Capítulo 2

Sucesiones

2.1. Planteamiento del problema

Supongamos que nos interesa estudiar determinado fenómeno físico: máquina eléctrica, campo magnético, reacciones químicas que tienen lugar en un matraz, interior de una caldera, superficie de un líquido, etc. Con el instrumental apropiado medimos la magnitud física que nos interesa (ver la figura 2.1), por ejemplo:

- Voltaje
- Intensidad de corriente
- Intensidad de un campo
- Temperatura
- Presión
- Altura del nivel de un líquido

  ⋮

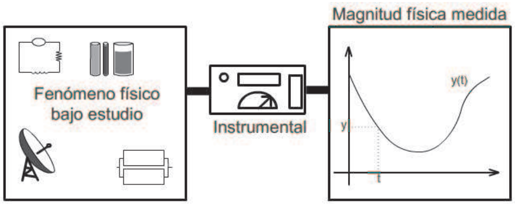

Figura 2.1: Modelización

Muchas veces es necesario *discretizar* la magnitud física bajo estudio, tomando una muestra de sus valores, para, por ejemplo, ser almacenados/tratados en ordenador. (Ver la figura 2.2)

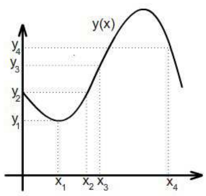

Figura 2.2: Discretización

$y = f(x) \Rightarrow y_1, y_2, y_3, \ldots$ siendo $y_i = f(x_i)$

El ordenador tiene memoria finita, no puede almacenar todos los valores $f(x)$ para cada $x \in [a,b]$ pues pueden ser infinitos, pero sí podemos tomar una muestra $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \cdots, y_n = f(x_n)$

Veamos unos ejemplos:

1. Calentamos una barra metálica, y queremos estudiar en cada instante t, la distribución de temperatura en un punto fijo x, para ello medimos la temperatura T cada intervalo de tiempo Δt obteniendo la secuencia $T_1, T_2, \cdots$ (ver la figura 2.3)

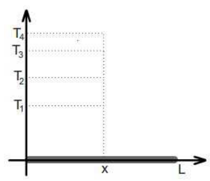

Figura 2.3: Ejemplo 1

2. Medimos la velocidad de un vehículo en los instantes $t_1, t_2, t_3, \cdots$, obteniendo la secuencia $v_1, v_2, v_3, \cdots$ (ver la figura 2.4)

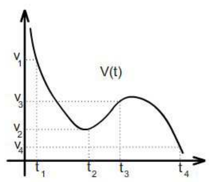

Figura 2.4: Ejemplo 2

3. La variación de la magnitud física no siempre se mide respecto al tiempo. Por ejemplo si estudiamos la deflexión de una viga al colocar diversas masas: (ver la figura 2.5)

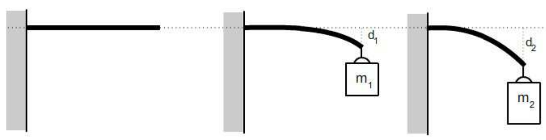

Figura 2.5: Ejemplo 3

Vamos aumentando $\Delta m\, Kg$ cada vez, y estudiamos la sucesión $d_1, d_2, d_3, \cdots$, es decir un conjunto numerado de números reales. Vamos a definir este concepto de forma general:

Definición 2.1 *Una sucesión es un conjunto numerado de números reales:*

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Ahora nos planteamos el siguiente problema: Estudiar las propiedades de $\{x_n\}$ a medida que el índice $n \in \mathbb{N}$ va aumentando.

Si determinamos el comportamiento de $\{x_n\}$ eso nos da información sobre cómo se comporta el fenómeno físico. Sin embargo, hay que ser cuidadosos en el modo de muestrear la función, porque los resultados pueden ser equivocados:

Por ejemplo (ver la figura 2.6) supongamos que nos interesa medir la amplitud de una señal $A(t)$. Supongamos que muestreamos en los instantes

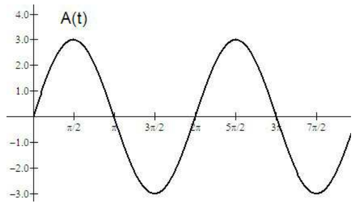

Figura 2.6: Señal $A(t) = 3\ \text{sen}(t)$

$$t_1 = \frac{\pi}{2}, t_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi, \cdots, t_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Si la señal fuese $A(t) = C\ \text{sen}\, t$, las observaciones serían

$$A(t_1) = A(t_2) = \cdots = A(t_n) = C$$

de modo que nuestra conclusión sería que $A(t) = C$ para todo t, lo cual no es cierto. Por eso la etapa de muestreo es muy importante.

No vamos a entrar en ello, pero existen resultados matemáticos que nos dicen cómo efectuar el muestreo de una señal $f(t)$ de modo que la sucesión muestreada $f(t_1), f(t_2), f(t_3), \cdots$ se comporte de un modo parecido a $f(t)$ (Procesamiento Digital de Señales).

Nosotros vamos a suponer que la sucesión $\{x_n\}$ es representativa del fenómeno a estudiar. Recuerda el problema que hemos planteado: Estudiar las propiedades de $\{x_n\}$.

2.2. Definición de la sucesión

- A partir de sus valores numéricos, por ejemplo podría tratarse de mediciones de laboratorio:

$$\{x_n\} = \{x_1 = 2.5, x_2 = 2.51, x_3 = 2.513, x_4 = 2.5132, \cdots\}$$

- A partir del *término general*, es decir, la regla que nos dice cómo calcular x_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo:

$$x_n = \frac{1}{n}, \qquad y_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \qquad y_m = \begin{cases} m^2 & \text{si m es par} \\ \frac{1}{m} & \text{si m es impar} \end{cases}$$

- Por recurrencia: el término y_n se obtiene a partir de los anteriores.

2.3. Propiedades interesantes de las sucesiones

Algunos tipos de sucesiones pueden servirnos para analizar diferentes tipos de comportamientos. Veamos algunas sucesiones:

- $\{x_n\} = \{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, \cdots\}$ (ver la figura 2.7)

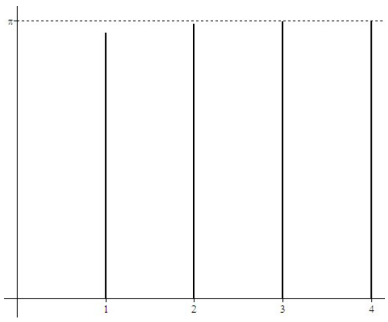

Figura 2.7: Tiende a π

Ejercicio 2.1 *Explica con tus propias palabras, qué propiedades pueden servir para describir el conjunto. Piensa también de qué modo podrías representar sus valores.*

Por ejemplo, supongamos que vamos echando canicas a una bolsa. Echamos dos canicas cada vez. La pregunta es ¿cuántas canicas habrá en la bolsa en cada momento?. Si y_n es el número de canicas en el instante n, entonces:

$$y_n = y_{n-1} + 2 \quad n = 2, 3, \cdots$$

$$y_2 = y_1 + 2 \Rightarrow y_3 = y_1 + 4 \Rightarrow y_4 = y_1 + 6 \Rightarrow \cdots$$

Sin embargo, tendremos que especificar el número de canicas que inicialmente había en la bolsa, esto es, el valor de y_1. Una vez conocido y_1, ya podemos obtener todos los términos de la sucesión (ver la figura 2.8):

$$y_1 \Rightarrow y_2 = y_1 + 2 \Rightarrow y_3 = y_2 + 2 \Rightarrow \cdots$$

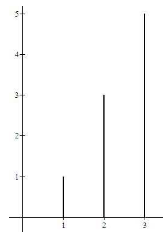

Figura 2.8: Número de canicas

En general, la sucesión definida en modo recurrente tendrá la forma $y_n = F(y_{n-1})$ $n = 2, 3, \cdots$, siendo y_1 un valor conocido.

No obstante, esta definición se puede ampliar, como por ejemplo en la sucesión de Fibonacci, definida de la forma:

$$y_1 = 1, y_2 = 1, y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \;\; \forall n > 2$$

$$y_3 = y_1 + y_2,\; y_4 = y_2 + y_3, \cdots$$

en la que es necesario conocer los dos primeros términos.

- $\{y_n\} = \left\{-1 + \dfrac{1}{n}\right\}_{n \geq 1} = \left\{0, -1 + \dfrac{1}{2}, -1 + \dfrac{1}{3}, -1 + \dfrac{1}{4}, \cdots\right\}$ Es fácil observar que y_n cumple las tres propiedades siguientes:

  - $y_n \leq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$
  - $\{y_n\}$ es decreciente
  - $\{y_n\}$ está acotada: $y_n \in [-1, 0] \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

  De manera formal, se escribirán así:

  Creciente: $y_{n+1} > y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  Decreciente: $y_{n+1} < y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  Acotada: $\exists\, p, q \in \mathbb{R} \;|\; p \leq y_n \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Los números p y q no son únicos y se llaman cotas)

  Para y_n:

$$n < n + 1 \;\; \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow -1 + \frac{1}{n} > -1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow y_{n+1} < y_n \;\; \text{(decreciente)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq y_n \leq 0 \quad p = -1, q = 0 \quad \text{acotada superior e inferiormente}$$

Ejercicio 2.2 *Para cada una de las siguientes sucesiones, estudiar si se verifica alguna de las tres propiedades anteriores:*

- $u_n = n^2$
- $v_n = -2n + 1$
- $z_k = (-1)^k \dfrac{1}{k}$ *(Estudiarla con detenimiento)*
- $w_x = \begin{cases} x & si\ x\ es\ par \\ \dfrac{1}{x} & si\ x\ es\ impar \end{cases} \quad x \in \mathbb{N}$
- $y_n = a^n \quad a \in \mathbb{R}$

Ejercicio 2.3 *Razonar las afirmaciones:*

$$\{x_n\}\ creciente/decreciente \quad \Rightarrow \{a \cdot x_n\}\ a \in \mathbb{R}\ \ creciente/decreciente$$

$$\{x_n\}\ Acotada \quad \Rightarrow \{a \cdot x_n\}\ a \in \mathbb{R}\ \ Acotada$$

2.4. Convergencia de sucesiones

Estudiando las sucesiones:

$$u_n = \frac{1}{n}; \quad y_n = \frac{2n}{n+1}; \quad z_n = \frac{n^2}{2n^2 + 3n + 1}$$

Encontramos un comportamiento común: cada una de ellas tiene un cierto *valor característico* l: a medida que n aumenta, la distancia entre el término n-simo de la sucesión y l es cada vez menor. (ver la figura 2.9)

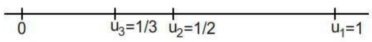

Figura 2.9: Sucesión $\{1/n\}$

En otras palabras, por muy pequeña que sea la distancia d que tomemos desde l, llega un momento en que todos los términos de la sucesión están aún mas cerca de l

Por ejemplo: $u_n = \dfrac{1}{n}$ (ver la figura 2.10)

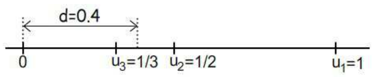

Figura 2.10: Proximidad al límite

Tomo $d = 0.4$: A partir de $n = 3$, todos los siguientes términos están mas cerca de 0 que 0.4

Y si cambio el valor de d, p. ej. $d = 0.05$: $\dfrac{1}{n} < 0.05 \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{0.05} = 20$.
A partir del término 21, todos los siguientes términos están mas cerca de 0 que $d = 0.05$.

Veamos otro ejemplo: $\{x_n\} = \{(-1)^n \frac{1}{n}\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \cdots\right\}$ (ver la figura 2.11)

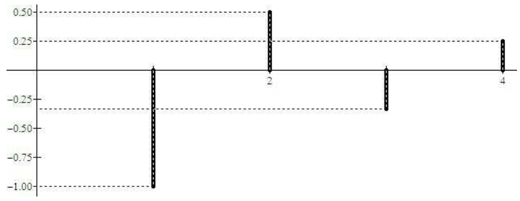

Figura 2.11: Otro ejemplo

Los términos de x_n se sitúan a ambos lados de $l = 0$, pero el comportamiento es el mismo. *Por muy pequeña que sea la distancia d que nos fijemos desde l, llega un momento en que todos los términos siguientes de la sucesión se encuentran a una distancia menor que d.*

Estudiemos esta condición en $y_m = \dfrac{2m}{m+1}$ y $l = 2$ para algunas distancias: $d = 0.5,\ 0.05,\ 0.01,\ 0.001$

Dado $d > 0$, se trata de encontrar m tal que $\dfrac{2m}{m+1} > 2 - d$ (ver la figura 2.12)

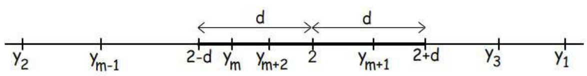

Figura 2.12: Obtención de m

Como $\dfrac{m}{m+1} < 1 \Rightarrow y_m < 2 \ \ \forall m \in \mathbb{N}$

$$2 - d < \frac{2m}{m+1} \Leftrightarrow 2m + 2 - dm - d < 2m \Leftrightarrow 2 - d < dm \overset{d>0}{\Leftrightarrow} m > \frac{2-d}{d} = \frac{2}{d} - 1$$

Si $d = 0.5$ entonces $m > \dfrac{2}{0.5} - 1 = 3$

Si $d = 0.001$ sería $m > \dfrac{2}{0.001} - 1 = 1999$

Ahora vamos a escribir formalmente el concepto de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ a l:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow \qquad x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

A B C D

Donde cada bloque lo podemos leer de la forma siguiente:

A: por muy pequeña que sea la distancia que tomemos desde l ...

B: llega un momento, es decir, existe un término de la sucesión tal que ...

C: todos los términos a partir de él ...

D: están a una distancia de l menor que ε, es decir, caen dentro del intervalo $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ (ver la figura 2.13)

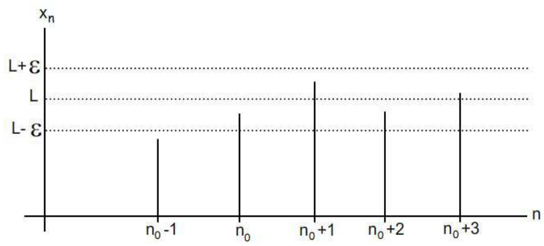

Figura 2.13: Definición de límite

Ejercicio 2.4 *¿Qué nombre crees que podríamos darle al número l?*

Ejercicio 2.5 *Dada* $y_r = \dfrac{r^2}{r^2+1}$, *estudiar:*

- *Crecimiento*
- *Acotación*
- *Convergencia hacia cierto valor l*

Ejercicio 2.6 *Estudiar todas las propiedades que hemos definido en los siguientes ejemplos de sucesiones. Representarlas gráficamente.*

1. $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

2. $y_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n \leq 10^6 \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n > 10^6 \end{cases}$

3. $z_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \leq 10^6 \\ 1+\dfrac{1}{n} & \text{si } n > 10^6 \end{cases}$

4. $u_n = r^n \quad r \in \mathbb{R}$

Ejercicio 2.7 *Escribir formalmente la condición de que l no es límite de la sucesión $\{x_n\}$.*

2.5. Propiedades de las sucesiones convergentes

2.5.1. Unicidad del límite

¿Es posible que haya dos límites distintos? (ver la figura 2.14):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l_1, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = l_2 \quad l_1 \neq l_2$$

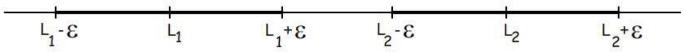

Figura 2.14: El límite es único

Para demostrar que esto es falso, por el método de reducción al absurdo, la estrategia es:

- Tomar un ε lo bastante pequeño para que los intervalos $(l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$ y $(l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$ no tengan puntos comunes $\left(\varepsilon \leq \frac{|l_1-l_2|}{2}\right)$.
- Encontrar $n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ x_n \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$ y $x_n \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$, lo cual es imposible (absurdo).

2.5.2. Convergencia de operaciones entre sucesiones

Sean $\{x_n\} \to l_1,\ \{y_n\} \to l_2$. Parece que podemos esperar:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n + y_n\} = l_1 + l_2$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n \cdot y_n\} = l_1 \cdot l_2$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \{kx_n\} = k \cdot l_1$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = \dfrac{l_1}{l_2}$ siendo $y_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $l_2 \neq 0$

Las cuatro siempre son ciertas. Veamos los casos 1 y 3 :

1) (ver la figura 2.15)

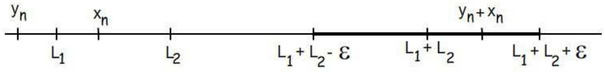

Figura 2.15: Límite de la suma de dos sucesiones

Dado $\varepsilon > 0$, buscamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$:

$$x_n + y_n \in (l_1 + l_2 - \varepsilon, l_1 + l_2 + \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad l_1 + l_2 - \varepsilon < x_n + y_n < l_1 + l_2 + \varepsilon \tag{2.1}$$

Dado $d > 0$:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_1 \quad l_1 - d < x_n < l_1 + d$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_2 \quad l_2 - d < x_n < l_2 + d$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y sumando ambas inecuaciones:

$$\forall n > n_0 \quad l_1 + l_2 - 2d < x_n < l_1 + l_2 + 2d$$

y conseguimos (2.1) tomando $d = \dfrac{\varepsilon}{2}$

3) Dado $\varepsilon > 0$, buscamos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$:

$$k\,l_1 - \varepsilon < k\,x_n < k\,l_1 + \varepsilon \tag{2.2}$$

Dado $d > 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_1 \quad l_1 - d < x_n < l_1 + d \tag{2.3}$$

Debemos transformar (2.3) en (2.2):

- Si $k > 0$: $k\,l_1 - k\,d < k\,x_n < k\,l_1 + k\,d$ y conseguimos (2.2) tomando $d = \dfrac{\varepsilon}{k}$
- Si $k < 0$: $k\,l_1 - k\,d > k\,x_n > k\,l_1 + k\,d \Leftrightarrow k\,l_1 + k\,d < k\,x_n < k\,l_1 - k\,d$ y conseguimos (2.2) tomando $d = -\dfrac{\varepsilon}{k} > 0$

(ver la figura 2.16)

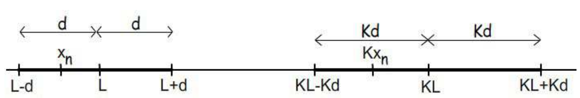

Figura 2.16: Cambio de escala

Ejercicio 2.8 *Si $\{w_n = x_n + y_n\}, \{z_n = x_n y_n\}, \{u_n = kx_n\}$ son convergentes, ¿también lo son $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$?*

2.5.3. Acotación

Estudiemos ahora cuál es la relación entre *acotación* y *convergencia*. En concreto

1. Si $\{x_n\}$ es acotada, ¿es siempre convergente?

2. Si $\{x_n\}$ es convergente, ¿es siempre acotada?

Ejercicio 2.9 *Estudiar ambas propiedades en la sucesión $x_n = (-1)^n$. ¿Qué conclusión obtenemos?*

Ejercicio 2.10 *Demostrar que la propiedad (2) es siempre cierta, empleando la siguiente estrategia;*

1. Acotar casi todos los términos en $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, es decir, todos salvo un número finito de ellos.

2. Acotar el resto de los términos, sabiendo que es un número finito.

Ejercicio 2.11 *Acabamos de demostrar que*

$$\{x_n\} \text{ convergente } \Rightarrow \{x_n\} \text{ acotada}$$

Pero, ¿qué podemos asegurar si $\{x_n\}$ es NO acotada?

En general, si hemos demostrado una implicación $P \Rightarrow Q$, ¿qué ocurre si nos encontramos con un ejemplo en el que Q no es cierta?

2.6. Estimación del límite de una sucesión convergente

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, es de esperar que para un valor de n avanzado, $l \approx x_n$. Ahora bien, ¿qué significa un valor de n *avanzado*?, ¿Por ejemplo, $n = 1000, 100000$?. Se trata de una cuestión importante porque si estamos calculando de forma aproximada el límite l de $\{x_n\}$ mediante un programa de ordenador, habrá que indicar de algún modo el significado de n *avanzado*; habrá que especificar de algún modo qué condición debe cumplirse para que el programa se detenga, Esta condición se llama *criterio de parada*. Veamos tres criterios de parada que podemos utilizar:

Criterio 1: Calcular x_k, siendo k un valor predeterminado $(100, 1000, 100000, \cdots)$

Criterio 2: Fijado $\varepsilon > 0$, detener los cálculos cuando $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

Criterio 3: Fijado $\varepsilon > 0$, detener los cálculos cuando $\dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} = \left|1 - \dfrac{x_{n-1}}{x_n}\right| < \varepsilon$

Pero cuidado, el hecho de que $x_n - x_{n-1} \to 0$ no asegura la convergencia de $\{x_n\}$.
Por ejemplo: $\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right\}$ diverge y sin embargo $x_n - x_{n-1} \to 0$

Veamos que $\{x_n\}$ diverge a $+\infty$:

$$\begin{aligned} x_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\cdots > \\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots = \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots \quad \to \infty, \quad \text{¿puedes demostrar que } x_n - x_{n-1} \to 0 \text{ ?} \end{aligned}$$

2.7. Teorema de la convergencia monótona

Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión creciente. Esto no es una condición necesaria ni suficiente para generalizar la convergencia. ¿Como demostrar que ésto es cierto?

- Para demostrar que una propiedad es cierta en general, **No** podemos emplear ejemplos en los que esa propiedad se cumple. Hay que hacerlo de modo general, partiendo de una sucesión cualquiera.
- Para demostrar que una propiedad no siempre es cierta, basta con encontrar un caso en el que no es cierta: es un *contraejemplo*.

Ejercicio 2.12 *Demostrar que las siguientes propiedades no son ciertas en general:*

P1: Para que $\{x_n\}$ sea convergente, es necesario que $\{x_n\}$ sea creciente.

P2: Si $\{x_n\}$ es creciente, entonces es convergente.

Así pues, si sólo sabemos que x_n es creciente no podemos decir nada de su convergencia. Ahora nos preguntamos: ¿Qué condición ADICIONAL nos permite asegurar la convergencia?.
Veamos algunos ejemplos:
Ejemplo 1:

$x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ Es creciente y convergente

$y_n = 2n + 1$ Es creciente y no converge.

¿Qué las diferencia?.
Es fácil comprobar que $\{x_n\}$ está acotada superiormente, mientras que $\{y_n\}$ no.

En general, se puede demostrar que las condiciones creciente y acotada nos aseguran la convergencia. Ahora bien, ¿cuál será el límite? (ver la figura 2.17)

Por ejemplo (ver la figura 2.18):
$x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

$l = 1$ es el límite y además la menor de las cotas superiores (supremo). Cualquier otro número $1 - \varepsilon$ no puede ser cota superior, porque como x_n es creciente, llega un momento

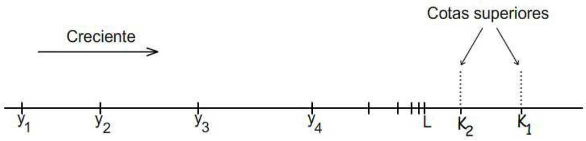

Figura 2.17: Sucesión creciente y acotada

en que $x_n > 1 - \varepsilon$, es decir supera la *cota*. Pues bien, este resultado es cierto también en general y se conoce con el nombre de Teorema de la convergencia monótona: (ver la figura 2.18)

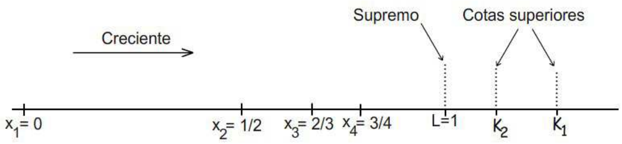

Figura 2.18: El supremo es el límite

Teorema 2.1 (De la convergencia monótona) *Si $\{x_n\}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\{x_n\}$ es convergente. Además su límite es el supremo de $\{x_n\}$.*

Ejercicio 2.13 *Enunciar el teorema para sucesiones decrecientes. Encontrar ejemplos de aplicación del teorema.*

Ejemplo: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ Se puede demostrar que es creciente y acotada, por lo que es convergente. Estimemos su límite:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2.25,\ x_3 = 2.37,\ x_{10} = 2.59,\ x_{100} = 2.704,\ x_{1000} = 2.717,$$

(Como ves, converge muy lentamente).

Veamos otra forma de calcularlo:

En la expresión $l = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ tomamos logaritmos neperianos, (al ser $\ln(x)$ función continua y creciente para los valores que toma la sucesión, el logaritmo y el límite son intercambiables) y queda:

$$\ln l = \lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{\substack{\text{tomamos n real}\\ \text{aplicamos L'Hôpital}}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(\dfrac{-1}{n^2}\right)}{\dfrac{-1}{n^2}} = 1$$

y tenemos: $\ln l = 1 \Rightarrow l = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \equiv$ menor de las cotas superiores $\equiv$ supremo.

2.8. Divergencia hacia $\pm\infty$ de una sucesión

Ejercicio 2.14 *Considera las siguientes sucesiones:*

$$x_n = n, \quad y_n = n^2, \quad z_n = \mathrm{e}^n, \quad w_n = n!, \quad p_n = \ln n \quad q_n = \begin{cases} n^3 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Demuestra que se cumple lo siguiente:

- *Para* $x_n, \cdots, p_n : \forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > M$
- *Para* q_n *: esta condición no es cierta, sólo podemos decir que es No acotada, (por lo tanto no converge)*

Pues bien, ya podemos definir dos nuevos conceptos:

Definición 2.2 *Escribiremos*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

si se cumple:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M$$

(ver la figura 2.19)

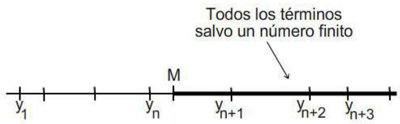

Figura 2.19: Sucesión no acotada superiormente

Y de forma análoga

Definición 2.3 *Escribiremos*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

si se cumple:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ | \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow y_n < M$$

(ver la figura 2.20)

Ejercicio 2.15 *Discutir el siguiente ejemplo:* $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ n^2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

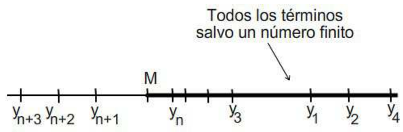

Figura 2.20: Sucesión no acotada inferiormente

2.8.1. Comparación de la velocidad de crecimiento hacia ∞

Hemos visto ejemplos de sucesiones tales que su límite es infinito:
$x_n = n$; $y_n = n^2 + 1$; $u_n = \mathrm{e}^n$; $v_n = n^3$.
Aunque las cuatro divergen, no lo hacen con la misma velocidad. Por ejemplo, para n lo bastante avanzado, el valor de x_n es mucho menor que el de y_n, u_n y v_n. Esta propiedad la denotamos de este modo:

$$x_n \quad << \quad y_n, \quad x_n \quad << \quad u_n, \quad x_n \quad << \quad v_n$$

Sin embargo, si tratamos de comparar y_n y u_n ó u_n y v_n, ¿cuál de ellas tendrá un orden mayor de divergencia hacia ∞?.

¿Cómo podemos en general, comparar los órdenes de divergencia de dos sucesiones a_n y b_n?.

La idea consiste en estudiar la convergencia de la sucesión cociente de ambas. Así:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \infty & \Rightarrow \{a_n\} \text{ es de mayor orden} \\ 0 & \Rightarrow \{b_n\} \text{ es de mayor orden} \\ k \neq 0 & \Rightarrow \text{ son ambas del mismo orden} \end{cases}$$

Ejercicio 2.16 *Comparar los órdenes de crecimiento a infinito de las sucesiones:*

$$n^p \, (p \in \mathbb{R}), \ \ln(n), \ \mathrm{e}^n, \ n!, \ n^n$$

2.8.2. Algo más sobre las sucesiones recurrentes

Recuerda (ver el punto (2.2)) que una sucesión recurrente queda definida mediante un primer término x_1 y una expresión con la que obtenemos el término x_{n+1} a partir de x_n. Es decir:

$$x_{n+1} = f(x_n), n \geq 1, x_1 \in \mathbb{R}$$

(ver la figura 2.21)

Vamos a suponer que $f(x)$ es una función continua, y que $l = \lim_{n\to\infty} x_n$. Entonces:

$$x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{n+1}\right) \Rightarrow l = f(l)$$

Así pues, el valor de l es un punto de corte entre las funciones $y = x$ e $y = f(x)$. Observa en la figura 2.21 cómo se van obteniendo los términos de la sucesión x_n, que converge hacia l.

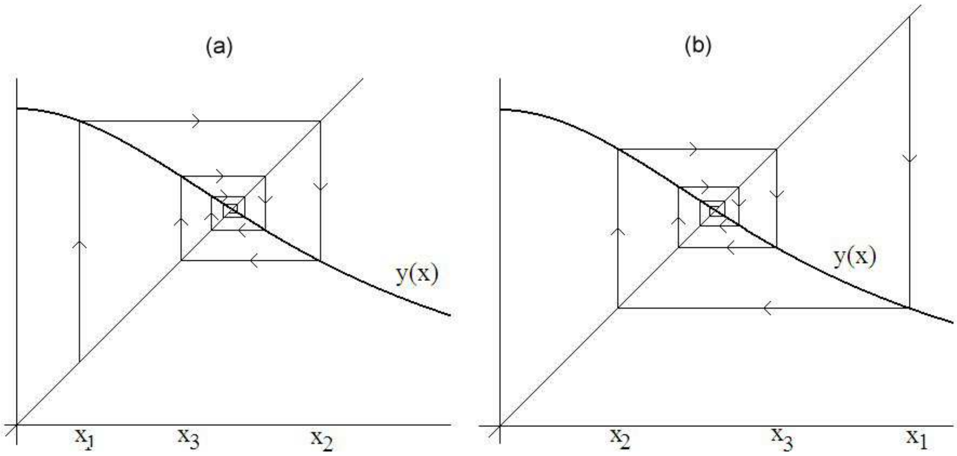

Figura 2.21: Sucesiones recurrentes

Ejemplo 2.1 *Definimos la siguiente sucesión recurrente:* $a_{n+1} = 3 \cdot a_n^2$ *siendo* $a_1 > 0$.

En este caso, $f(x) = 3x^2$, de modo que si a_n es convergente, su límite l debe verificar la ecuación:

$$x = 3x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = \frac{1}{3}$$

Por ejemplo, si

$$a_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{25} = 0.12 \Rightarrow a_3 = \frac{27}{625} = 0.0432 \Rightarrow a_4 = 0.0056\cdots \text{ converge hacia } 0$$

En cambio, si

$$a_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{4} = 0.75 \Rightarrow a_3 = \frac{27}{16} = 1.69 \Rightarrow a_4 = 8.54\cdots \text{ diverge hacia } \infty$$

Ahora nos preguntamos, ¿por qué para un valor de "arranque" a_1, la sucesión converge y para otro no?

Observa la figura 2.22. Hemos representado las gráficas de $y = 3x^2$ e $y = x$. Utilízala para comprobar que la sucesión a_n converge hacia 0 cuando $a_1 \in [0, 1/3]$ pero diverge a ∞ si $a_1 > 1/3$.

La explicación de por qué para algunos valores de a_1 la sucesión converge y para otros diverge, la encontramos en un teorema que estudiaremos más detenidamente en el tema 4, al tratar del Teorema del punto fijo, que nos da condiciones suficientes (aunque no necesarias) para asegurar la convergencia de a_n:

Teorema del punto fijo: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $f(x) \in [a, b]$, entonces existe un punto $l \in [a, b]$ tal que $l = f(l)$.

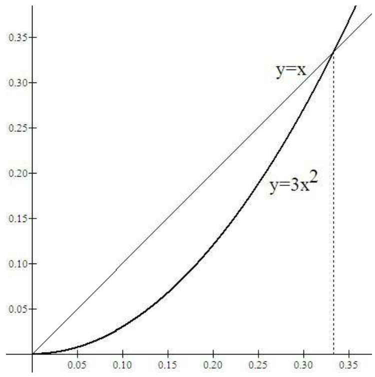

Figura 2.22: $y = 3x^2$ e $y = x$

En nuestro caso, $f(x) = 3x^2$, si $x \in [0, 1/3]$, $f(x) \in [0, 1/3]$ luego existe algún punto fijo en $[0, 1/3]$ y por tanto la sucesión es siempre convergente. El límite sólo puede ser 0 ó 1/3, pero en este caso la convergencia es siempre hacia 0

2.8.3. Series numéricas

Vamos a plantear un nuevo problema:
Existen numerosas situaciones en las que cierta magnitud A, se escribe mediante una suma de infinitos términos:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

En el tema 1 (números complejos) utilizamos algunos resultados basados en series infinitas:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)\\
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)\\
\mathrm{e}^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)
\end{aligned}$$

Estudiaremos en el tema 5 de dónde surgen estos desarrollos pero de (3) podemos deducir, sin más que tomar $x = 1$:

$$\mathrm{e} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

Ejercicio 2.17 *Usar las expresiones anteriores para obtener las series de las siguientes funciones:*

$$\mathrm{e}^{-x},\ \mathrm{e}^{x^2},\ \cos 2x,\ \operatorname{sen} 3x,\ x \cdot \mathrm{e}^x,\ \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ (x \neq 0),\ \operatorname{sen}(-x),\ \cos(-x),\ \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

Otro desarrollo interesante es el siguiente:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots$$

Como ejercicio, elige un valor adecuado de $x \in \mathbb{R}$ para obtener π de la forma:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots\right)$$

En estas series de e y π, si tomamos sólo un número finito de sumandos, obtenemos una aproximación que será mas próxima al valor real cuantos mas sumandos tomemos.

Ejercicio 2.18 *Utilizar los anteriores desarrollos de π y e para obtener aproximaciones sucesivas a estos valores, hasta obtener:*

$$\mathrm{e} \approx 2.71828 \qquad \pi \approx 3.14159$$

completando la siguiente tabla:

n° de sumandos	aproximación de e	aproximación de π
1		
2		
5		
10		
$\vdots$		

Sabemos qué significa "cortar" la serie y quedarnos sólo con un número finito de sumandos:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \Rightarrow \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Pero ¿Qué significa sumar toda la serie ?. ¿Cómo se hace?. Este es el problema.

La cuestión tiene sus dificultades, por ejemplo,
¿Cuánto vale $S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$?

Podemos tratar de calcular el valor de S, asociando términos de distintas formas:

$$S = \begin{cases} (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 0 \\ \\ -1 + (1-1) + (1-1) + (-1+1) + \cdots = -1 \end{cases} \qquad \text{¡¡ Contradicción !!}$$

Este ejemplo muestra que no siempre se pueden utilizar las propiedades válidas para sumas finitas, en este caso la propiedad asociativa:

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$$

Pero

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots$$

puede dar lugar a un valor diferente de

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots$$

¿Como definir la suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$?. La idea es tomar la sucesión de sumas parciales:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como S_n es una sucesión, podemos estudiar su convergencia:

Definición 2.4 *Diremos que la serie $\sum a_n$ es convergente si existe el límite:*

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

y el límite es finito.

$$\textit{Lo denotamos} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ejemplo 2.2 *Consideremos la serie geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots \quad r \in \mathbb{R}$$

En este caso:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \quad \text{si } r \neq 1$$

y calculando el límite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - r} & \text{si } |r| < 1 \\ \text{no converge} & \text{si } |r| \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2.3 *¿Cuánto vale* $0.9999999\cdots$ *?*

$$0.999999999\cdots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots = 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right) =$$
$$= 9\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n \overset{\text{geométrica}}{=} 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 1 \Rightarrow 0.99999\cdots = 1$$

Ejercicio 2.19 *Calcular*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot r^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2\cdot r^k \quad \textit{(Ayuda: derivar} \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \textit{respecto a r)}$$

Ejercicio 2.20 *Estudiar la convergencia de la serie:*

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

Ejercicio 2.21 *Escribir con notación de sumatorios las series de las funciones:*

$$\mathrm{e}^x, \ \cos x, \ \operatorname{sen} x, \ \mathrm{e}^{x^2}, \ \operatorname{sen} 2x$$