Capítulo 3

Problemas de funciones reales de variable real

(En los problemas marcados con el icono es conveniente usar de un programa de ordenador para la representación gráfica de funciones, por ejemplo Winplot).

3.1. Concepto de función

1. En las siguientes situaciones se define una variable independiente (VI) y una variable dependiente (VD) que depende de la primera. Para cada una de ellas, se trata de:

    - Elegir una notación apropiada para ambas variables.
    - Encontrar el dominio de la VI y el rango de la VD.
    - Representar en sus diversas formas la dependencia entre ambas variables: analítica, gráfica, tabular y como conjunto de $\mathbb{R}^2$.

    a) VI: ángulo agudo de un triángulo rectángulo de hipotenusa constante. VD: área del triángulo.

    b) VI: lado de un triángulo rectángulo (el otro lado vale 2). VD: hipotenusa.

    c) VI: hipotenusa de un triángulo rectángulo. VD: valor de un lado (el otro lado vale 5).

    d) VI: temperatura en grados centígrados. VD: temperatura en grados Fahrenheit. INDICACIÓN: Utilizar os siguientes datos: la relación entra ambas variables es lineal; la temperatura de congelación del agua (0°C) corresponde a 32°F; la temperatura de ebullición del agua (100°C) corresponde a 210°F.

    e) VI: un número real cualquiera x. VD: el máximo entre x y $1 - x$.

f) VI: ángulo en un sector circular de radio constante. VD1: área del sector. VD2: longitud del arco del sector.

2. Supongamos que $f(x)$ es una función periódica de periodo 3, $f(-2) = 0, f(-1.5) = 1$, continua, lineal entre -2 y -1.5, lineal entre -1.5 y 1.

   a) Representar en sus diversas formas $f(x)$.

   b) ¿Para qué valores de x se tiene $f(x) = 1$?

   c) ¿Para qué valores de x se tiene $f(x) = 0.5$?

3. Supongamos que R es una variable que depende del tiempo t. Piensa en las siguientes situaciones:

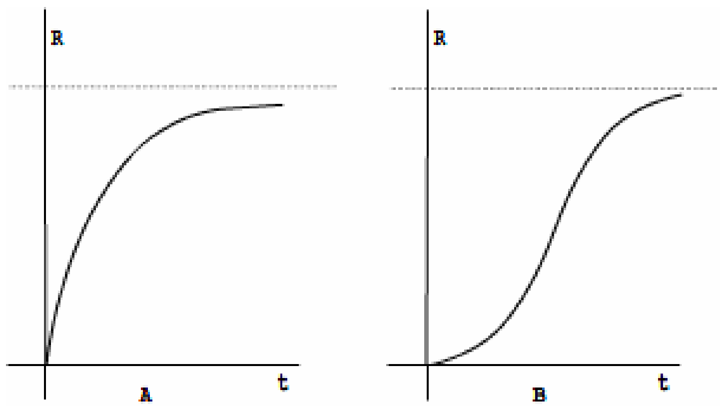
   a) $R(t)$ es una curva de aprendizaje de una tarea. Es decir, en cada momento t, $R(t)$ indica la destreza que se ha adquirido en realizar la tarea hasta ese momento. Supongamos que la tarea es muy mecánica, como preparar hamburguesas en un establecimiento de comida rápida, montar pinzas para la ropa o repartir el correo.

   b) También $R(t)$ es una curva de aprendizaje, pero ahora la tarea requiere mayores habilidades, por ejemplo, se trata de aprender a manejar un procesador de texto o a conducir un vehículo.

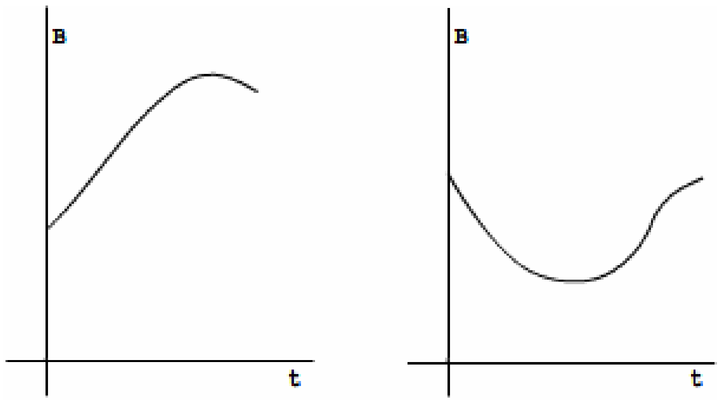
   c) $R(t)$ es la fracción de la población que se ha enterado de cierta noticia que está siendo difundida por los grandes medios de comunicación (prensa, TV, radio, Internet).

   d) $R(t)$ también es la fracción de población que se ha enterado de cierta noticia, pero ahora se trata de un rumor que se extiende de forma hablada, nunca ha salido en los medios de comunicación.

   La figura adjunta muestra las gráficas A y B de dos funciones. ¿Cuál de ellas crees que puede corresponder a cada una de las cuatro situaciones anteriores?



4. Las siguientes gráficas muestran el beneficio B que han tenido dos empresas a lo largo de un período de tiempo. Inventa una posible historia que explique el comportamiento de cada la función beneficio para un hipotético producto fabricado por la empresa.



5. Usar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ para esbozar la gráfica de:

   a) $y = \sqrt{x} + 2$ *b*) $y = -\sqrt{x}$ *c*) $y = \sqrt{x - 2}$

6. Sea $f(x)$ una función arbitraria. Las siguientes, son funciones definidas a partir de $f(x)$. Para cada una de ellas, se trata de:

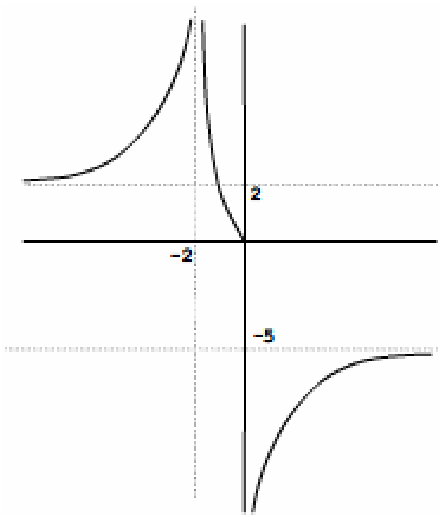
   a) Escribirla mediante composición de funciones.

   b) Representarla gráficamente, a partir de la gráfica de $f(x)$.

a) $f(-x)$	c) $f(x-k)$	e) $f(ax+b)$	g) $f(x)+k$	i) $f(\|x\|)$	k) $e^{f(x)}$
b) $-f(-x)$	d) $f(k-x)$	f) $f(kx)$	h) $\|f(x)\|$	j) $f^2(x), f^3(x)$	l) $\ln(f(x)), \ln(\ln(f(x)))$

7. Elegir alguna función $f(x)$ y representar gráficamente las funciones definidas en el problema anterior, estudiando cómo varía dicha representación en función de los parámetros que aparezcan. INDICACIÓN: Por ejemplo, si tomamos $f(x) = x^2$, podemos representar gráficamente $g(x) = f(x) + k$, y estudiar cómo cambia la gráfica de $g(x)$ según el valor de k.

8. La imagen adjunta muestra la gráfica de $y(x)$. Responder a las siguientes cuestiones:



a) ¿Cuál es el dominio de $y(x)$?

b) ¿Cuál es el rango de $y(x)$?

c) ¿Tiene $y(x)$ inversa en x / x<-2? Si es así, ¿cuál es el dominio y el rango de la inversa?

d) ¿Tiene $y(x)$ inversa en x / x<0? Si es así, ¿cuál es el dominio y el rango de la inversa?

e) ¿Tiene $y(x)$ inversa en x / x>-2? Si es así, ¿cuál es el dominio y el rango de la inversa?

f) ¿Tiene $y(x)$ inversa en x / x>0? Si es así, ¿cuál es el dominio y el rango de la inversa?

9. Para cada una de las siguientes funciones, se trata de:

a) Representarla gráficamente.

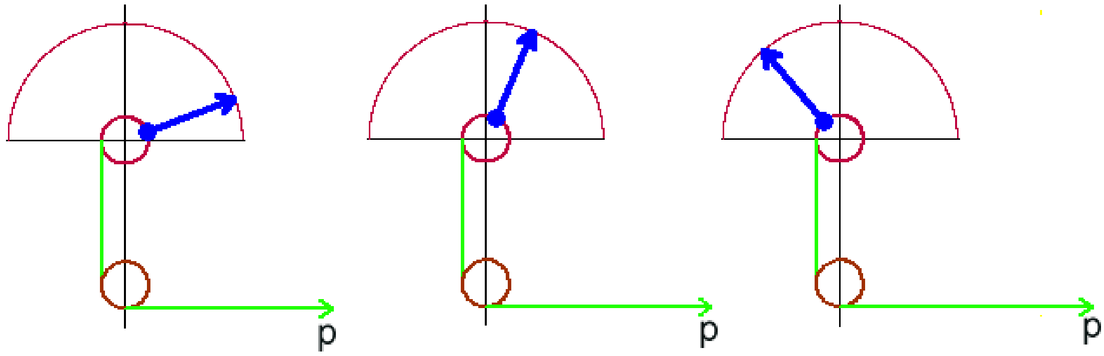
b) Elegir un dominio para el cual exista función inversa.

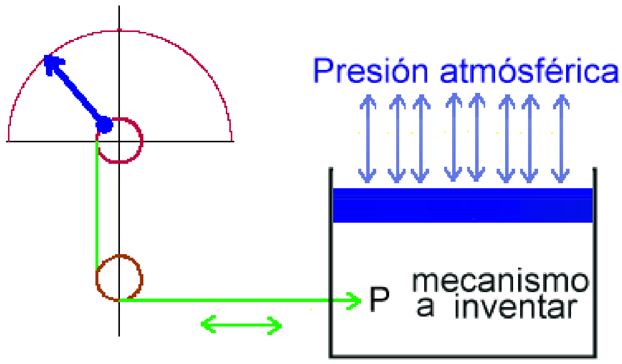
c) Obtener y representar gráficamente la función inversa.

d) Comprobar que, si se representan sobre los mismos ejes, las gráficas de una función y de su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$.

a) $y = \mathrm{e}^x$	c) $y = \mathrm{tg}(x)$	e) $y = \cos(x)$
b) $y = \mathrm{sen}(x)$	d) $y = \mathrm{senh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$	f) $y = \cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

10. Construir un modelo del mecanismo de un barómetro (ver figuras). Tirando del hilo en P, la aguja cambia de posición sobre la escala. El recorrido horizontal de P debe provocar el recorrido de media circunferencia sobre la escala. Representar gráficamente la función.





Luego, inventar un mecanismo para convertir el desplazamiento vertical provocado por la presión atmosférica en el movimiento horizontal de P. Encontrar la función que nos da la posición sobre la escala a partir del desplazamiento vertical. Tened en cuenta que los desplazamientos horizontal y vertical serán realmente pequeños.

3.2. Límites

11. Demostrar la siguiente afirmación: “Si el límite L de $y(x)$ en el punto $x = a$ es distinto de 0, entonces existe un entorno de a en el que $f(x)$ tiene el mismo signo que L”. ¿Qué ocurre si el límite es 0? Interpretar gráficamente estos resultados.

12. Supongamos que $\{a_n\}$ converge hacia a. Discutir la convergencia de la sucesión $\{y(a_n)\}$ para las siguientes funciones $y(x)$:

a)	b)	c)
$a = \pi/2$	$a = 3$	$a = 0$
$y = x^3 e^x \operatorname{sen}(x)$	$y = \begin{cases} 1 & x < 3 \\ 2 & x > 3 \end{cases}$	$y = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

13. Para cada una de las siguientes funciones, se trata de estudiar la condición $\varepsilon - \delta$ del siguiente modo:

    a) Elegir un punto x=a.

    b) Estudiar de forma experimental la condición $\varepsilon - \delta$. En caso de que no se verifique esta condición, encontrar un valor de para el cual no exista δ.

    c) Encontrar el valor de δ (si existe) para cada algunos valores de ϵ. Hacer una tabla con dos columnas δ/ϵ.

    d) Elegir otro punto $x = b$. Fijándonos en la tabla anterior, para en mismo valor de ϵ, ¿nos vale el mismo valor de δ? ¿Qué conclusión obtenemos?

    a)
    $$y = \operatorname{sen}(x)$$
    b)
    $$y = \begin{cases} x^3 - 5 & x < 3 \\ x^2 + 13 & x > 3 \end{cases}$$
    c)
    $$y = \begin{cases} x^3 - 5 & x < 3 \\ x^2 + 12.5 & x > 3 \end{cases}$$

3.3. Continuidad

14. Representar gráficamente las siguientes funciones y discutir su continuidad en función de los parámetros a y b.

    a)
    $$z(y) = \begin{cases} y^3 & y \leq 2 \\ ay^2 & y > 2 \end{cases}$$
    b)
    $$u(r) = \begin{cases} 2 & r \leq 1 \\ ar + b & r > 1 \end{cases}$$
    c)
    $$v(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} & x \neq a \\ \\ 8 & x = a \end{cases}$$

15. Supongamos que el porcentaje p de droga ilegal incautada anualmente por el Departamento de Interior y el coste C en millones de euros que supone, están relacionados mediante el siguiente modelo:
    $$p = \frac{100C}{C + 500}$$
    Se pide:

    a) Representar gráficamente $p(C)$ y $C(p)$.

    b) Estudiar el comportamiento de C a medida que p se acerca a 100.

    c) ¿Es posible incautar cualquier porcentaje p de droga ?

    d) Supongamos que el Departamento se propone incautar en un año entre el 60 y el 65 % de la droga. Demostrar formalmente que, de acuerdo al modelo, este objetivo puede cumplirse.

16. Demostrar que de entre todas las esferas cuyo radio está comprendido entre 1 y 5 cm, existe una cuyo volumen es igual a 275 cm^3.

17. Demostrar que la función $y(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$ se anula en un punto z del intervalo $[0, 1]$. Encontrar de forma aproximada el valor de z.

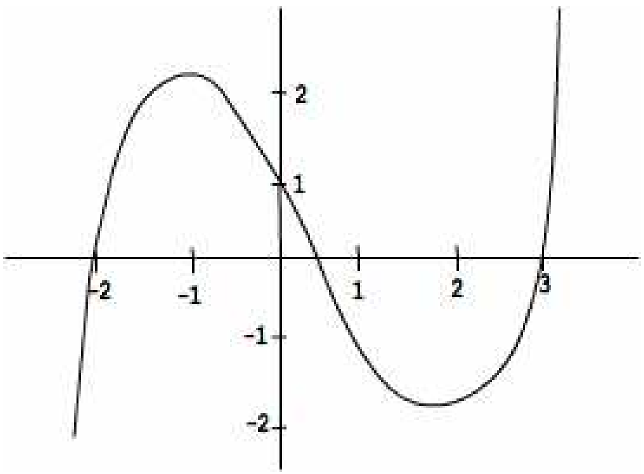
18. Tenemos un plato en el frigorífico y otro en el horno. Después de un rato, intercambiamos la posición de los platos. ¿En algún momento ambos platos tendrán la misma temperatura?

19. Considerar la función $p(r) = r^5 - 4r^2 + 1$. Trazamos una recta horizontal a una altura R, siendo R un número cualquiera comprendido entre -1.5 y 16. Demostrar que dicha recta corta a la gráfica de $p(r)$.

20. Supongamos que tenemos un depósito de agua y que lo estamos vaciando por un grifo abierto. ¿Llegará un momento en el que tendremos en el depósito la mitad de agua que al principio? Supongamos ahora que el agua se ha congelado en el depósito y que lo estamos vaciando cortando y sacando el hielo a trozos. Responder a la misma pregunta. Construir un modelo gráfico de ambas situaciones.

3.4. Derivabilidad

21. Estimar los valores de $y'(x)$ en los puntos indicados, a partir de la gráfica de $y(x)$.



a) $x = -2$

b) $x = -1$

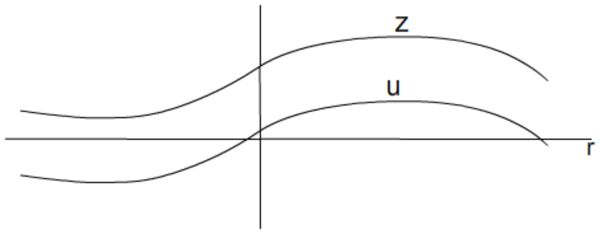
c) $x = 0$

d) $x = 1{,}5$

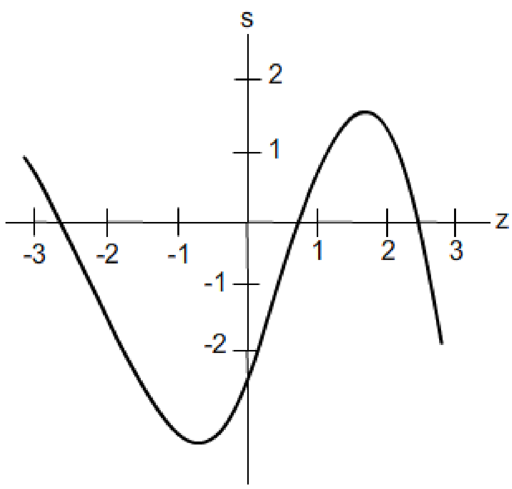
e) $x = 2$

f) $x = 3$

22. La figura muestra las gráficas de dos funciones $z(r)$ y $u(r)$. Representa gráficamente la función $v(r) = z(r) - u(r)$. ¿Cuál es el ritmo de cambio de $v(r)$?



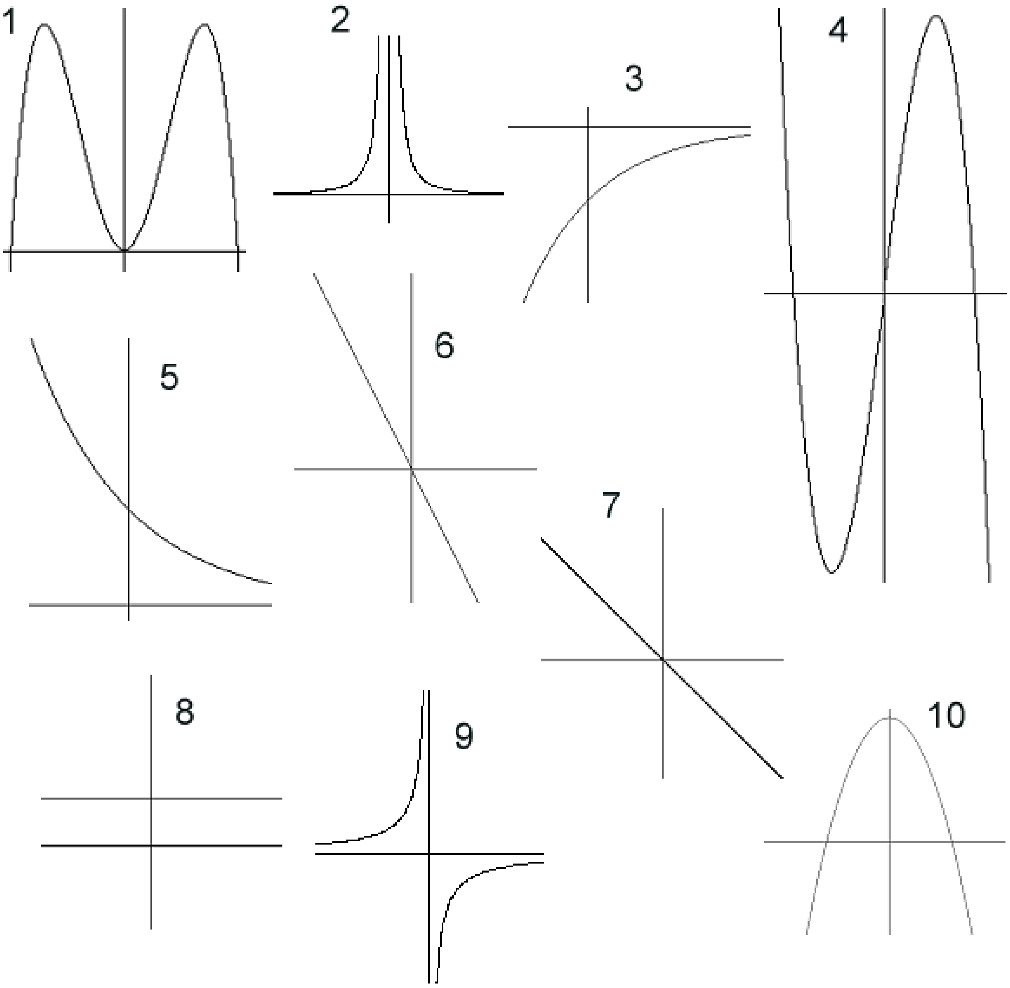
23. Dada la gráfica de la función $s(z)$, dibujar la gráfica de una función $u(z)$ que cumpla las siguientes condiciones:



1) $s'(z) = u'(z)$ para todo z
2) $u(-1) = 0$

¿Es única esta función $u(z)$?

24. Seguidamente se muestran desordenadas diez gráficas que corresponden a cinco funciones y sus derivadas. ¿Eres capaz de descubrir cuál es la función y cuál la derivada? ¿Puedes encontrar una expresión analítica aproximada para cada función?



25. En cada una de las siguientes descripciones, se trata de: (1) indicar el significado de las variables que intervienen; (2) dibujar una gráfica de la función que satisface la descripción; (3) explicar lo que la descripción dice acerca de la derivada.

    a) El precio de un producto disminuye cuanto más producto es fabricado.

    b) La temperatura de un enfermo ha estado aumentando las últimas tres horas, pero en la última hora menos rápidamente porque se le administró un antibiótico.

    c) El costo del seguro médico aumenta a ritmo constante.

    d) El coche ha ido frenando, hasta que se ha detenido.

26. Estamos llenando de agua un tanque esférico, a ritmo constante. En cada instante t, sea $V(t)$ el volumen de agua en el depósito y $H(t)$ la altura que alcanza.

    a) Interpretar dV/dt y dH/dt.

b) El valor de dH/dt, ¿aumenta o disminuye?

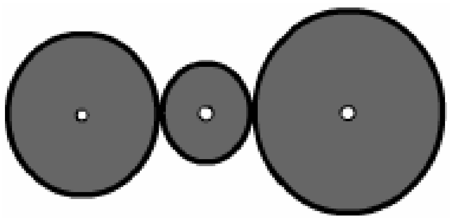
27. Demostrar que una función derivable en un punto $x = a$ es continua en dicho punto, pero que el recíproco no es cierto en general. INDICACIÓN: Si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

entonces el numerador DEBE tender hacia 0.

28. La Ley de Boyle establece que si la temperatura de un gas se mantiene constante, su presión es inversamente proporcional a su volumen. Demostrar que la velocidad de cambio de la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen.

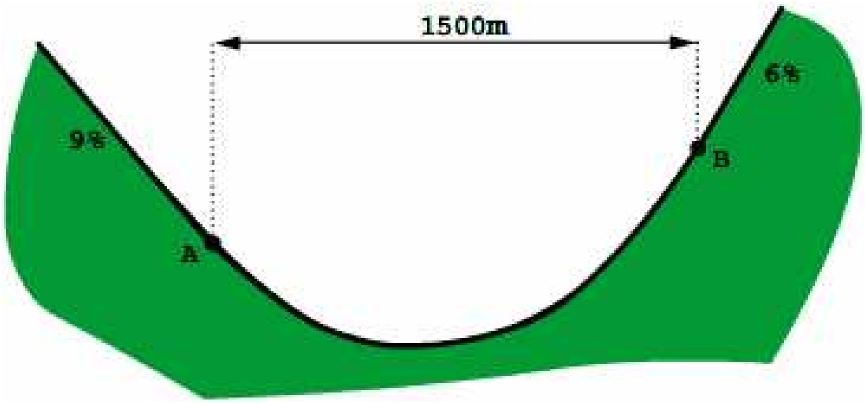
29. Un tren de poleas está construido como muestra la figura. Cuando gira cualquiera de ellas, transmite el giro a las otras dos. Calcular la velocidad de giro de cada una de las ruedas respecto a cada una de las otras. Supongamos que la rueda central gira a razón de 12 revoluciones por segundo. Calcular la velocidad de giro respecto al tiempo de las otras dos ruedas.



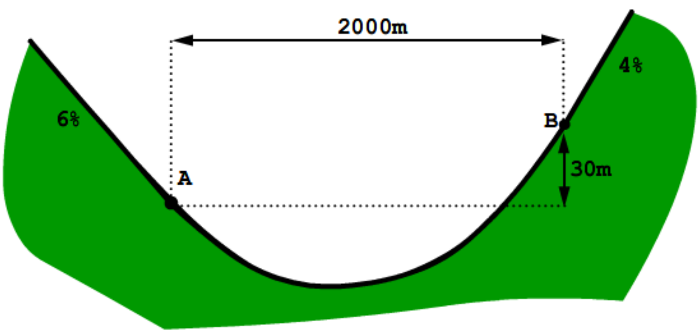
30. La velocidad S de la sangre a una distancia r del centro de la arteria, medida en cm/s, puede modelizarse mediante la función $S(r) = C(R^2 - r^2)$ donde C es una constante y R es el radio de la arteria. Se suministra un fármaco y R se dilata a ritmo constante respecto al tiempo. Calcular el ritmo de cambio de S respecto al tiempo. Aplicarlo con los siguientes datos: $C = 1.76 \cdot 10^{-5}$, $R = 1.2 \cdot 10^{-2}$, ritmo de dilatación de $R = 10^{-5}$.

31. Se bombea aire en el interior de un globo a razón de 4.5 litros por minuto. ¿A qué velocidad cambia el radio del globo en el instante en que el radio mide 20 cm?

32. Se van a construir tres tramos de autopista, dos de ellos rectos, con pendientes de 9 % y 6 % respectivamente, y un tramo central parabólico (ver figura). Calcular las ecuaciones de los tres tramos.



33. Para construir una autopista hay que salvar un valle cuyas laderas son tramos rectos que tienen pendientes del 6 % y del 4 % (ver figura). En un principio se pensó en construir el tramo que une los puntos fijos A y B mediante una trayectoria parabólica, como en el problema anterior, pero se descartó la idea. Explica por qué. Así pues, ¿en qué se diferencia este problema del anterior? Finalmente se optó por una trayectoria cúbica. Calcula su ecuación.



34. Vamos a estudiar dos modelos diferentes para calcular en cada instante t la velocidad $v(t)$ de un objeto en caída libre. Son los siguientes:

   a) $v(t) = gt$

   b) $v(t) = \frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)$ donde $k > 0$ es una constante que depende de la densidad del medio físico en el que el objeto cae.

      1) Representar gráficamente $v(t)$ según ambos modelos (representar el modelo (b) para varios valores de k).
      2) Estudiar el significado del parámetro k en el modelo (b). ¿Cuándo ambos modelos pueden considerarse similares? ¿Cuándo crees que se podrá utilizar el modelo (a)? ¿Cual es la predicción del modelo (b) para k muy grande? ¿Es lógico este resultado?
      3) El modelo (b) no está definido si $k = 0$, pero sí es posible averiguar hacia dónde converge este modelo si k se aproxima a 0. Realizar este cálculo y analizar el resultado.

4) En el apartado anterior has encontrado la relación que hay entre los modelos (a) y (b) en términos de convergencia de (b) hacia (a). Ahora vamos a obtener qué diferencia hay entre ambos. Pare ello, utilizar el desarrollo en serie de la función e^x:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad -\infty < x < +\infty \qquad \text{(Sustituir } x \text{ por } -kt \text{ para obtener } \mathrm{e}^{-kt}\text{)}$$

¿Qué diferencia hay entre la predicción de uno y otro modelo? ¿Cómo interpretas esa diferencia? Observa cómo se construyen modelos cada vez más precisos a medida que se toman más sumandos en la serie.

5) ¿Cuál de los dos modelos te parece más completo? ¿Crees que alguno de los dos modelos representa de modo exacto el fenómeno real de caída del objeto? ¿Por qué? En general, dado un fenómeno físico cualquiera con objetos en movimiento, fuerzas, gases, líquidos, etc. ¿Crees posible construir un modelo matemático capaz de predecir de modo exacto cómo evoluciona el fenómeno?

6) Averiguar qué valores de k corresponden a diversos medios físicos como agua, aire o diferentes gases. Comparar las velocidades que predicen ambos modelos.

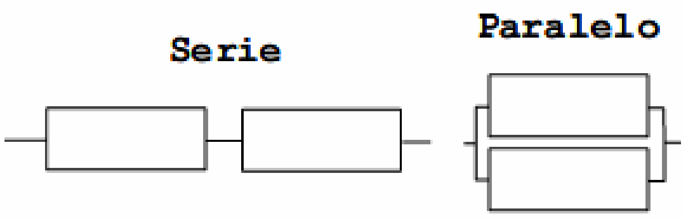
7) Supongamos que el objeto en su caída pasa de un medio a otro más denso. Por ejemplo, dejamos caer una piedra en el agua. ¿Crees que la función velocidad resultante será continua? ¿Y derivable? Escribe tus intuiciones al respecto y después haz el análisis y la representación gráfica.

35. Si dos resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo, el valor R de la resistencia resultante se puede modelizar mediante la siguiente relación:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

mientras que si están conectadas en serie, el modelo es:

$$R = R_1 + R_2$$



Para ambos tipos de conexión, realizar el siguiente análisis. Supongamos que R_1 y R_2 varían respectivamente a 50 y 75 Ω/s: ¿cuál es el ritmo de cambio de R? Supongamos que R_1 y R_2 varían a la misma velocidad: estudiar el ritmo de cambio de R. Todavía bajo ésta última hipótesis, supongamos que se aplica un tensión senoidal V de 220 V y 50 Hz (es decir, $V(t) = 220\ \mathrm{sen}(100t)$). Calcular el ritmo de variación de la intensidad I (recordar que $V = IR$).

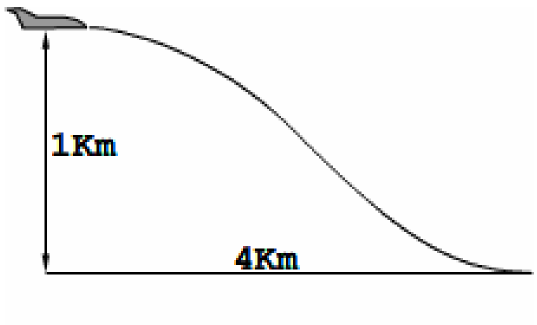
36. Dada la función $y = \begin{cases} \ln(x) & 0 < x \leq 1 \\ ax^2 + bx - a - b & x > 1 \end{cases}$ se pide:

   a) Comprobar que y es continua en $x = 1$, independientemente del valor de a y b.

   b) Determinar experimentalmente varios valores de a y b de modo que y sea derivable en $x = 1$.

   c) Determinar analíticamente la condición que deben cumplir a y b para que sea derivable en $x = 1$.

37. Un avión inicia el descenso para tomar tierra desde 1 Km de altitud a 4 Km al oeste de la pista de aterrizaje. Se ha pensado diseñar una trayectoria cúbica $y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ o bien parabólica $y(x) = ax^2 + bx + c$ para el avión, desde su posición actual y hasta tocar tierra.



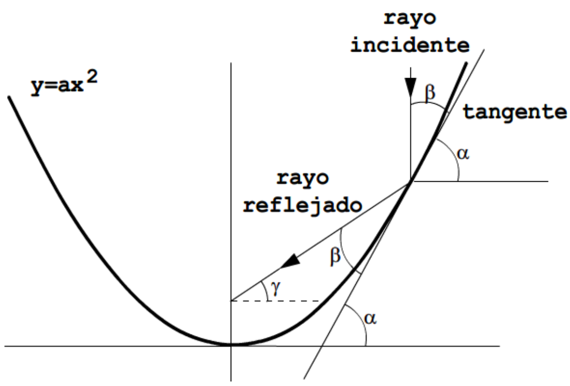
   a) Elige el tipo de curva que te parezca más adecuado y calcula sus coeficientes.

   b) Explica los significados de dy/dx, dy/dt, dx/dt.

   c) Representa gráficamente en los mismos ejes las funciones $y(x)$, dy/dx. Explica cómo evoluciona $y(x)$ según la información que te proporciona dy/dx.

   d) ¿En qué punto desciende más rápidamente y respecto a x? Supongamos que en este punto la velocidad horizontal del avión es de 650 Km/h: calcula en este mismo punto la velocidad vertical de descenso en relación al tiempo.

38. ¿Te has preguntado alguna vez por qué las antenas de recepción de satélite se llaman “parabólicas”? Resulta que un rayo paralelo al eje que incida en un punto de la parábola, forma con la recta tangente el mismo ángulo β que el rayo reflejado. Vamos a calcular en qué punto del eje interseca este rayo reflejado (ver figura).



a) La parábola tiene como ecuación $y = ax^2$. Calcula la pendiente de la recta tangente por el punto (p, ap^2). Esa pendiente es $m = \text{tg}(\alpha)$.

b) Sabiendo que $\alpha + \beta = \pi/2$, ya tenemos β.

c) Con α y β calculamos γ. Demuestra que $\gamma = 2\alpha - \pi/2$.

d) Así pues, la pendiente del rayo reflejado es $\text{tg}(\gamma) = \text{tg}(2\alpha - \pi/2)$.

e) Demuestra que $\text{tg}(\gamma) = -\text{ctg}(2\alpha) = 0.5(m - 1/m)$.

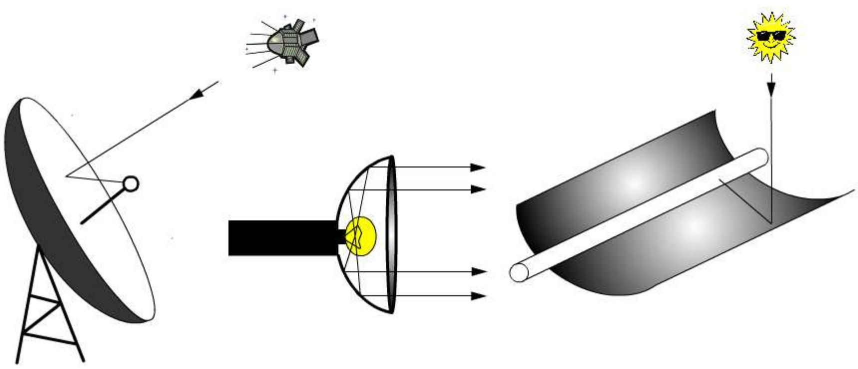
f) Calcula la ecuación del rayo reflejado.

g) Demuestra que la intersección de este rayo con el eje OY es $y = 0.25/a$. Así pues, la posición de este punto intersección siempre es el mismo, sólo depende del parámetro a de la parábola. Este punto se llama FOCO de la parábola.

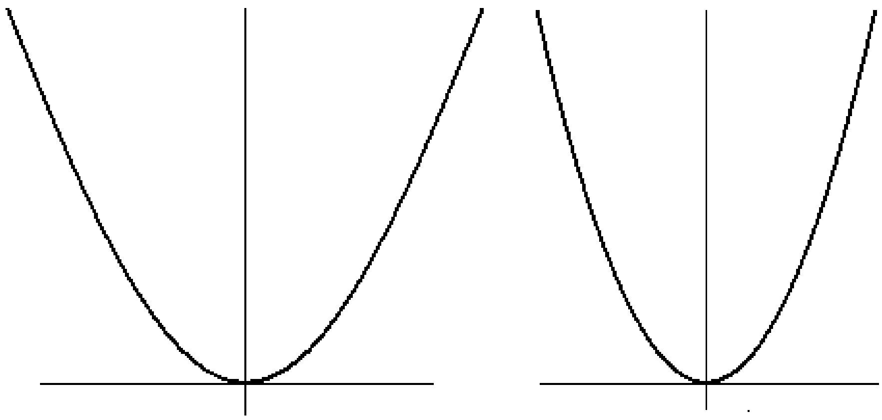
h) Ahora supón que el rayo incidente es una señal del satélite que llega a nuestra antena de sección parabólica. La antena se ha orientado de modo que el rayo venga paralelo al eje. ¿Dónde colocarías, en la antena, el receptor?

i) Si la parábola mide 60 cm de diámetro y 12 de profundidad, calcula el lugar donde debe colocarse el receptor.

j) Observa que el mismo principio puede usarse para construir una linterna, y también un sistema para calentar agua, con una chapa de sección parabólica que refleja los rayos de sol hacia una tubería metálica por la que circula el agua a calentar.



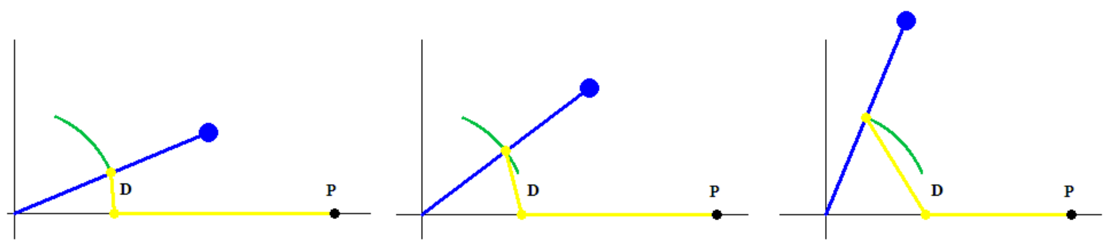
k) Por último, la misma propiedad nos sirve para distinguir lo que es una parábola y lo que no. Una de las dos siguientes curvas no es una parábola. Escuadra, cartabón y transportador en mano, ¿eres capaz de distinguir cual?



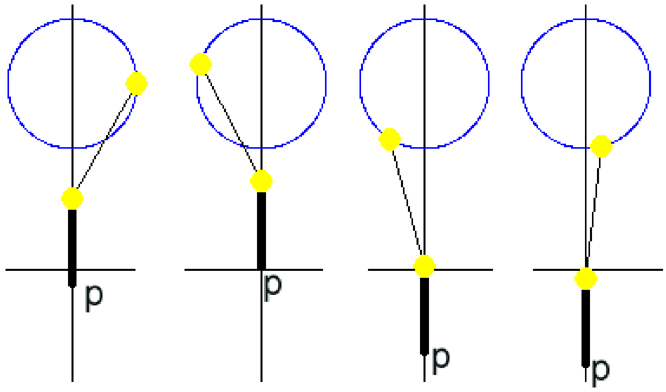
39. Construir un modelo de freno de mano. Un cable de acero unido a la palanca, llega hasta el punto P a través del pasador D (ver figura). Cuando se tira de la palanca, el cable se tensa y el punto P se aproxima, y se supone que acciona el mecanismo de freno.

    a) Calcular y representar la posición de P respecto a la posición θ de la palanca.

    b) Calcular y representar la velocidad de P respecto a θ.



40. Construir un modelo de máquina de coser. Encontrar la trayectoria y del extremo P de la aguja, conectada mediante una biela a un volante giratorio (ver figura). Hay que dar valores a los diferentes parámetros del mecanismo (radio del volante, longitud de la biela y de la aguja, en cm) y encontrar $y(\theta)$, siendo θ el ángulo de giro de la circunferencia.



a) Representar gráficamente $y(\theta)$ y $dy(\theta)/d\theta$. Explica cómo evoluciona $y(\theta)$ según la información que te proporciona $dy(\theta)/d\theta$.

b) Representar gráficamente la aceleración $d^2y(\theta)/d\theta^2$. El valor de la aceleración en cada θ es importante porque está relacionada con la tensión que sufre el hilo de costura. Viendo la gráfica, ¿cuál es el valor máximo de la aceleración? ¿En qué punto θ se alcanza? Diseñar la máquina de modo que la aceleración máxima no supere el valor $1.46\ cm/rad^2$.

c) Supongamos que el volante gira a 150 r.p.s. (es decir, $\theta(t) = 300\ Rt$). ¿Cuál es la aceleración de y respecto al tiempo?

d) Supongamos que el volante gira a 150 r.p.s. Representar gráficamente $x(t)$ y calcular la velocidad de x respecto a t. Generalizar el resultado, tomando una función cualquiera $\theta(t)$. Tomar diversas funciones $\theta(t)$ (p. ej. $\theta(t) = 2\pi RKt$, $\theta(t) = t^3$, $\theta(t) = \mathrm{e}^{-t}$, etc). Estudia cómo resulta afectada la velocidad dx/dt según la función $\theta(t)$ que tomes.