Capítulo 4

Estudio Local de una función

4.1. ¿Qué problemas nos faltan por resolver?

A lo largo del tema 3 hemos avanzado mucho en el estudio del comportamiento de una función. Hemos encontrado propiedades de $y(x)$ con las que podemos contar si $y(x)$ admite límite en un punto $x = a$; otras propiedades si $f(x)$ es continua; nuevas propiedades si además, la función está definida en un dominio de la forma $[a, b]$; y por último, mucha información sobre $y(x)$ si es derivable.

No obstante, hay que recordar que cada vez que hemos ido exigiendo más condiciones (hipótesis) a $y(x)$. Exigir una nueva hipótesis supone limitar el conjunto de funciones a las que se puede aplicar un concepto ó un teorema. Por ejemplo, no podemos estudiar cómo se comporta $y(x)$ empleando $y'(x)$ si antes no nos aseguramos de que $y(x)$ es derivable.

Ejercicio 4.1 *Elabora un esquema en el que aparezcan los resultados más importantes que hemos estudiado acerca del estudio de funciones. El esquema debe mostrar claramente que cuanto más potente es el concepto, más propiedades se cumplen, pero también supone más condiciones o hipótesis.*

Veamos a continuación un resumen de los problemas que habrá que abordar.

4.1.1. Máximos y mínimos locales

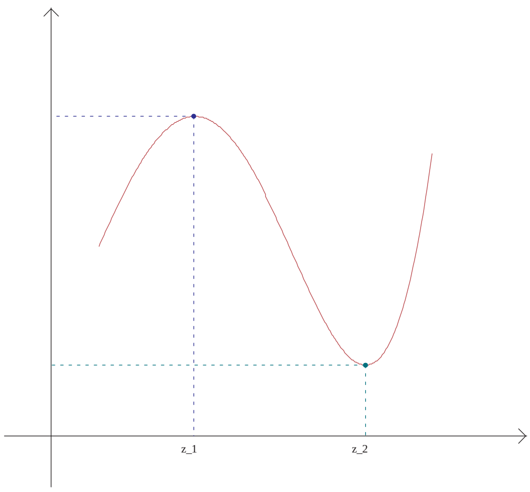


Figura 4.1: Máximo y mínimo

Es importante identificar los puntos donde se produce un cambio en el crecimiento de la función (ver la figura 4.1). La función $y(x)$ puede representar, por ejemplo, una corriente eléctrica, la presión de una caldera, ó el beneficio de una empresa. En todos los casos nos interesará averiguar en qué zonas del dominio de x, $y(x)$ crece ó decrece y en qué puntos hay un cambio en el comportamiento ó un valor máximo ó mínimo local.

4.1.2. Concavidad hacia arriba y hacia abajo

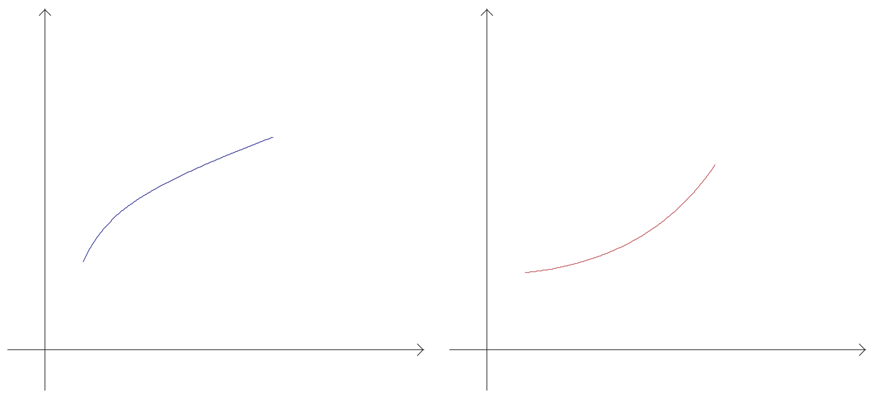


Figura 4.2: Concavidad y convexidad

Ver la figura 4.2: ¿Qué diferencia hay entre estos dos comportamientos de $y(x)$?. ¿Qué propiedades de $y(x)$ están asociadas a uno y otro?

4.1.3. Aproximación de funciones

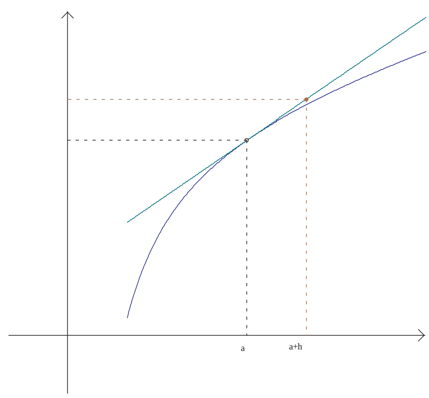


Figura 4.3: Aproximación de una función

Recordemos que la derivada nos proporciona un medio para calcular de forma aproximada valores de funciones (ver la figura 4.3). Se trata de la aproximación mediante la diferencial; para h próximo a 0:
$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$

Sin embargo, esta aproximación puede ser insuficiente si h es relativamente grande. Podemos pensar en calcular la aproximación calculando la diferencial en otro punto b más próximo al punto $a+h$ (ver la figura 4.4), pero para ello es necesario conocer el valor de $y'(b)$, con lo cual de nuevo tenemos el problema de calcular el valor de una función, ahora $y'(x)$. ¿No existirá un modo de aproximar el valor de $y(x)$ en las cercanías de a, pero conociendo sólo datos de $y(x)$ en $x = a$?.

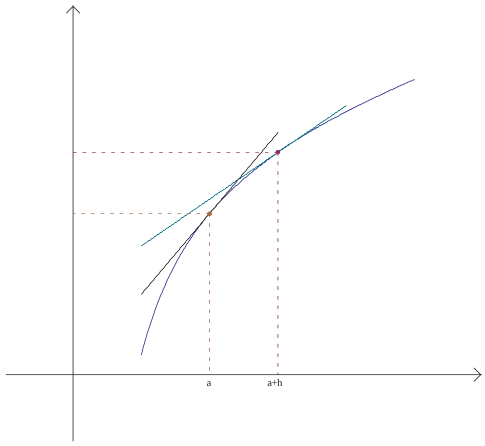


Figura 4.4: Varias derivadas

4.2. Extremos locales

En el apartado 4.1.1 ya hablamos de la importancia de conocer dónde una función alcanza su máximo valor. Observa los ejemplos de las figuras 4.5 y 4.6:

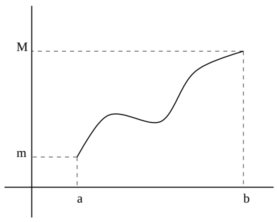


Figura 4.5: Mínimo y máximo en los extremos

En la figura 4.5, $y(x)$ alcanza su mínimo valor en $x = a$ y su máximo valor en $x = b$.
En la figura 4.6, $y(x)$ alcanza su máximo valor en $x = b$ pero no tiene mínimo en $[a, b]$.

¿Bajo qué condiciones podemos asegurar que $y(x)$ alcanza su máximo y su mínimo en el intervalo $[a, b]$?. El Teorema de Weierstrass nos indica que es suficiente (pero no necesario) que $y(x)$ sea continua en $[a, b]$. (Ver Tema 3 apartado 12.3).

Ejercicio 4.2 *Para las siguientes funciones, estudiar si es posible aplicar el Teorema de Weierstrass y calcular los puntos donde $y(x)$ alcanza el máximo/mínimo, si existen.*

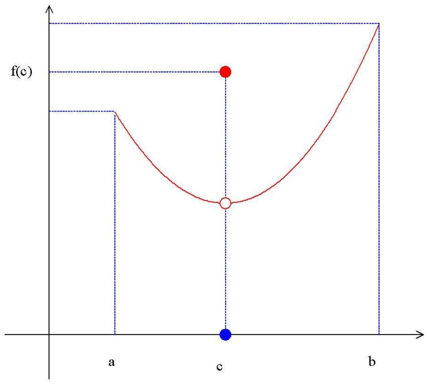


Figura 4.6: Máximo en $x = b$ pero no hay mínimo

- $y(x) = 1 + x^2 \quad x \in [-1, 2]$
- $y(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & si \;\; x \in [-1, 0) \cup (0, 2] \\ 3 & si \;\; x = 0 \end{cases}$
- $y(x) = x^2 + 1 \quad x \in (-1, 2)$

Veamos otro ejemplo (figura 4.7):

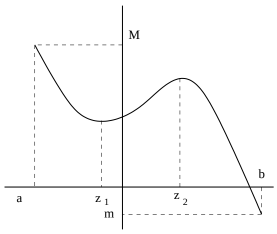


Figura 4.7: Máximo y mínimo locales

$y(z)$ alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$: $m = y(b)$, $M = y(a)$. Pero en $[a, b]$ hay dos puntos z_1 y z_2 donde $y(z)$ tiene un comportamiento especial. No es en z_1 donde $y(z)$ alcanza el mínimo valor posible en el intervalo $[a, b]$, pero $y(z_1)$ sí es el mínimo valor que $y(z)$ alcanza en las cercanías de z_1. Vamos a escribir de modo formal esta propiedad:

$$\exists \delta > 0 \;\; | \;\; y(z_1) \leq y(z) \quad \forall z \in (z_1 - \delta, z_1 + \delta)$$

Recordemos que al intervalo $(z_1 - \delta, z_1 + \delta)$ lo llamamos *entorno de* z_1.

Del mismo modo:

$$\exists \epsilon > 0 \;\; | \;\; y(z_2) \geq y(z) \quad \forall z \in (z_2 - \epsilon, z_2 + \epsilon)$$

Así pues, hemos distinguido dos tipos de comportamiento de $y(z)$ (ver la figura 4.7):

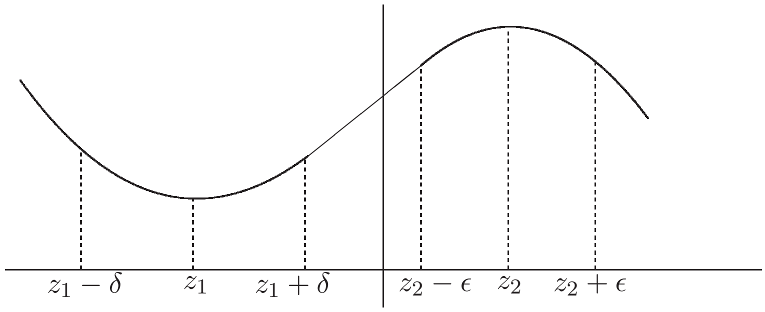


Figura 4.8: Comportamiento local

- *Comportamiento global* de $y(z)$ en todo el dominio $[a, b]$:

$$\begin{array}{lll} \forall z \in [a,b], & y(z) \leq y(a) & \text{máximo absoluto en } a \\ \forall z \in [a,b], & y(z) \geq y(a) & \text{mínimo absoluto en } b \end{array}$$

- *Comportamiento local* de $y(z)$ en las cercanías de z_1 y z_2 (ver la figura 4.8):

$$\begin{array}{llll} \exists \delta > 0 \ \mid \ y(z_1) \leq y(z) & \forall z \in (z_1 - \delta, z_1 + \delta) & y(z) \text{ presenta un mínimo local en } z_1 \\ \exists \epsilon > 0 \ \mid \ y(z_2) \geq y(z) & \forall z \in (z_2 - \epsilon, z_2 + \epsilon) & y(z) \text{ presenta un máximo local en } z_2 \end{array}$$

Encontrar los máximos y mínimos locales (a los que vamos a llamar *extremos locales*) es importante porque son puntos en los que se producen “picos” en la fluctuación de una magnitud, por ejemplo una corriente eléctrica.

Ahora nuestro problema es: ¿cómo identificar esos extremos locales?. Los gráficos anteriores nos sugieren una conjetura: si $y(x)$ es derivable, PARECE que en los extremos locales se tiene $y' = 0$, ¿será verdad?. Observa el ejemplo de la figura 4.9:
Parece que en los extremos locales z_1, z_2 la tangente es horizontal: $y'(z_1) = y'(z_2) = 0$.

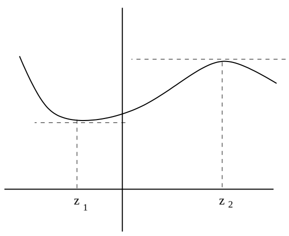


Figura 4.9: Tangentes horizontales

Pero ¡cuidado! para aplicar esta supuesta propiedad, debemos contar con la hipótesis de derivabilidad. En el ejemplo de la figura 4.10 no existe $y'(z_1)$.

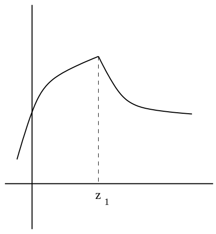


Figura 4.10: No existe la derivada en z_1

Ahora vamos a demostrar la propiedad:

Teorema 4.1 *Si $y(x)$ es derivable en $x = c$ y existe un extremo en este punto, entonces $y'(c) = 0$.*

Demostración

Supongamos por ejemplo que $y(x)$ alcanza un mínimo local en $x = c$. Si se trata de un máximo, el razonamiento es similar. Como $y(x)$ es derivable, existe

$$y'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{y(c+h) - y(c)}{h}$$

y como $y(c)$ es mínimo local, si tomamos h lo bastante próximo a 0, se tendrá:

$$y(c+h) \geq y(c) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } h > 0 \Rightarrow \quad \dfrac{y(c+h) - y(c)}{h} \geq 0 \Rightarrow y'(c) \geq 0 \\ \\ \text{si } h < 0 \Rightarrow \quad \dfrac{y(c+h) - y(c)}{h} \leq 0 \Rightarrow y'(c) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow y'(c) = 0$$

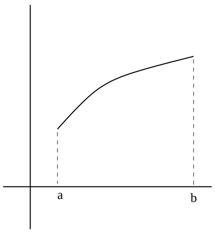
Ejercicio 4.3 *Si $y(x)$ admite un extremo local en $x = c$, ¿debe ser $y(x)$ derivable en ese punto?. Si $y'(c) = 0$, ¿necesariamente $y(x)$ presenta un extremo local en $x = c$?.*

4.3. ¿Es nulo el valor de la velocidad en algún momento?

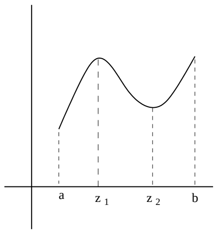
Si $y(x)$ representa el movimiento de un objeto, la fuerza aplicada a un móvil, la temperatura en un horno, etc., nos interesa conocer en qué instantes la velocidad de y respecto a x es 0. Además, en esos puntos también sabemos que *puede* existir un extremo local.

Nuestro problema es: ¿dada una función derivable, ¿bajo qué condiciones podemos asegurar que existe c tal que $y'(c) = 0$?.

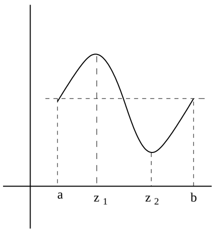
Veamos algunos ejemplos:



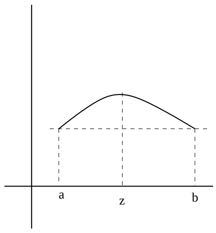
$y'(x) > 0 \ \forall x$



$\exists z_1, z_2 \ | \ y'(z_1) = y'(z_2) = 0$



$y'(z_1) = y'(z_2) = 0; \quad y(a) = y(b)$



$y'(z) = 0; \quad y(a) = y(b)$

Parece que la condición $y(a) = y(b)$ es suficiente (pero no necesaria) para garantizar que existe c tal que $y'(c) = 0$, $c \in [a, b]$. ¿Será cierta esta propiedad en general?. En efecto, esta propiedad se conoce como Teorema de Rolle.

Teorema 4.2 (de Rolle) *Para garantizar que existe $c \in (a, b)$ tal que $y'(c) = 0$, es suficiente con que $y(x)$ sea continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y que $f(a) = f(b)$.*

Demostración

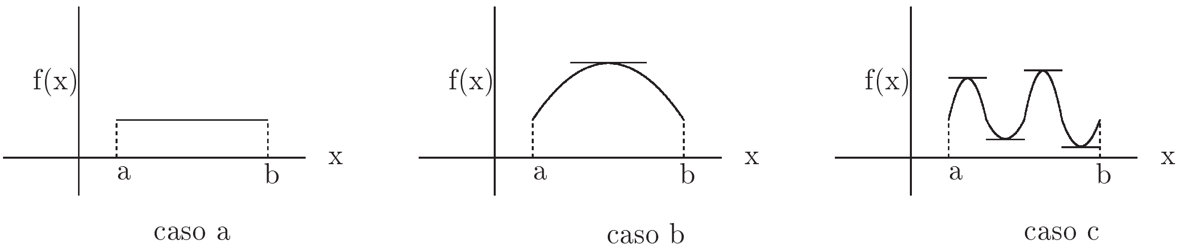


Figura 4.11: Teorema de Rolle

Si la función es constante en $[a, b]$, (ver el caso a de la figura 4.11), la demostración es inmediata pues

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Si la función no es constante tomará valores distintos de $f(a) = f(b)$. Supongamos que toma valores mayores que $f(a)$ (la demostración sería similar si consideráramos que toma valores menores), (ver el caso b de la figura 4.11).

Como $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, por el teorema de Weierstrass, $f(x)$ tiene un máximo M y un mínimo m. Si el máximo $M \neq f(a)$, se cumple:

$$\exists c \in (a, b) \;\mid\; f(c) = M \;\; \wedge \;\; f(x) \leq M \;\; \forall x \in [a, b] \Rightarrow c \text{ es un máximo local } \Rightarrow f'(c) = 0$$

4.4. El Teorema del Valor Medio

Un camionero está circulando por una carretera cuya velocidad máxima es de 70 Km/h. Cuando ve a lo lejos un coche patrulla de la Ertzaintza en el arcén, reduce su velocidad de modo que al pasar a la altura del coche, su velocidad es de 65 Km/h. Cuando el coche patrulla se pierde de vista, el camionero aumenta su velocidad. Unos kilómetros después, ve otro coche patrulla, también estacionado en el arcén. El camionero hace la misma operación: reduce su velocidad de modo que al pasar a la altura de los ertzainas, su velocidad es de 68 Km/h. Sin embargo, el agente le ordena que se detenga.

Agente.- Buenos días. ¿Puedo ver su documentación?.

Camionero.- Claro. ¿Ocurre algo, agente?.

Agente.- Ocurre que ha circulado Ud. a una velocidad superior a la permitida en este tramo, que es de 70 Km/h.

Camionero.- No es posible. Mi velocidad ha sido siempre inferior a 70 Km/h.

Agente.- El coche patrulla situado 6 Km atrás, nos ha informado que Ud. pasó a su altura hace 4 minutos.

Camionero.- Pero mi velocidad era menor de 70 Km/h, me acuerdo perfectamente.

Agente.- Eso no importa. Sé que ha circulado a velocidad superior a 70 Km/h en algún momento porque en otro caso no es posible recorrer los 6 Km en 4 minutos.

Camionero.- ¿Por qué no?.

Agente.- Porque recorrer 6 Km en 4 minutos, significa llevar una velocidad media de 90 Km/h. En algún momento ha circulado Ud. a 90 Km/h.

El razonamiento del agente parece impecable. ¿Será correcto?.

Podemos enunciar el problema así:

Dada una función $y(x)$ definida en $[a, b]$, se trata de averiguar si siempre existe, al menos, un punto $z \in [a, b]$ en el que la velocidad coincide con la velocidad media.

Como hablamos de velocidad en un punto z, ya estamos exigiendo derivabilidad en (a, b), y por tanto continuidad. Vamos a enunciar el problema de modo riguroso:

Dada $y(x)$ *continua en* $[a, b]$*, derivable en* (a, b)*,* ¿$\exists z \in (a, b) \mid y'(z) = \dfrac{y(b) - y(a)}{b - a}$?

Observa las siguientes gráficas (figura 4.12)

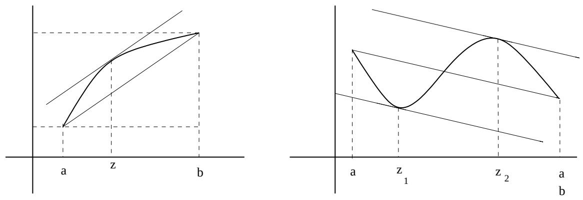


Figura 4.12: Punto medio

Parece ser que fácilmente construiremos el punto z. Este es el procedimiento:

1. Trazamos el segmento que une los puntos de coordenadas $(a, y(a))$, $(b, y(b))$. La pendiente m de este segmento es precisamente la velocidad media de $y(x)$ en el intervalo $[a, b]$:

   $$m = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}$$

2. Trazamos una recta paralela a ese segmento, y que sea tangente a la curva (puede haber una o varias soluciones), como en el ejemplo de la figura (4.12).

3. La abscisa $z \in (a, b)$ donde se traza esa recta tangente, es un punto que cumple la condición

   $$y'(z) = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}$$

Ahora vamos a demostrarlo de forma rigurosa:

- Trazamos la recta secante por $(a, y(a))$, $(b, y(b))$, que tiene de ecuación:

  $$u(x) = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}(x - a) + y(a)$$

- Estamos buscando un punto z tal que $u'(z) = y'(z)$ (ambas rectas paralelas):
  ¿$\exists z \in (a, b)$ tal que $u'(z) - y'(z) = 0$?

- Estudiemos la función diferencia:
  $h(x) = u(x) - y(x)$ ¿$\exists z$ tal que $h'(z) = 0$?

  Recordemos que tenemos un teorema que habla de un punto z tal que $h'(z) = 0$: el Teorema de Rolle. Veamos si $h(z)$ cumple todas las hipótesis:

1. $h(x)$ está definida en $[a, b]$ porque $u(x)$ e $y(x)$ lo están.
2. $h(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) porque $u(x)$ e $y(x)$ lo son.
3. $h(a) = u(a) - y(a) = y(a) - y(a) = 0$
   $h(b) = u(b) - y(b) = y(b) - y(b) = 0$

Por lo tanto según el teorema de Rolle:

$$\exists z \in (a, b) \ \mid \ h'(z) = 0 \Leftrightarrow y'(z) = u'(z) = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}$$

Si volvemos a nuestro camionero:

$[a, b] = [0, 4]$; en el que la función $E(t) =$ espacio recorrido, es continua y derivable. Estas propiedades podemos asumirlas como hipótesis físicamente razonables, ¿eres capaz de explicar por qué?.

$E(0) = 0\ Km$, $E(4) = 6\ Km$

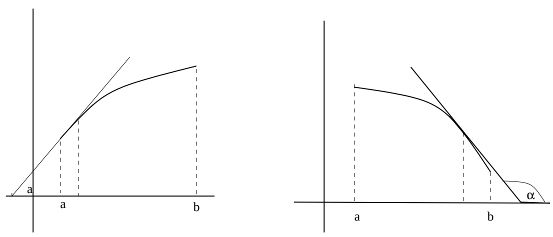
Luego $\exists z \in [0, 4]$ tal que $y'(z) = \dfrac{6 - 0}{4/60} = 90\ Km/h$

El camionero no se libra de la multa. Este resultado se llama *Teorema del valor medio.*

Ejercicio 4.4 *Encuentra la "fórmula de la sanción de tráfico". Es decir, si un vehículo recorre $D\ Km$ en m minutos en una vía donde la limitación de velocidad es de $v\ Km/h$, ¿cuándo pueden los agentes estar seguros de que el vehículo ha rebasado la velocidad v?.*

4.5. Crecimiento y decrecimiento

Si $y'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, entonces $y(x)$ es creciente en (a, b); del mismo modo $y'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$ indica $y(x)$ decreciente en (a, b). Se trata de un resultado que ya utilizamos en el capítulo anterior, pero no lo demostramos. Gráficamente es muy claro:



$y'(x) > 0 \Leftrightarrow \tan\alpha > 0$ $\quad$ $y'(x) < 0 \Leftrightarrow \tan\alpha < 0$

CRECIENTE $\quad$ DECRECIENTE

Ahora, utilizando el Teorema del valor medio, podemos demostrar este resultado. Pero ¿por qué usar el Teorema del valor medio?. Vamos a escribir de manera formal lo que significa que $y(x)$ sea creciente en (a, b) (ver la figura 4.13):

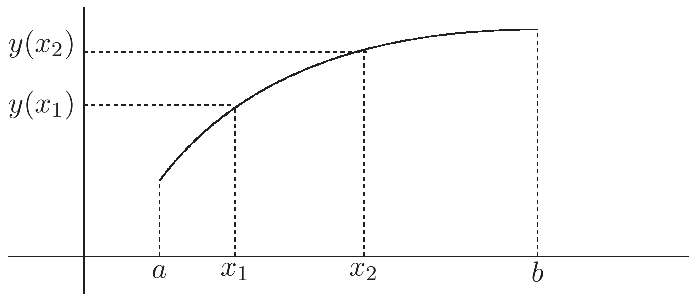


Figura 4.13: Función creciente

$$y(x) \text{ creciente en } (a,b) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow y(x_1) < y(x_2)$$

Utilizamos el teorema del valor medio porque este teorema establece una relación entre $y(x_1), y(x_2), y'(z), z \in (x_1, x_2)$

Aplicando el teorema en $[x_1, x_2]$:

$$\exists z \in (x_1, x_2) \ \mid \ y'(z) = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como $y'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow y'(z) > 0 \Rightarrow \dfrac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \overset{x_1 < x_2}{\Rightarrow} y(x_2) > y(x_1)$

Por tanto, $y(x)$ es creciente en (a,b).

Ejercicio 4.5 *Demostrar que si* $y'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$ *entonces* $y(x)$ *es decreciente en* (a,b).

Ejercicio 4.6 *Sabemos que :*

$y'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow y(x)$ *creciente en* (a,b)
$y'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow y(x)$ *decreciente en* (a,b)

Ahora la pregunta es: Si el dominio no es un intervalo de la forma (a,b)*, ¿siguen siendo ciertos esos dos resultados?.*

Observa lo versátil que es el teorema del valor medio: Ha servido para sancionar al camionero y para demostrar la relación que existe entre el crecimiento de $y(x)$ e $y'(x)$. Pues bien, todavía podemos sacarle aún mas rendimiento.

Veamos cómo demostrar un par de resultados más que son muy intuitivos:

1. Si $y'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow y(x)$ es constante en (a,b)

   Ya sabíamos que $y(x) = cte \Rightarrow y'(x) = 0$. Lo que ahora vamos a ver es el recíproco

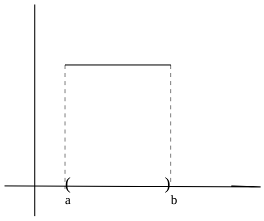


Figura 4.14: Derivada nula

Teorema 4.3 *Decir que $y'(x) = 0$ en (a,b) es equivalente a decir que $y(x)$ es constante en (a,b) (ver la figura 4.14).*

Demostración

Tomamos un $x \in (a,b)$ cualquiera. Aplicamos el Teorema del valor medio en $[x,b]$: Existe un $z \in (x,b)$ que cumple:

$$y'(z) = \frac{y(b) - y(x)}{b - x}; \text{ como } y'(x) = 0 \Rightarrow y'(z) = 0; \text{ por tanto } y(x) = y(b) \quad \forall x \in (a,b)$$

2. Si dos funciones tienen la misma derivada, entonces se diferencian en una constante (ver la figura 4.15):

Teorema 4.4 *Si $y'(x) = v'(x) \quad \forall x \in (a,b),\ \exists C \in \mathbb{R} \ \mid \ y(x) = v(x) + C$*

Demostración

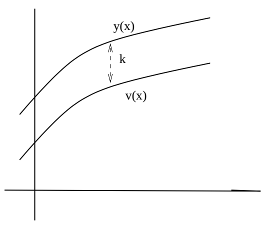


Figura 4.15: Derivadas iguales

$$y'(x) = v'(x) \Rightarrow y'(x) - v'(x) = 0 \Rightarrow \big(y(x) - v(x)\big)' = 0$$

Aplicando el resultado anterior:

$$\exists C \in \mathbb{R} \ \mid \ y(x) - v(x) = C$$

Ejercicio 4.7 *De forma similar a lo propuesto en el ejercicio 4.6: si en vez de un dominio de la forma (a, b), se trata de un dominio diferente D, ¿siguen siendo válidas esas dos propiedades?.*

4.6. El Teorema de Taylor

Vamos a recordar dos problemas importantes que todavía no hemos resuelto:

1. Reconocimiento de máximos y mínimos locales: Sabemos que si $y(x)$ es derivable en el punto $x = a$ y además $y(x)$ presenta un extremo local en ese punto, entonces, necesariamente $y'(a) = 0$. Ahora bien, la condición $y'(a) = 0$ no garantiza que $y(x)$ tenga un extremo en $x = a$. Es decir, puede suceder que $y'(a) = 0$ pero que no exista extremo en ese punto. Esto ocurre, por ejemplo, con $y = x^3$ en $a = 0$ (ver la figura 4.16).

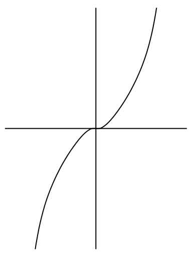


Figura 4.16: Función $y = x^3$

$y(x) = x^3 \Rightarrow y'(x) = 3x^2,\ y'(0) = 0$ pero no hay extremo.

Así pues, nuestro problema es: ¿Qué condiciones debe cumplir $y(x)$ para poder asegurar que presenta un extremo en $x = a$?.

2. Concavidad y convexidad (ver la figura 4.17).

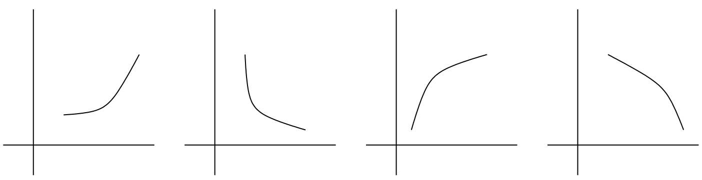


Figura 4.17: Funciones cóncavas y convexas

Las preguntas son: ¿Es útil saber si $y(x)$ es cóncava hacia arriba ó cóncava hacia abajo? ¿cómo podemos reconocer ambos tipos de comportamiento?.

Ambos problemas parecen no tener relación entre sí, sin embargo, la solución para ambos tiene su origen en la misma idea. Veamos en que consiste esa idea: Ambos problemas se refieren a una propiedad local de $y(x)$, es decir, al estudio del comportamiento de $y(x)$ en un entorno del punto $x = a$. En la figura 4.18 se observa:

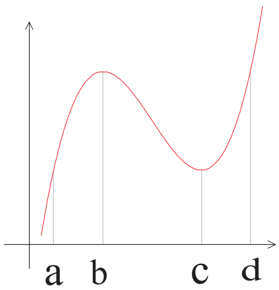


Figura 4.18: Diversas propiedades

- Es convexa en un entorno de $x = a$
- Posee extremos locales en $x = b$ y en $x = c$
- Es cóncava en un entorno de $x = d$

Pues bien, la idea es: Vamos a fabricarnos otra función $z(x)$, que sea muy sencilla de manejar, de modo que $z(x)$ esté muy próxima a la función $y(x)$ en las cercanías del punto $x = a$.

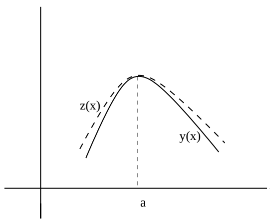


Figura 4.19: Funciones "próximas"

Si $z(x)$ está muy próxima a $y(x)$, el comportamiento local de ambas deberá ser muy parecido. En el ejemplo de la figura 4.19 ambas tienen un extremo en $x = a$ y son convexas.

La búsqueda de $z(x)$ nos abre nuevas preguntas:

1. ¿Qué tipo de función será $z(x)$?. Debe ser sencilla de manejar y de evaluar.
2. ¿Cómo conseguiremos que $z(x)$ esté próxima a $y(x)$?.

La respuesta a la primera pregunta es: $z(x)$ será un polinomio. Los polinomios son funciones continuas, derivables, fáciles de evaluar, de derivar, de integrar, de representar gráficamente, ... En cuanto a la segunda pregunta, veamos un ejemplo que nos puede ayudar a entender cómo construiremos $z(x)$:

Supongamos que $y(x) = \mathrm{e}^x$ y que deseamos fabricar un polinomio $z(x)$ que esté próximo a $y(x)$ en las cercanías del punto $a = 0$. Podemos empezar por la aproximación mediante la diferencial (recta tangente), que es un polinomio de grado 1:

$z(x) = y(a) + y'(a)(x - a)$, o bien haciendo $x - a = h$, $\quad z(a + h) = y(a) + y'(a) \cdot h$, si h está próximo a 0 tenemos $z(a + h) \approx y(a + h)$. Como $a = 0, y'(0) = 1:\ z(h) = 1 + h$ ó

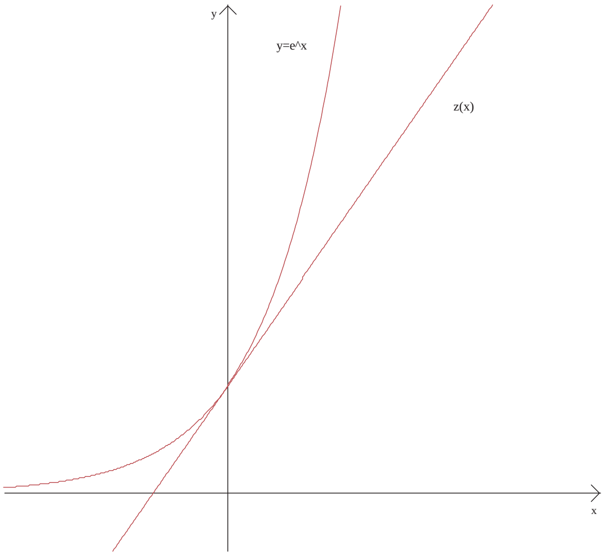


Figura 4.20: Aproximación primera de $y = \mathrm{e}^x$

$z(x) = 1 + x$ (ver la figura 4.20).

$z(x)$ e $y(x)$ tienen en común dos propiedades:

- Pasan por el mismo punto: $z(0) = y(0) = 1$
- Tienen la misma tangente en ese punto: $z'(0) = y'(0) = 1$

Ahora vamos a construir un polinomio $P_2(x)$ que coincida en el punto $a = 0$ con $y(x)$ hasta la segunda derivada (ver la figura 4.21):

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

ó hasta la tercera derivada:

$$P_3(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

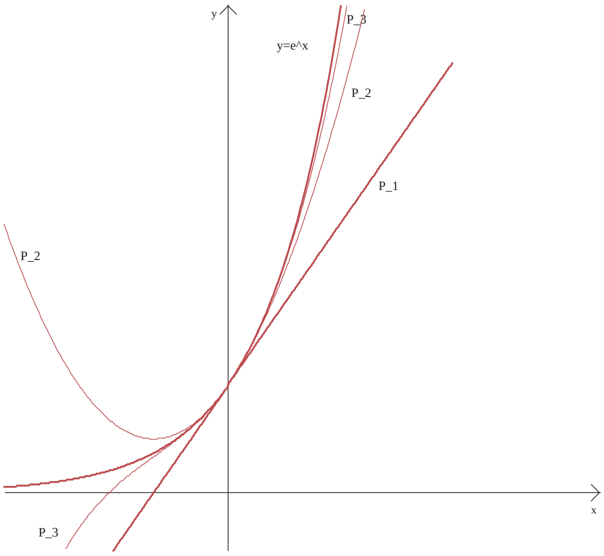


Figura 4.21: Aproximaciones de distintos órdenes

Así pues, a medida que más derivadas en $x = a$ coincidan para ambas funciones, parece que más próximas están al menos en las cercanías del punto $x = a$. Veamos cómo calcular, en general, el polinomio:

grado n=1 : $P_1(x) = y(a) + y'(a)(x - a)$

grado n=2 : $P_2(x) = \frac{1}{2}(x - a)^2 + P_1(x)$

grado n=3 : $P_3(x) = \frac{1}{6}(x - a)^3 + P_2(x)$

⋮

grado n : $P_n(x) = \frac{1}{n!}(x - a)^n + P_{n-1}(x)$

$$P_n(x) = y(a) + y'(a)(x - a) + \frac{y''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{y^{(n}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Este polinomio se llama **Polinomio de Taylor** de grado n.

O bien, tomando $h = x - a$

$$P_n(a + h) = y(a) + y'(a) \cdot h + \frac{y''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{y'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \cdots + \frac{y^{(n}(a)}{n!} \cdot h^n$$

Cuanto más próximo esté h de 0, más cercano estará $P_n(a + h)$ de $y(a + h)$.

Cuanto más nos alejamos del punto $x = a$, mayor será la distancia entre $P_n(a + h)$ e $y(a + h)$ (ver la figura 4.22).

En general no es posible conocer la distancia que hay entre el valor exacto $y(a + h)$ y la aproximación $P_n(a + h)$. Sin embargo, tenemos un teorema, llamado *Teorema de Taylor*,

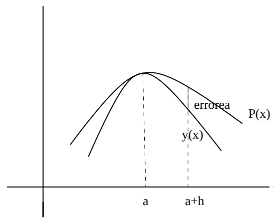


Figura 4.22: Deterioro de la aproximación

que nos puede dar mucha información acerca de "como de grande" es $y(a+h) - P_n(a+h)$. Veamos que dice este teorema:

Teorema de Taylor: Si aproximamos el valor $y(a+h)$ mediante el polinomio de Taylor de grado n, $P_n(a+h)$, entonces la diferencia entre ambos valores el igual a:

$$y(a+h) - P_n(a+h) = \frac{y^{(n+1}(z)}{(n+1)!}\, h^{n+1}$$

donde z es un número en general desconocido, pero del que sólo sabemos que se encuentra en el intervalo $(a, a+h)$ (ó $(a+h, a)$ si $h < 0$).

Una cuestión importante: para poder calcular el polinomio de Taylor de grado n de $y(x)$ en el punto $x = a$, es necesario que existan $y(a), y'(a), \cdots, y^{(n}(a)$. Si, además, queremos usar el Teorema de Taylor, debe ser derivable hasta orden $n+1$ y esta derivada ser continua.

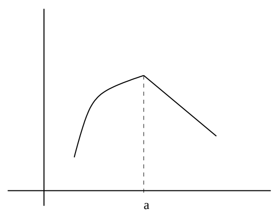


Figura 4.23: Función no derivable

Para la función de la figura 4.23 no podemos calcular ni siquiera $P_1(x)$ en $a = 0$ porque no existe $y'(a)$

Veamos otro ejemplo: $y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 1 & x > 0 \end{cases}$

Se trata de calcular el polinomio de Taylor del mayor orden posible.

Si $x < 0 \Rightarrow y'(x) = \mathrm{e}^x$

Si $x > 0 \Rightarrow y'(x) = x + 1$

$y'(0^-) = \mathrm{e}^0 = 1; \quad y'(0^+) = 0 + 1 = 1; \quad y(0^+) = y(0^-) = 1 \Rightarrow$ continua en $x = 0$

Por tanto, existe $y'(0) = 1$

Si $x < 0 \Rightarrow y''(x) = \mathrm{e}^x$
Si $x > 0 \Rightarrow y''(x) = 1$
$y''(0^-) = \mathrm{e}^0 = 1;\quad y''(0^+) = 1;\quad y'(x)$ continua en $x = 0$
Por tanto, existe $y''(0) = 1$

Si $x < 0 \Rightarrow y'''(x) = \mathrm{e}^x$
Si $x > 0 \Rightarrow y'''(x) = 0$
$y'''(0^-) = \mathrm{e}^0 = 1;\quad y'''(0^+) = 0;\quad y''(x)$ continua en $x = 0$ pero no derivable en $x = 0$

Por tanto, no existe $y'''(0)$. Así pues, sólo es posible calcular $P_1(x)$ y $P_2(x)$:
$P_1(x) = y(0) + y'(0)x = 1 + x$
$P_2(x) = P_1(x) + y''(0)\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

No podemos aplicar el Teorema de Taylor para $n = 2$ porque necesitaríamos que existiera $y'''(0)$. Lo aplicamos para $n = 1$ y $h < 0$:

$$\exists z \in (h, 0)\ \mid\ y(h) = 1 + h + \frac{y''(z)}{2}\,h^2 \Leftrightarrow \exists z \in (h, 0)\ \mid\ \mathrm{e}^h = 1 + h + \frac{h^2}{2}\,\mathrm{e}^z \qquad (4.1)$$

(si aplicamos el Teorema de Taylor para $h > 0$, no obtenemos ninguna información adicional)
En este caso, podemos además determinar el valor de z, a partir de la expresión anterior:

$$z = \ln\left(\frac{2(\mathrm{e}^h - 1 - h)}{h^2}\right)$$

Pero vemos que esta forma de calcular z es más complicada que calcular el valor exacto de la función e^h. Normalmente no nos interesa (o no es posible) conocer el valor de z sino acotar el error. Veamos qué significa esto:

Supongamos que deseamos usar la expresión (4.1) para calcular aproximadamente el valor de $\mathrm{e}^{-0.01}$; así pues, tomaremos $h = 0.01$:

$$\mathrm{e}^{-0.01} = 1 - 0.01 + \frac{(-0.01)^2}{2}\,\mathrm{e}^z \quad z \in (-0.01, 0)$$

Si tomamos como valor aproximado de $\mathrm{e}^{-0.01}$
$1 - 0.01 = 0.99$, entonces

$$\text{ERROR } = \frac{(0.01)^2}{2}\,\mathrm{e}^z < \frac{(0.01)^2}{2} = 0.00005$$

Como z es desconocido (sólo sabemos que se encuentra en el intervalo $(-0.01, 0)$) no podemos evaluar el error, pero sí podemos dar una acotación del mismo. Como $z \in (-0.01, 0)$, $\mathrm{e}^z < \mathrm{e}^0 = 1$.

Si ahora vamos a calcular e^{-5} tomamos (4.1) con $h=-5$:

$$\exists z\in(-5,0)\ \mid\ \mathrm{e}^{-5}=1-5+\frac{25}{2}\,\mathrm{e}^{z}\Leftrightarrow\exists z\in(-5,0)\ \mid\ \mathrm{e}^{-5}=-4+12.5\,\mathrm{e}^{z}$$

Nuestra aproximación es $P_1(5)=-4$, y el error cometido es exactamente

$$\text{ERROR }=12.5\,\mathrm{e}^{z}<12.5\cdot 1=12.5$$

(Como $z\in(-5,0)$, $\mathrm{e}^{z}<\mathrm{e}^{0}=1$)

Por lo tanto nuestra aproximación es $\mathrm{e}^{-5}\approx -4$ con un error menor que 12.5. Algo ha debido ir mal porque $\mathrm{e}^{x}>0,\forall x$. Si comparamos esta aproximación con el valor exacto hasta tres dígitos, resulta $\mathrm{e}^{-5}\approx 0.006$ ¡ nuestra aproximación es malísima ! ¿qué ha ocurrido?. Que hemos tomado un valor de h muy grande, nos hemos alejado mucho (relativamente) del punto $a=0$. Obtenemos pues, que $P_1(x)$ no nos proporciona una aproximación válida para calcular el valor de e^{-5}.

Ejercicio 4.8 *Calcular los polinomios de Taylor de mayor grado $P_2(x),P_3(x),P_4(x),\cdots$, hasta obtener una aproximación con tres dígitos decimales exactos. Calcula una cota del error cometido para calcular $y=\mathrm{e}^{x}$.*

4.7. Cómo reconocer un extremo local

Sabemos que la condición que debe cumplir $y(x)$ para que tenga un máximo local en $x=a$ es (ver la figura 4.24):

$y(a+h)\leq y(a)$ para h lo suficientemente próximo a 0.

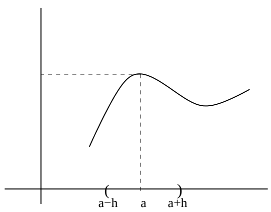


Figura 4.24: Extremo local

Si hacemos $x=a+h$, en el teorema de Taylor nos aparecen ambos términos $y(a+h),y(a)$. Supongamos que $y(x)$ cumple las condiciones necesarias para que se pueda aplicar el Teorema de Taylor para $n=1$:

$$\exists z\in(a-h,a+h)\ \mid\ y(a+h)=y(a)+y'(a)h+\frac{1}{2}\,y''(z)h^{2}$$

Pero sabemos que si $y(x)$ presenta un máximo relativo en $x = a$, necesariamente $y'(a) = 0$. Por tanto:

$$y(a+h) - y(a) = \frac{1}{2}\, y''(z)h^2, \quad z \in (a-h, a+h)$$

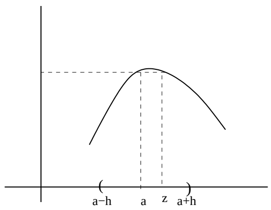


Figura 4.25: Signo de $y(a+h) - y(a)$

Así pues, si se cumple que $y'(a) = 0$ (condición necesaria), el signo de $y(a+h) - y(a)$ está relacionado con el signo de $y''(z)$ en un entorno del punto a (ver la figura 4.25). Como además se cumple que $\frac{1}{2}\, h^2 > 0, \quad \forall h \neq 0$, tenemos:

$$\text{signo } \left(y(a+h) - y(a)\right) = \text{signo } \left(y''(z)\right)$$

z es un valor desconocido, del que sólo sabemos que se encuentra en $(a-h, a+h)$, ¿podemos saber cuál es el signo de $y''(z)$?. Sí, a condición de conocer el signo de $y''(a)$:

Recordemos el teorema: “Si $v(x)$ es una función continua en $x = a$ y $v(a) \neq 0$, entonces $v(x)$ tiene el mismo signo que $v(a)$ en un cierto entorno de a”.

Observando la figura 4.26, como $v(a) > 0$, $\exists h > 0 \;\mid\; v(x) > 0 \;\forall x \in (a+h, a-h)$

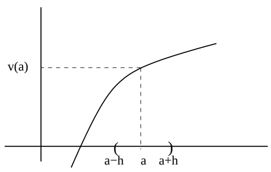


Figura 4.26: Entorno de $x = a$

por lo tanto, si $y''(x)$ es continua:

$$\text{signo } \left(y(a+h) - y(a)\right) = \text{signo } \left(y''(a)\right) \text{ para } h \text{ lo bastante próximo a } 0$$

luego:

- Si $y''(a) > 0 \Rightarrow y(a+h) > y(a)$ para h lo bastante próximo a $0 \Rightarrow$ mínimo local.
- Si $y''(a) < 0 \Rightarrow y(a+h) < y(a)$ para h lo bastante próximo a $0 \Rightarrow$ máximo local.

Así pues, ya tenemos una condición suficiente para que $y(x)$ presente un extremo en el punto $x = a$. Ahora bien, hay que tener en cuenta las hipótesis que debe cumplir $y(x)$ para que este resultado pueda aplicarse.

Ejercicio 4.9 *Enunciar este criterio de reconocimiento de máximos y mínimos locales, teniendo mucho cuidado en indicar las condiciones que debe cumplir $y(x)$.*

Desgraciadamente, este criterio no es aplicable en un caso: $y''(a) = 0$. En este caso no podemos decir nada del signo de $y''(z)$. Por ejemplo $y(x) = x^3$ en el punto $a = 0$, $y''(0) = 0$, no puede aplicarse el criterio.

La solución es utilizar el teorema de Taylor para $n = 2$:

$$\exists z \in (a-h, a+h) \ \mid \ y(a+h) - y(a) = \frac{1}{6} y'''(z) h^3$$

y procediendo de modo idéntico, para valores de h lo suficientemente próximos a 0:

$$\text{signo } \left(y(a+h) - y(a)\right) = \text{signo } \left(y'''(z)h^3\right)$$

observa que ahora el signo de h es importante porque $\text{signo}(h^3) = \text{signo}(h)$; así pues, si $y'''(a) \neq 0$ e $y'''(x)$ es continua:

$$\text{signo}\left(y(a+h) - y(a)\right) = \text{signo}(h{\cdot}y'''(a)) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } h > 0 \Rightarrow & \text{signo}\left(y(a+h) - y(a)\right) = \text{signo}(y'''(a)) \\ \text{si } h < 0 \Rightarrow & \text{signo}\left(y(a+h) - y(a)\right) \neq \text{signo}(y'''(a)) \end{cases}$$

Supongamos por ejemplo que $y'''(a) > 0$:

$$\begin{cases} y(a+h) > y(a) & \text{para } h > 0 \\ y(a+h) < y(a) & \text{para } h < 0 \end{cases}$$

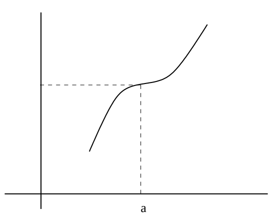


Figura 4.27: No hay extremo

¡En estas condiciones no puede haber extremo!. Así pues, si $y'(a) = y''(a) = 0$ pero $y'''(a) > 0$, entonces $y(x)$ NO presenta ni máximo ni mínimo local en $x = a$. (Esto le ocurre a $y = x^3$ en $a = 0$).

Ejercicio 4.10 *Demuestra que tampoco existe extremo en $x = a$ si $y'''(a) < 0$. Enuncia este criterio prestando mucha atención a las condiciones que debe cumplir $y(x)$ para que se pueda aplicar.*

¿Y qué ocurre si también $y'''(a) = 0$? Pues usaremos el valor de $y^{\mathrm{IV}}(a)$. ¿Y si $y^{\mathrm{IV}}(a) = 0$?. Usaremos $y^{v}(a)$ y así sucesivamente. En general, supongamos que

$y'(a) = y''(a) = \cdots = y^{(n}(a) = 0$ pero $y^{(n+1}(a) \neq 0$, siendo $y^{(n+1}(x)$ continua. ¿Cómo podemos reconocer si existe un extremo local?.

Ejercicio 4.11 *Enunciar y demostrar el criterio general para reconocimiento de extremos. Tendremos cuidado a la hora de indicar las condiciones que debe cumplir $y(x)$ para que pueda aplicarse este criterio.*
AYUDA: Estudiar los diferentes casos que se dan cuando $y^{(n+1}(a) > 0$, $y^{(n+1}(a) < 0$, para n par y n impar.

4.8. Cómo reconocer la concavidad/convexidad

Hemos aprendido a reconocer cuándo una función derivable es creciente o decreciente:

Si $v'(x) > 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow v(x)$ es creciente en (a, b).
Si $v'(x) < 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow v(x)$ es decreciente en (a, b).

Pero recordando también que $v'(x)$ es la velocidad de v respecto a x, podemos averiguar si esta velocidad es creciente o decreciente:

Si $v''(x) > 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow v'(x)$ es creciente en $(a, b) \Rightarrow$ la velocidad es creciente en (a, b) (o lo que es lo mismo, la aceleración en el intervalo (a, b) es positiva).
Si $v''(x) < 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow v'(x) \Rightarrow$ la velocidad es decreciente en (a, b) (aceleración negativa en (a, b)).

De acuerdo, pero ¿qué aspecto tiene la gráfica de una función $v(x)$ (derivable hasta orden 2) tal que su velocidad es creciente o decreciente?. ¿Somos capaces de reconocer esta propiedad sólo con ver la gráfica de $v(x)$?.

Se trata de un nuevo problema que involucra a $v(x)$ y $v''(x)$. ¿Qué teorema usamos para resolverlo?. El Teorema de Taylor, por supuesto. Vamos a aplicarlo para $n = 1$:

$$\exists z \in (a-h, a+h)\ \mid\ v(a+h) = v(a) + v'(a) \cdot h + \frac{1}{2} v''(z) \cdot h^2$$

Pero recuerda que $v(a) + v'(a) \cdot h$ es la ordenada, en el punto $a + h$ de la recta tangente en el punto $x = a$ (ver la gráfica 4.28). Por lo tanto, la diferencia

$$\overbrace{v(a+h)}^{\text{func.}} - \overbrace{(v(a) + v'(a) \cdot h)}^{\text{tangente}} = \frac{1}{2} v''(z) \cdot h^2$$

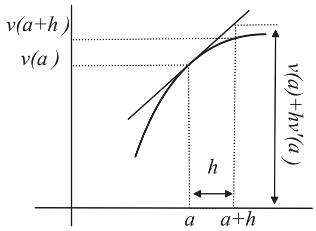


Figura 4.28: Estudio de la concavidad

nos indica si la gráfica de v queda por encima o por debajo de la gráfica de la recta tangente:

Si $v(a+h) - v(a) - v'(a) \cdot h > 0 \Rightarrow$ la gráfica de $v(x)$ queda por encima de la gráfica de la recta tangente; si $v(a+h) - v(a) - v'(a) \cdot h < 0$, lo contrario, la tangente por encima.

Pero:

$$\text{signo}\,\big(v(a+h) - v(a) - v'(a) \cdot h\big) = \text{signo}\left(\frac{1}{2}\,h^2 \cdot v''(z)\right) = \text{signo}\,\big(v''(z)\big)$$

y si $v''(x)$ es continua, sabemos que para valores de h lo bastante próximos a 0:

signo $(v''(z)) =$ signo $(v''(a))$. Por tanto:

- Si $v''(a) > 0 \Rightarrow$ la velocidad de $v(x)$ es creciente en un entorno de $x = 0$ y eso significa que la recta tangente a $v(x)$ queda por debajo de la curva. ¿Qué aspecto tiene una curva $v(x)$ que cumpla esta condición? (ver la gráfica 4.28).

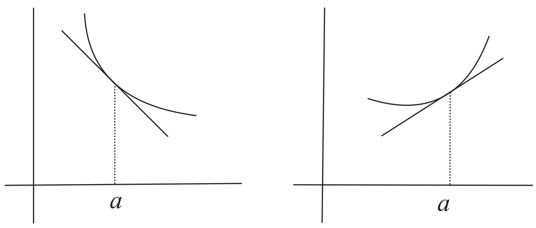


Figura 4.29: Concavidad hacia arriba

$v''(a) > 0$ significa que $v(x)$ es cóncava hacia arriba en un entorno de $x = a$ ¡¡ cóncava hacia arriba significa velocidad creciente !!. Ya sabemos cómo reconocer en la gráfica de $v(x)$ las zonas donde la velocidad de v respecto a x es creciente.

- Del mismo modo, la concavidad hacia abajo está relacionada con el decrecimiento de la velocidad de $v(x)$.

  La recta tangente queda por encima de la gráfica: es cóncava hacia abajo (ver la gráfica 4.30).

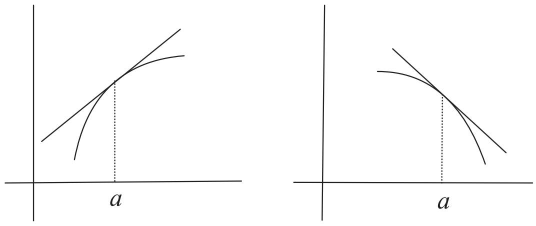


Figura 4.30: Concavidad hacia abajo (convexidad)

Ejercicio 4.12 *Demostrar que $v''(a) < 0$, indica que $v(x)$ es cóncava hacia abajo en un entorno de $x = a$.*

Nota: En algunos libros se llama convexa a la curva que es cóncava hacia abajo, y se llama cóncava a la que es cóncava hacia arriba, por lo que nosotros usaremos indistintamente ambas definiciones.

Veamos un ejemplo. Supongamos que estamos llenando de agua un depósito esférico (ver la gráfica 4.31). Se trata de estudiar cómo varía la altura h que alcanza el agua en cada instante.

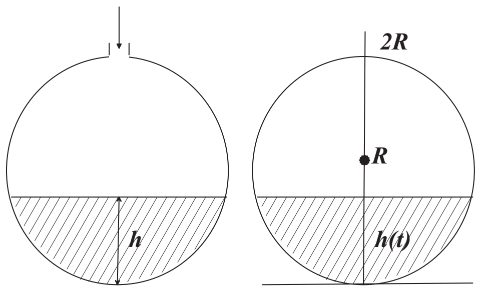


Figura 4.31: Depósito esférico

Vamos a llamar R al radio de la esfera (ver la gráfica 4.31). El enunciado no dice nada del modo en que se vierte el agua, por lo que vamos a suponer como hipótesis que el ritmo de vertido es constante; en consecuencia $h(t)$ será una función continua; parece razonable pensar que $h(t)$ será también derivable, aunque habrá que demostrarlo. Además $0 \leq h \leq 2R$, y $h(t)$ es creciente porque h está aumentando continuamente. ¿Cómo será la gráfica de $h(t)$?. Vamos a trazar algunas en la figura 4.32:

¿Será alguna de estas gráficas la que realmente sigue la función $h(t)$?:

Observemos que la velocidad de h ($h'(t) = dh/dt$) va disminuyendo hasta que h vale R (la mitad de la esfera) (ver la gráfica 4.33). A partir de ese punto, la velocidad de h irá aumentando hasta que la esfera se llene. Así pues, sin hacer operación alguna, sabemos:

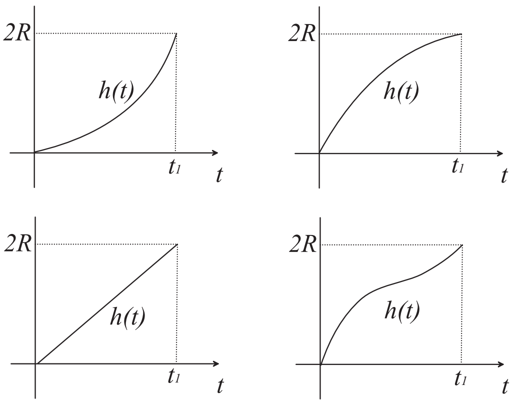


Figura 4.32: Posibles gráficas de $h(t)$

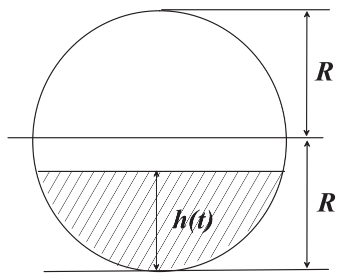


Figura 4.33: Llenado de la esfera

1. $h'(t) > 0 \quad \forall h \in (0, 2R)$ (ya que h es creciente)
2. h' decreciente si $h \in (0, R) \Rightarrow h'' < 0 \Rightarrow h$ cóncava hacia abajo $\forall h \in (0, R)$
3. h' creciente si $h \in (R, 2R) \Rightarrow h'' > 0 \Rightarrow h$ cóncava hacia arriba $\forall h \in (R, 2R)$

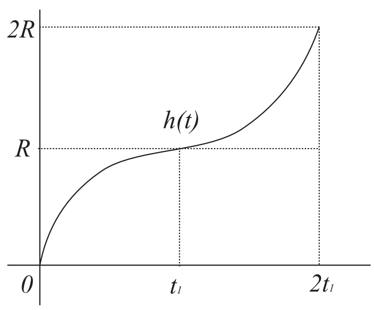


Figura 4.34: Función $h(t)$

¿Y qué ocurre en el instante t_1 en el que $h = R$, es decir cuando se ha llenado medio depósito? (ver la gráfica 4.34). En t_1 tiene lugar un cambio en el crecimiento de la velocidad de h: la velocidad pasa de decreciente a creciente. Gráficamente se distingue este punto porque tiene lugar en él un cambio en la concavidad, en este ejemplo h pasa de ser cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba. Se dice que $h(t)$ presenta una *inflexión* en el punto t_1 (ver la gráfica 4.35).

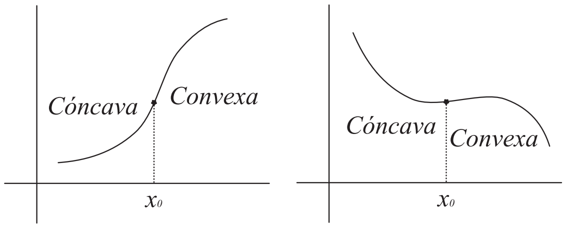


Figura 4.35: Puntos de inflexión

Ahora vamos a realizar otro tipo de estudio, el analítico, al que estarás más acostumbrado:

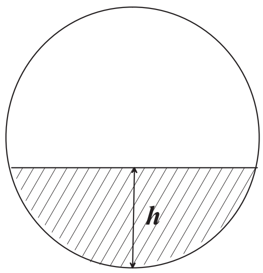


Figura 4.36: Función volumen

El volumen $V(t)$ en cada instante se relaciona con la altura del modo siguiente (ver la gráfica 4.36):

$$V = \frac{\pi}{3} h^2(3R - h) \tag{4.2}$$

Se trata del volumen del casquete esférico.

Observa que si $h = 2R \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 =$ volumen de la esfera completa. Si suponemos como hipótesis que entra agua a velocidad constante, significa que $\frac{dV}{dt} = k > 0$; por ejemplo, k podría valer 17 litros/minuto; derivamos la ecuación (4.2) respecto de t:

$$V' = \frac{\pi}{3}\left(2hh'(3R - h) - h^2h'\right) = \pi hh'(2R - h) = k \Rightarrow h' = \frac{k}{\pi h(2R - h)}$$

Como $h < 2R \Rightarrow h' > 0 \Rightarrow h(t)$ es siempre creciente.

Veamos ahora el signo de h'':

$$h''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{k}{\pi h(2R-h)}\right) = \frac{k}{\pi}\,\frac{2(h-R)}{h^2(2R-h)^2}\cdot\frac{dh}{dt} = \frac{2k^2(h-R)}{\pi^2 h^3(2R-h)^3}$$

donde el único factor que cambia de signo es $h - R$. Por tanto:

- Si $h < R \Rightarrow h'' < 0 \Rightarrow h$ convexa $\Leftrightarrow h'(t)$ es decreciente en $(0, R) \Leftrightarrow$ velocidad de h decreciente en $(0, R)$
- Si $h > R \Rightarrow h'' > 0 \Rightarrow h$ cóncava $\Leftrightarrow h'(t)$ es creciente en $(R, 2R) \Leftrightarrow$ velocidad de h creciente en $(R, 2R)$

h'' cambia de concavidad al pasar por $h = R \Rightarrow$ presenta una inflexión en el instante en que $h = R$. Observamos, además, que $h'' = 0$ para $h = R$.

Hemos visto cómo el signo de $y''(a)$ está relacionado con la concavidad de $y(x)$:

- $y''(a) > 0 \Rightarrow y(x)$ cóncava hacia arriba en un entorno de a
- $y''(a) < 0 \Rightarrow y(x)$ cóncava hacia abajo en un entorno de a

Además, si $y''(x)$ cambia de signo cuando $x = a$, tendremos un punto de inflexión en $x = a$. De acuerdo pero, ¿qué pasa si $y''(a) = 0$?. Usaremos el Teorema de Taylor para $n = 2$:

$$\exists z \in (a-h, a+h) \;\mid\; y(a+h) = y(a) + y'(a)\,h + y'''(z)\frac{h^3}{6}$$

Si $y'''(a) \neq 0 \Rightarrow y'''(z) \neq 0$ para h lo suficientemente próximo a 0. Si también $y'''(a) = 0$, emplearemos $y^{\mathrm{IV}}(a)$, etc.

Ejercicio 4.13 *La misma tarea que en el ejercicio 4.11, pero ahora hay que enunciar el criterio general para reconocer cuándo una función $y(x)$ es cóncava hacia arriba/abajo en un entorno de $x = a$ y cómo puede reconocerse que en $x = a$ existe un punto de inflexión.*

4.9. Desarrollo en serie de $y(x)$

En temas anteriores hemos utilizado las expresiones de las funciones $\mathrm{e}^x, \operatorname{sen} x, \cos x$ como una suma infinita de potencias de x. En concreto:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pues bien, estos desarrollos en serie están basados también en el Teorema de Taylor; si suponemos que $y(x)$ es derivable hasta un orden cualquiera $n+1$:

$$\exists z \in (a-h, a+h) \;\mid\; y(a+h) = y(a)+y'(a)\cdot h+\frac{1}{2}\,y''(a)\cdot h^2+\cdots+y^{(n}(a)\frac{h^n}{n!}+y^{(n+1}(z)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

si ahora suponemos que el resto se hace más próximo a cero a medida que n crece, es decir, si:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y^{(n+1}(z)}{(n+1)!} = 0$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} y(a+h) = \lim_{n\to\infty}\left(y(a)+y'(a)\cdot h+\cdots+\frac{y^n(a)}{n!}\cdot h^n\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{y^{(n+1}(z)h^n}{(n+1)!} \Leftrightarrow y(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n}(a)h^n}{n!}$$

llamando $x = a+h$ nos queda:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n}(a)(x-a)^n}{n!} \tag{4.3}$$

La expresión (4.3) se llama desarrollo en serie de Taylor de $y(x)$ en el punto $x = a$. Es importante entender que para que una función $y(x)$ pueda desarrollarse en serie de potencias de Taylor, es necesario que cumpla dos hipótesis:

1. Derivable hasta un orden n cualquiera.
2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{y^{(n}(z)h^n}{n!} = 0 \quad z \in (a-h, a+h)$$

Veamos un ejemplo: Desarrollar en serie de potencias $y = \mathrm{e}^x$ en $a = 0$:

1. Existe $y^{(n}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, siendo $y^{(n}(x) = \mathrm{e}^x$
2. $$\frac{y^{(n}(z)h^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^z h^n}{n!}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^z h^n}{n!} = 0 \;\; \forall z \in \mathbb{R}$$

Luego se cumplen las hipótesis.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Observa qué resultados tan importantes están basados en el Teorema de Taylor, por lo que podemos llamar “gema matemática” a este versátil resultado (ver la gráfica 4.37).

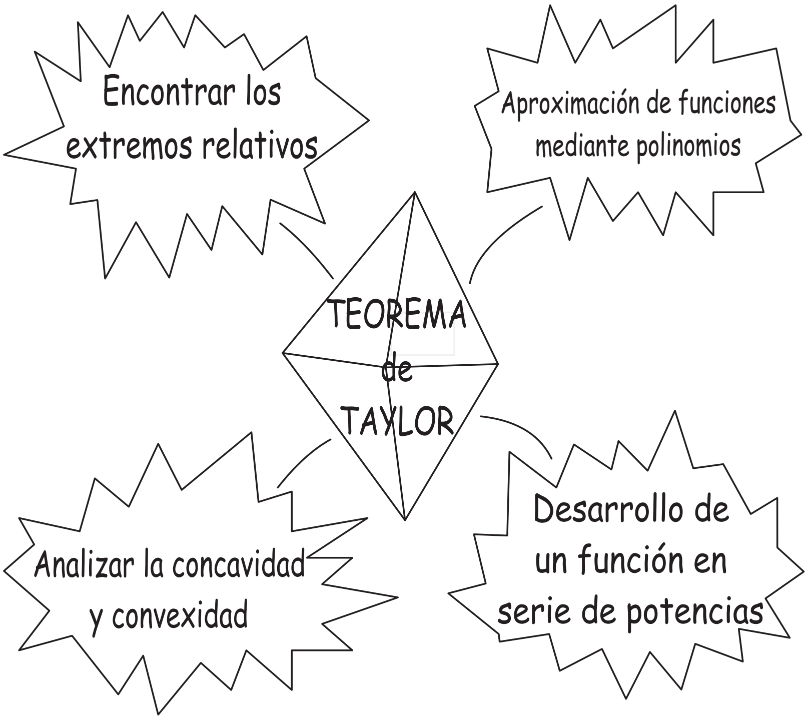


Figura 4.37: Aplicaciones del Teorema de Taylor

Sin embargo, esta versatilidad también tiene un coste: es muy exigente. Para calcular el polinomio de Taylor $p_n(x)$, $y(x)$ debe ser derivable hasta orden n. Y para desarrollar $y(x)$ en serie de potencias, debe existir $y^{(n}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

¿Y qué podemos hacer si nos encontramos con una función $y(x)$ que ni siquiera es continua?.

Existen varias teorías matemáticas que pueden aplicarse en estos casos. Una de ellas, las Series de Fourier, las estudiaremos más adelante, pero aún hay que trabajar mucho para entender de qué se trata.

4.10. El Teorema del punto fijo

En el apartado 2.8.2, hablamos de un importante teorema, llamado Teorema del punto fijo, que nos permite asegurar la existencia de solución para la ecuación:

$$x = y(x) \tag{4.4}$$

¿Y por qué es interesante una solución de la ecuación (4.4)?. Pues resulta que muchas ecuaciones del tipo

$$g(x) = 0 \tag{4.5}$$

se pueden escribir de la forma (4.4). Entonces, resolviendo (4.4) encontramos una solución de (4.5).

Veamos un ejemplo: Supongamos que debemos resolver la ecuación: $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$; en este caso, tenemos la ecuación de la forma (4.5), siendo

$$g(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \tag{4.6}$$

Ahora veamos varias formas de de escribir (4.6) de la forma (4.4):

1. $4x^2 = 10 - x^3 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$
2. $x = x + x^3 + 4x^2 - 10$
3. $x = \left(\dfrac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$
4. $x = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

La solución de cualquiera de los casos nos proporciona la solución de (4.6). Vamos a dar el enunciado completo del Teorema del punto fijo:

Teorema 4.5 *Si $y(x)$ es continua en $[a, b]$, y además $y(x) \in [a, b]$, entonces la ecuación $x = y(x)$ tiene al menos una solución en $[a, b]$*

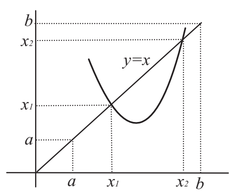


Figura 4.38: Dos puntos fijos

En el ejemplo de la figura 4.38, $\forall x \in [a, b]$ se cumple $y(x) \in [a, b]$. Además existen dos puntos fijos x_1, x_2:

$$x_1 = y(x_1), \qquad x_2 = y(x_2)$$

¿Y cuándo podemos asegurar que el punto fijo es único?. El Teorema del punto fijo nos da las condiciones suficientes para que esto ocurra:

Si existe $y'(x)$ en (a, b) y existe una constante k tal que $0 < k < 1$ con $|y'(x)| \le k \quad \forall x \in (a, b)$, entonces el punto fijo en $[a, b]$ es único.

y **continuando con el teorema 4.5**

- Demostración de la existencia:

  Si $y(a) = a$ o $y(b) = b$, entonces $y(x)$ tiene un punto fijo en uno de sus extremos. Si no es así, como $y(x) \in [a, b]$, se tiene $y(a) > a, y(b) < b$. Ahora construimos la función auxiliar $h(x) = y(x) - x$.

  Aplicamos el Teorema de Bolzano a $h(x)$, viendo que se cumplen las hipótesis:

  $h(x)$ es continua en $[a, b]$ al serlo $y(x)$

  $h(a) = y(a) - a > 0, \quad h(b) = y(b) - b < 0$

  Por tanto existe $z \in (a, b)$ tal que $h(z) = 0 \Leftrightarrow y(z) = z$

- Demostración de la unicidad:

  Supongamos que existen dos puntos fijos $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 \neq x_2$. Según el Teorema del valor medio:

  $\exists z \in [x_1, x_2] \;\mid\; y'(z) = \dfrac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}$; por tanto:

  $$|x_2 - x_1| = |y(x_2) - y(x_1)| = |y'(z)| \cdot |x_2 - x_1| \leq k|x_2 - x_1| < |x_2 - x_1|$$

  lo cual es una contradicción. Esta contradicción se debe a que hemos supuesto que $x_2 \neq x_1$, por tanto el punto fijo es único.

En la práctica, una vez que comprobamos la existencia y unicidad de la solución para la ecuación $x = y(x)$, construimos la sucesión:

$x_n = y(x_{n-1})$ para $n \geq 1$, tomando como punto inicial un valor $x_0 \in [a, b]$. Mediante este proceso iterativo, el punto x_n se obtiene a partir del anterior x_{n-1} (ver la gráfica 4.39).

Entonces, x_n converge hacia el único punto fijo $z \in [a, b]$; es decir $\lim_{n\to\infty} x_n = z$.

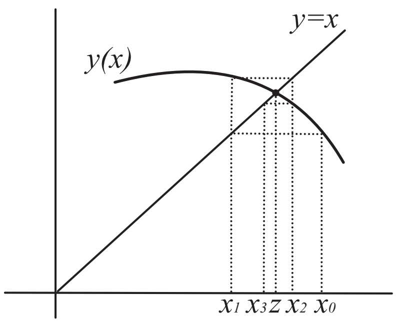


Figura 4.39: Proceso iterativo

Ejercicio 4.14 *Construir un algoritmo para aproximar el valor de $\sqrt{A}$, empleando la ecuación*

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right)$$

utilizar el Teorema del punto fijo para analizar la existencia y unicidad de la solución. Aplicar el procedimiento para aproximar $\sqrt{3.5}$.

4.11. Evaluación numérica de la derivada: acotación del error cometido

En el apartado 3.13.9.1, hablamos de tres expresiones con las que calcular de forma aproximada $y'(a)$:

- $y'(a) \approx \dfrac{y(a+h)-y(a)}{h}$ (Progresiva)
- $y'(a) \approx \dfrac{y(a-h)-y(a)}{h}$ (Regresiva)
- $y'(a) \approx \dfrac{y(a+h)-y(a-h)}{2h}$ (Central)

Pues bien, utilizando el Teorema de Taylor podemos acotar el error que cometemos al utilizar cada una de ellas. Veámoslo para la progresiva:

$$y'(a) \approx \frac{y(a+h)-y(a)}{h} \Leftrightarrow y(a+h) \approx y(a) + hy'(a)$$

así pues, se trata de la aproximación de Taylor para $n = 1$:

$$\exists z \in (a, a+h) \ \mid \ y(a+h) = y(a) + y'(a)\cdot h + \frac{1}{2}y''(z)\cdot h^2 \Leftrightarrow y'(a) = \frac{y(a+h)-y(a)}{h} + \frac{h}{2}y''(z)$$

luego

$$|\text{ERROR}| = \frac{|h|}{2}|y''(z)| \leq \frac{|h|}{2}k$$

donde k es una cota de $y''(x)$ en $[a, a+h]$.

Veamos un ejemplo. Calcular aproximadamente $y'(0.6)$ y acotar el error cometido, siendo $y(x) = \cos(x)$.

$$y'(0.6) \approx \frac{\cos(0+0.6)-\cos(0)}{0.6} = \frac{\cos(0.6)-1}{0.6}$$

$$|\text{ERROR}| = \left|\frac{h}{2}y''(z)\right| \leq \frac{h}{2} = \frac{0.6}{2} = 0.3$$

Ejercicio 4.15 *Acotar el error que se comete al utilizar las diferencias regresiva y central, empleando el Teorema de Taylor.*