Capítulo 4

Problemas del estudio local de una función

(En los problemas marcados con el icono es conveniente usar de un programa de ordenador para la representación gráfica de funciones, por ejemplo Winplot).

4.1. Funciones y derivadas

1. La figura adjunta representa una vasija a la que echamos agua a ritmo constante, de modo que en cada instante t el agua alcanza cierta altura $y(t)$. Calcular el dominio y el rango de $y(t)$. Estudiar las propiedades de $y'(t)$ y de $y''(t)$. Esbozar una posible gráfica de $y(t)$ e $y'(t)$.

2. Trazar la gráfica aproximada de una función $y(x)$ sabiendo que su derivada satisface las propiedades que aparecen en la siguente tabla:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\infty)$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

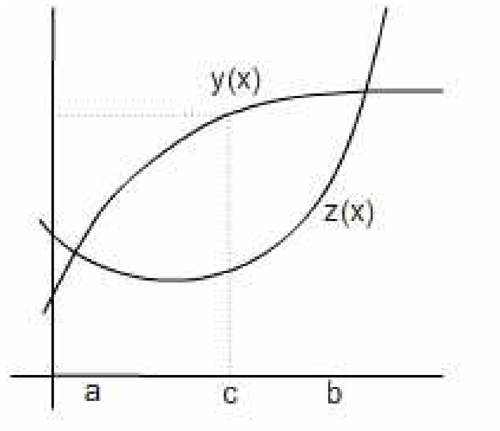
3. Dada la función $y(z) = (1000 - z)^2 + z^2$, se trata de:

   a) Encontrar los intervalos donde $y(z)$ es creciente o decreciente.

   b) Usar el apartado anterior para deducir si 1000^2 es mayor o menor que $998^2 + 2^2$.

c) Generalizar el resultado a la función $y(z) = (c - z)^n + z^n$, donde c es un número positivo cualquiera y n un entero positivo. Usar el resultado para deducir si 10000^{100} es mayor o menor que $9000^{100} + 1000^{100}$.

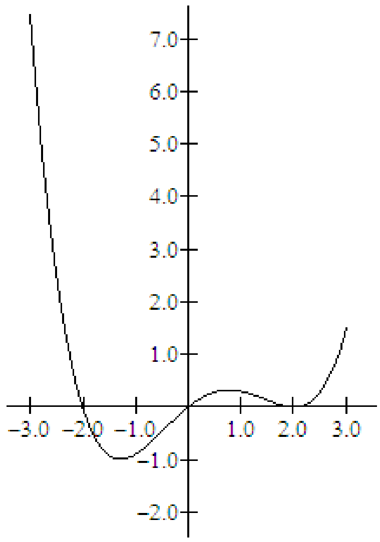
4. Sean $y(x)$, $z(x)$ funciones derivables cuyas gráficas se muestran en la figura. El punto c es el punto en el que la distancia entre $y(x)$ y $z(x)$ es máxima en el intervalo $[a, b]$. Demuestra que las rectas tangentes a ambas curvas por el punto c son paralelas.



5. Encontrar los intervalos donde las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes, y representarlas gráficamente.

a)	b)
$y(x) = \|x - 1\| + \|x + 2\|$	$y(x) = \|x - 1\| + \|x + 2\| + \|x\|$

6. La gráfica adjunta representa la derivada de la función $y(x)$. Se trata de:

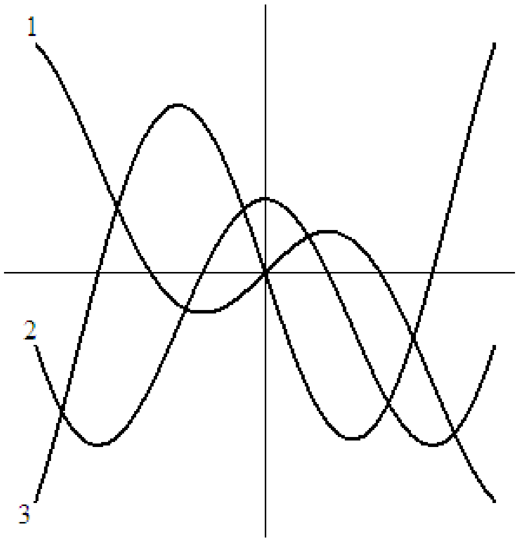


a) Encontrar dónde $y(x)$ es creciente/decreciente.

b) Encontrar los máximos y mínimos relativos de $y(x)$.

c) Si $y(-3) = -2$, representar gráficamente $y(x)$.

7. La figura adjunta muestra las gráficas de una función $y(x)$, su primera y segunda derivadas. ¿Sabes identificar qué gráfica corresponde a cada función?



8. Trazar la gráfica aproximada de una función continua $y(x)$ que satisface las siguientes condiciones:

a) $y'(x) < 0$ si $x \neq 4$

b) $y'(4)$ no existe

c) $y''(x) < 0$ si $x < 4$

d) $y''(x) > 0$ si $x > 4$

9. Una función $y(x)$ es continua en $[-3, 3]$ y su primera y segunda derivadas verifican las propiedades que aparecen en la siguiente tabla:

x	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$
$y''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$

a) ¿En qué puntos x la función $y(x)$ presenta un extremo local?

b) ¿En qué puntos x la función $y(x)$ presenta un punto de inflexión?

c) Dibujar una posible gráfica de $y(x)$.

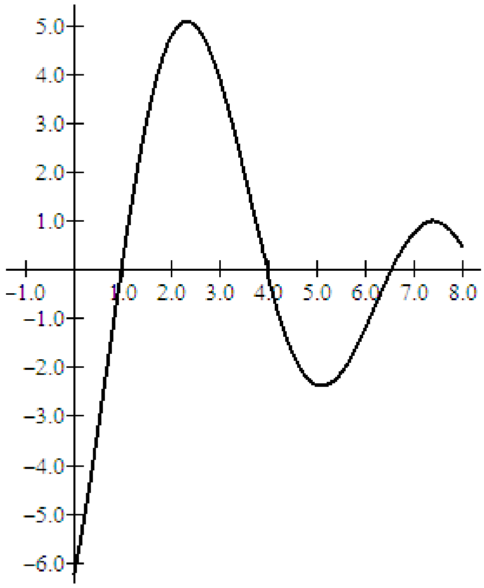
10. La gráfica adjunta muestra la derivada de cierta función $y(x)$. Emplear esta información para responder a las cuestiones que se plantean.

a) ¿En qué intervalos $y(x)$ es creciente/decreciente?

b) ¿En qué abscisas alcanza un extremo local?

c) ¿En qué subintervalos es cóncava/convexa?

d) ¿En qué abscisas alcanza un punto de inflexión?



11. Supongamos que $y(x)$ es una función dos veces derivable. Para cada uno de los siguientes apartados, justificar si es o no posible que $y(x)$ verifique las propiedades indicadas.

    a) $y'(x) > 0$, $y''(x) > 0$, $y(x) < 0$ para todo x.

    b) $y''(x) > 0$, $y'(x) < 0$ para todo x.

    c) $y''(x) > 0$, $y(x) < 0$ para todo x.

12. Estudiar la existencia de máximo y mínimo absolutos y de extremos locales para las siguientes funciones en los dominios indicados.

    a) $y(z) = A\,\text{sen}(k\pi z),\, z \in \mathbb{R}$

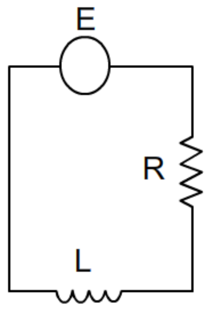
    b) $y(u) = \begin{cases} (u-1)^2 + 1 & 0 < u \leq 1 \\ u & 1 < u < 3 \end{cases}$

    c) $z(s) = \begin{cases} \mathrm{e}^s & s < 0 \\ \ln s & 0 < s \leq 5 \end{cases}$

13. Calcular el polinomio de McLaurin del mayor orden posible para la función $s(u)$. Acotar el error cometido al calcular aproximadamente $s(-0.2)$. Representar gráficamente $s(u)$ y el polinomio en un entorno del punto -0.2.

$$s(u) = \begin{cases} \mathrm{e}^u & u \leq 0 \\ u^3 + 0.5u^2 + u + 1 & u > 0 \end{cases}$$

14. En un circuito RL serie, la intensidad I que circula en cada instante viene dada por la siguiente ecuación:



$$L\frac{dI}{dt} + RI(t) = E(t)$$

donde R y L son los valores constantes de la resistencia y la inductancia respectivamente y $E(t)$ es la tensión aplicada al circuito, que puede depender de t. Se pide:

a) Describir un procedimiento para aproximar el valor de $I(t)$ mediante un polinomio de McLaurin.

b) Aplicar el procedimiento anterior para calcular el polinomio de McLaurin de grado 2 ($P_2(t)$), sabiendo que se aplica una tensión senoidal de 200 V y 50 Hz, $R = 150\ \Omega$, $L = 0.5\ H$.

c) Utilizar el polinomio anterior para evaluar de forma aproximada el valor de la intensidad al cabo de 0.6 segundos.

d) Representar gráficamente $P_2(t)$ en un entorno de punto t=0.6.

15. Elaborar un programa WINPLOT para, dada una función y(x), calcular de forma aproximada el punto z al que se refiere el teorema de Lagrange.

16. Elaborar un programa WINPLOT para, dada una cierta función y(x), calcular el punto z al que se refiere el teorema de Rolle.

17. La altura, en metros, de una bola lanzada al cabo de t segundos viene dada por la función
$y(t) = -16t^2 + 48t + 32$. Se pide:

a) Calcular la altura desde la que se lanza la bola.

b) Calcular la velocidad a la que se lanza la bola.

c) Demostrar que en un instante comprendido entre $t = 1$ y $t = 2$ segundos, la bola se detiene. ¿A qué altura ocurre?

18. Supongamos que $h(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), tal que $h(a) = h(b)$. Según el teorema de Rolle, existe un punto c en (a, b) tal que $h'(c) = 0$. A partir de $h(x)$, construimos las siguientes funciones:

    a) $g(x) = h(x) + k$ *b*) $g(x) = h(kx)$ *c*) $g(x) = h(x - k)$

    Se trata de:

    a) Representar gráficamente cada una de ellas.

    b) Hallar un intervalo en el que sea aplicable el teorema de Rolle a $g(x)$. Calcular un punto de dicho intervalo en el que $g'(x)$ se anula.

19. Un avión despega a las 13 h y realiza un vuelo de 2500 Km, llegando a su destino a las 18 : 30 h. Explicar por qué hay al menos dos instantes durante el vuelo en los que el avión viaja a 400 Km/h.

20. Una pieza de cerámica se encuentra a 750°C, cociéndose en el interior de un horno. Apagamos el horno y veinte horas después, la temperatura de la pieza es de 110°C. Se pide:

    a) Representar una posible gráfica de la temperatura de la pieza.

    b) Explicar por qué en algún momento de ese intervalo de tiempo, la temperatura de la pieza descendía a razón de 32°C por hora. Según la gráfica trazada en el apartado 1), calcular aproximadamente en instante en el que ocurre.

21. Demostrar que si $y(x)$ es una función polinómica de grado 2 definida en $[a, b]$, entonces el punto z al que se refiere el teorema del valor medio, siempre es el punto intermedio del intervalo.

22. En medicina, la reacción $R(x)$ del cuerpo de un paciente a una dosis x de cierto fármaco, viene expresada mediante el modelo $R(x) = Ax^2(B - x)$, donde A y B son constantes positivas que son diferentes para cada paciente. La sensibilidad $S(x)$ de un paciente es la velocidad de la reacción respecto a la dosis que se le administre. Supongamos que una reacción negativa es algo desfavorable.

    a) ¿Cuál es el dominio de R? ¿Cuál puede ser el significado físico de A y B?

    b) ¿Qué dosis debe administrarse para que la reacción sea máxima? ¿Cuánto vale ese valor máximo?

    c) ¿ Qué dosis debe administrarse para que la sensibilidad sea máxima?

4.2. Optimización

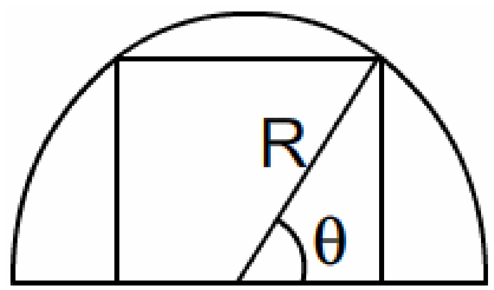
23. Una ventana está formada por un semicírculo unido a una ventana rectangular ordinaria. Supongamos que el perímetro es un valor prefijado. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones de modo que su luz sea máxima?

24. Debemos construir un depósito cilíndrico sin tapa, con una capacidad de 5000 m^3. Se trata de calcular sus dimensiones de modo que el coste sea lo menor posible, sabiendo que la chapa con la que se fabrica el fondo cuesta 500 euros/m^2, mientras que la utilizada para la pared lateral cuesta 800 euros/m^2.

25. Dos postes, de 12 y 28 metros de altura, distan 30 metros. Hay que conectar sus extremos superiores mediante un cable sujeto en algún punto del suelo, entre ellos. Se trata de encontrar ese punto, de modo que empleemos la menor la cantidad posible de cable.

26. Un pozo de petróleo se encuentra en el mar, a 2 Km de la costa. La refinería de petróleo está en la costa, a 4 Km siguiendo la línea costera (ver figura). Se planea construir un oleoducto desde el pozo hasta la refinería. Hay que decidir el trazado, de modo que sea lo más económico posible. Hay que tener en cuenta que el precio de un tramo bajo el mar es el doble que en tierra.

27. Considerar los rectángulos inscritos en un semicírculo de radio R, como muestra la figura. Calcular el rectángulo que tenga área máxima. INDICACIÓN: Expresar el área en función del ángulo θ.



28. Se va a construir un edificio de cierto número de plantas. El coste total del edificio se calcula sumando un coste inicial al coste de cada una de las plantas. El coste inicial es igual a 450 veces el coste de la primera planta. El coste de la segunda planta es el doble que el de la primera; el de la tercera planta es el triple que el de la primera, etc.

La pregunta es: ¿cuántas plantas tendrá el edificio de modo que el coste medio por planta sea mínimo? ¿Cuánto costará el edificio?

29. Un almacén de electrónica compra un total de 2400 reproductores de CD por año. A lo largo del año realiza varios pedidos que contienen el mismo número de aparatos. El transportista cobra por cada pedido una cantidad fija de 50 euros más 2 euros por cada aparato. ¿Cuántos aparatos deberán pedirse en cada envío para que el gasto sea mínimo?