) = x$, $y(x) = x^2$, $y(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$. Generaliza el resultado para obtener el valor medio en el mismo intervalo de la función $y(x) = x^n$. ¿Qué puede decirse de este valor medio a medida que n se hace más y más grande?. ¿Puede explicarse este resultado a partir de la gráfica de $y(x) = x^n$?.

9. Obtén los valores medios de las funciones $y(x) = x^{1/2}$, $y(x) = x^{1/3}$ en el intervalo $[0, 1]$. Generaliza el resultado para obtener el valor medio en el mismo intervalo de la función $y(x) = x^{1/n}$. ¿Qué puede decirse de este valor medio a medida que n se hace más y más grande?. ¿Puede explicarse este resultado a partir de la gráfica de $y(x) = x^{1/n}$?.

10. Calcula el valor medio de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

    a) $y(x) = x$, en $[-1, 1]$

    b) $y(x) = x^3 - x$, en $[-1, 1]$

    c) $y(x) = \operatorname{sen} x$, en $[-\pi, \pi]$

    d) ¿Por qué ha resultado tan sencillo calcular estos valores medios?. ¿Puedes generalizar el resultado?.

11. Supongamos que $5x^3 + 40 = \int_a^x y(z)\, dz$. Calcula $y(x)$ y el valor de a. ¿Qué hipótesis han sido necesarias?.

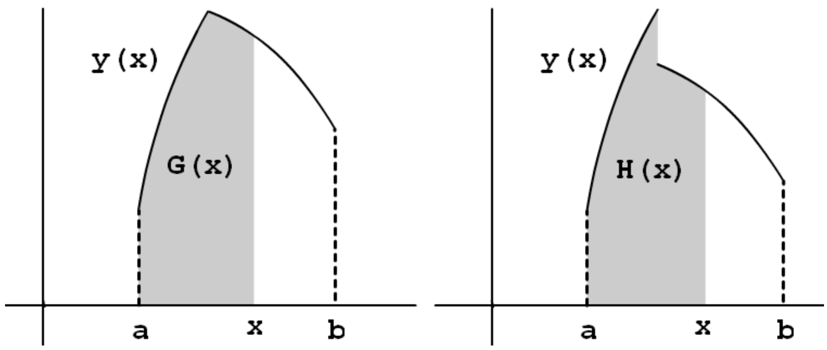
12. Calcula: el domino de $G(x)$, $G'(x)$, $G(4)$ y $G(-4)$, siendo $G(x) = \int_0^x \sqrt{16 - z^2}\, dz$. ¿Qué significan $G(4)$ y $G(-4)$?. Generaliza este resultado.

13. Demuestra que $G(x)$ es derivable, calcula $G'(x)$, y estudia el crecimiento de $G(x)$, siendo $G(x) = \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{z^2}\, dz$. Generaliza este resultado.

14. El teorema fundamental del Cálculo Infinitesimal asegura que si la función $y(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces la función

    $$G(x) = \int_a^x y(z)\, dz$$

    es derivable en todo $x \in (a, b)$, y $G'(x) = y(x)$, aunque la función $y(x)$ no sea derivable en (a, b). Así pues, la operación de integración nos permite construir una función derivable $G(x)$ a partir de una función $y(x)$ que solamente sea continua. Pues bien, en algunos casos también podemos construir mediante integración una función $H(x)$ que sea continua a partir de una función $y(x)$ que no lo sea. Se pide:



a) Explica según la gráfica el significado de $H(x)$. ¿Crees que $H(x)$ será una función continua?. ¿Por qué?.

b) Para la siguiente función discontinua $y(x)$, construye por integración una función continua $H(x)$. Luego, mediante el mismo proceso aplicado a $H(x)$ construye una función derivable $G(x)$. Representa gráficamente todas estas funciones.

$$y(x) = \begin{cases} p & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ q & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (p \neq q)$$

15. Se planea suspender un cable de alta tensión entre dos postes separados 180 metros. El punto más bajo del cable debe estar a una altura de 100 metros para quedar a una distancia de seguridad del tejado de unas viviendas situadas debajo. Utilizar la función $y(x) = a\cosh(x/a)$ para modelizar la curva que describe el cable. Calcular:

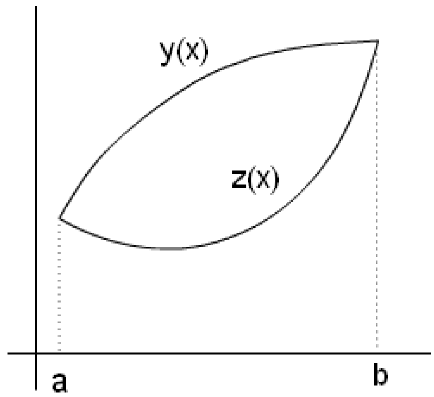
    a) El parámetro a de la curva.

    b) La longitud del cable.

    c) La altura de los postes.

    d) Generalizar el resultado. Calcular la longitud de un arco de catenaria de parámetro a, tendido entre dos postes de igual altura situados a una distancia $2d$.

16. Considerar la región plana D limitada por las gráficas de dos funciones $y(x)$, $z(x)$. Supongamos que D gira alrededor del eje OX. Se pide:

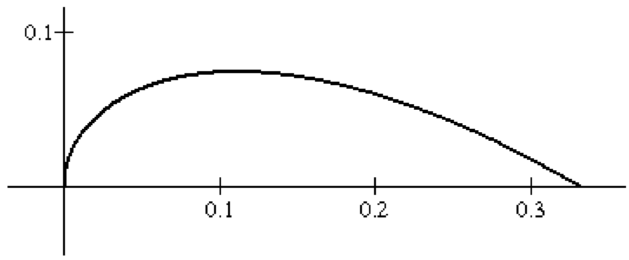


a) Calcular el área de la superficie de revolución obtenida.

b) Calcular el volumen del sólido revolución obtenido.

c) Aplicar estos resultados si la región D es un círculo localizado por encima del eje OX.

17. La superficie de vidrio de una bombilla se va a modelizar haciendo girar alrededor del eje OX la gráfica de la función $y = \frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1/3$, donde x se expresa en metros (ver figura). Calcular la cantidad de vidrio que necesitará cada bombilla, si el espesor será de 0.5 mm.

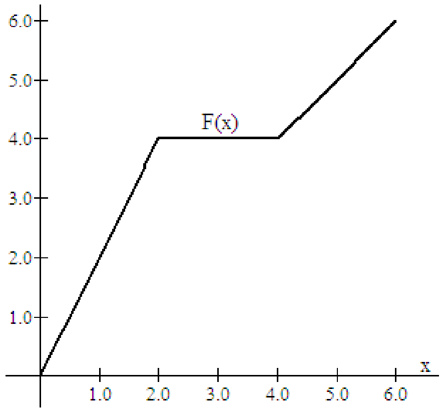


18. Sabemos que si un objeto se desplaza en línea recta una cierta distancia D por la acción de una fuerza constante F, entonces el trabajo T efectuado por F viene dado por $T = F \cdot D$. Supongamos ahora que el objeto se mueve en línea recta, pero sometido a una fuerza continua y variable $F(x)$, donde x es la posición. Calcula el trabajo T efectuado por F. Aplicar el resultado en las siguientes situaciones:

    a) Sabemos que la fuerza F necesaria para comprimir o estirar un muelle es proporcional al desplazamiento producido respecto a su posición de reposo. Supongamos que tenemos un muelle que mide 0.25 m en reposo, y que para comprimirlo 0.05 m ha debido aplicarse una fuerza de $3\,N$ (N=Kg (m/seg2)). Calcular el trabajo realizado por la fuerza. Calcular el trabajo realizado por la fuerza para comprimirlo 3 cm más.

b) Supongamos que una fuerza F traslada un objeto desde $x = 0$ hasta $x = 6$. La figura adjunta representa la gráfica de F. Calcular el trabajo $T(x)$ efectuado por F, donde x es un punto cualquiera del trayecto.

c) Relacionar el valor medio de la fuerza $F(x)$ con el trabajo que realiza.



19. Supongamos que la longitud L cierta curva representada por la función derivable $y(x)$ viene dada por la siguiente expresión:

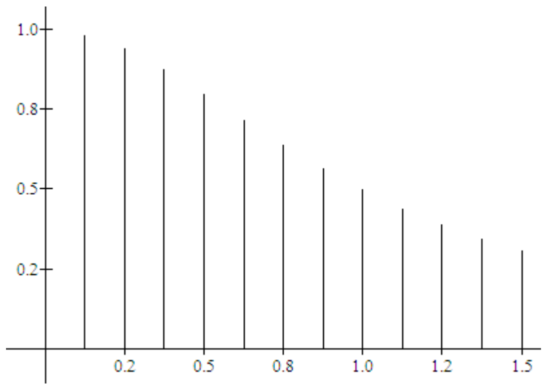
$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}\, dx$$

¿Es posible determinar $y(x)$?. ¿Qué hipótesis podrían añadirse para poder determinar $y(x)$?. Calcula aproximadamente el valor de L, acotando el error cometido.

20. En los siguientes apartados aparece el valor del volumen de un sólido de revolución obtenido cuando cierta curva gira alrededor del eje OX. Para cada uno, obtener la correspondiente función $y(x)$ y dibujar el sólido.

$$a)\ \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx \quad b)\ \pi \int_0^h r^2\, dx \quad c)\ \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx \quad d)\ \pi \int_{-b}^{b} \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) dx$$

21. La tabla y la gráfica adjuntas representan 13 valores de una función $y(x)$. Supongamos que la curva gira alrededor del eje OX. Calcula de forma aproximada el volumen del sólido generado.



x	0.00	0.13	0.25	0.38	0.50	0.63	0.75	0.88	1.00	1.13	1.25	1.38	1.50
y	1.00	0.98	0.94	0.88	0.80	0.72	0.64	0.57	0.50	0.44	0.39	0.35	0.31

22. Discutir el valor de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^r}$, donde r es un parámetro real.

23. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

24. Calcular

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$ 3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^4}}$ 5) $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx$ 6) $\displaystyle\int_o^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\, dx$

7) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x}$ 8) $\displaystyle\int x \cdot 2^{-x}\, dx$ 9) $\displaystyle\int \frac{(5-x)dx}{(x^2-1)}$

10) $\displaystyle\int \frac{(4x^2-4x-3)dx}{(x^2+1)(x-2)}$ 11) $\displaystyle\int \frac{(3x^2-4x+6)dx}{(x-1)^2}$ 12) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\, dx$

13) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 4x \cos 2x\, dx$ 14) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x\, dx$ 15) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

16) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 5x\, dx$ 17) $\displaystyle\int x(5x^2-3)^{36}\, dx$ 18) $\displaystyle\int_0^4 \frac{(1+x)dx}{1+\sqrt{x}}$

19) $\displaystyle\int_0^a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\, dx$ 20) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx$