

Capítulo 2

Ejercicios con Winplot de sucesiones y series numéricas

2.1. Actividades con el programa sucesion.wp2

2.1.1. Funcionamiento:

Se introduce una sucesión, su límite (variable L) y una distancia (variable E). Aparece una banda horizontal centrada en L , de amplitud E a cada lado. Se observan los términos de la sucesión, y se trata de encontrar en qué momento los términos entran en la banda y ya no salen.

2.1.2. Trabajos a realizar:

1. Estimar el límite, puede ser una sucesión complicada para la cual no sea sencillo. P. ej. $(1+1/n)^n$. Se puede estudiar la tabla y estimar hacia dónde tiende. Otro ejemplo interesante es la fórmula de Stirling. El factorial se introduce con la notación estándar (!).

NOTA: El exponente real no existe en Winplot. El término $(1 + 1/x)^x$ hay que introducirlo como $\exp(x \ln(1+1/x))$.

Se puede experimentar comparando exponenciales, potencias, factoriales, para estudiar cuál tiende a infinito más rápido. También cocientes de polinomios de igual grado, donde los términos de mayor grado son siempre los mismos pero cambian los demás términos. Se comprobará que el límite es el mismo, no depende de los términos en menor grado.

NOTA: Ojo con $n!$ porque Winplot sólo puede evaluar hasta $20!$.

2. Para cada valor de E , encontrar en término M tal que la sucesión permanece en la banda a partir de ese término M .

Hay que utilizar el zoom (pag. arr./ab.), derecha (teclas flecha, botón dcho del ratón, arriba,abajo, **VER->LLENAR VENTANA,VER->REESTABLECER**) para

ver los términos.

2.2. Actividades con el programa sucesión recurrente. wp2

2.2.1. Funcionamiento:

Dada una cierta función $F(x)$, se trata de estudiar la existencia de un punto fijo x , es decir, de un punto x tal que $x = F(x)$. Para ello se utilizará el teorema del punto fijo y la sucesión recurrente $U_{n+1} = F(U_n)$.

El programa contiene en el inventario varias funciones definidas: $H(x)$, $G(x)$, $K(x)$, etc. Para trabajar con una de ellas: **Ecua->Definir función** editar $F(x)$ asignándole la función deseada. Por ejemplo, para trabajar con $K(x)$, hacer $F(x) = K(x)$.

Se representa gráficamente la curva $F(x)$ y la recta $y = x$. Hay que estudiar la existencia de intersección entre ambas y calcular aproximadamente la abscisa donde se produce la intersección.

2.2.2. Trabajos a realizar:

1. Colocar el valor inicial U_0 en la variable U . Colocar en las variables A y B los extremos del intervalo donde se va a aplicar el teorema del punto fijo.
2. Analizar la existencia de un punto fijo, es decir: Para cierto valor inicial U , estudiar si existe un intervalo $[A, B]$ donde sea posible aplicar el teorema del punto fijo.
3. Calcular algunos términos de la sucesión $\{U_n\}$. Para ello, en **Una->Sucesión**, elegir en el inventario la recursión **(x,y)=>(F(x),0)** y completar los datos del siguiente modo:

x = u
y = 0.00
nº de iteraciones = 512

Haciendo clic en el botón **dibujar** se dibujarán los puntos. Haciendo clic en el botón **tabla** podremos ver los valores de la sucesión calculados.

2.3. Actividades con el programa series. wp2

2.3.1. Funcionamiento:

Se trata de estudiar la convergencia de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} G(x)$ para diversas funciones $G(x)$. Por ejemplo, si $G(x) = 1/x^2$, estaremos estudiando la serie $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}$. El programa contiene varias funciones $G(x)$, $F(x)$, $H(x)$ posibles. Para cambiar de una a otra, en **Una->Sucesión**, editar la recursión **(x,y)=>(x+1,y+G(x+1))**, y cambiarla a **(x,y)=>(x+1,y+F(x+1))**,

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow (\mathbf{x} + \mathbf{1}, \mathbf{y} + \mathbf{H}(\mathbf{x} + \mathbf{1}))$. Después, proceder como en el problema anterior para calcular los valores de la sucesión suma.

2.3.2. Trabajos a realizar:

Estudiar las series $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}$, $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}$, y $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x!}$