Capítulo 2

Problemas de series y sucesiones

(En los problemas marcados con el icono es conveniente usar de un programa de ordenador para la representación gráfica de funciones, por ejemplo Winplot.)

2.1. Sucesiones

1. Razonar cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de una sucesión $\{a_n\}$ son verdaderas y cuáles falsas:

   a) Si $a_n > 0$ para todo n y $\{a_n\}$ converge hacia L, entonces $L > 0$.

   b) Si $a_n \geq 0$ para todo n y $\{a_n\}$ converge hacia L, entonces $L \geq 0$.

   c) Si $a_n < 0$ para todo n y $\{a_n\}$ converge hacia L, entonces $L < 0$.

   d) Si $a_n \leq 0$ para todo n y $\{a_n\}$ converge hacia L, entonces $L \leq 0$.

   e) Si a_n converge hacia L y $L > 0$, entonces existe un término de la sucesión a partir de cual todos los siguientes son positivos.

   f) Si $\{a_n\}$ converge hacia L y $L < 0$, entonces existe un término de la sucesión a partir de cual todos los siguientes son negativos.

   g) Si $\{a_n\}$ converge hacia 0, no puede asegurarse nada acerca del signo de a_n.

   h) Si $\{a_n\}$ está acotada, entonces es convergente.

   i) Si $\{a_n\}$ no está acotada, diverge hacia $+\infty$ o $-\infty$.

   j) Si $\{a_n\}$ es decreciente, entonces es convergente

   k) Si $\{a_n\}$ es creciente, entonces es convergente

   l) Si $\{a_n\}$ es decreciente y $a_n>0$ para todo n, entonces es convergente

   m) Si $\{a_n\}$ no es creciente ni decreciente, entonces diverge a $\pm\infty$.

   n) Si $\{a_n\}$ converge hacia L, a_n nunca alcanza el valor L.

2. En cada una de las siguientes sucesiones, explicar por qué es convergente o divergente y en caso de convergencia calcular el límite.

   a) $a_n = \dfrac{4n^2 + 7n - 1}{n^2 + 5}$

   b) $a_n = \dfrac{3n^5 + 13n^2 - 8n}{14n^9 - 7n^6 - 13}$

   c) $a_n = \dfrac{2n^4 - 7n}{n^2 + 3}$

   d) El término general a_n es un cociente de polinomios.

3. Análisis de la velocidad de convergencia de una sucesión. Considerar las siguientes sucesiones convergentes:

$$a_n = 2 + \frac{1}{n}; \quad b_n = 4 + \frac{1}{n^2}; \quad c_n = 1 + \frac{1}{n^4}$$

   a) Aplicar en los tres casos la definición de límite: Dada una distancia arbitrariamente pequeña d tomada desde el límite L, encontrar el término m de la sucesión a partir del cual todos los siguientes caen dentro del intervalo $(L - d, L + d)$.

   b) Para un mismo valor de d, comparar en los tres casos cómo de avanzado debe ser dicho término m. ¿Qué conclusión extraes, en cuanto a la velocidad de convergencia de las tres sucesiones?

   c) Para cada valor de d, has obtenido un valor m que depende de d. Así pues, *m es una función de d*. Representa gráficamente esta función $m(d)$ en los tres casos y compara sus comportamientos. ¿Conclusiones?

   d) Encontrar el valor de m puede ser difícil en general. ¿Se te ocurre alguna sucesión para la cual no sea posible encontrarlo? Idea otro procedimiento diferente para comparar la velocidad de convergencia de dos sucesiones, sin tener que determinar el valor de m.

4. Calcular el límite, si existe, de las siguientes sucesiones. Emplear la calculadora si es necesario o la regla de L'Hopital si es posible.

   a) $n^{\frac{1}{n}}$

   b) $\dfrac{\ln n}{n}$

   c) $n \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

   d) $\dfrac{2^n}{n!}$

   e) $\dfrac{n^2}{2^n}$

f) $\dfrac{n!}{n^n}$

g) $\left(1+\dfrac{A}{n}\right)^n$

5. Es Año Nuevo y decides seguir el siguiente método de ahorro: el primer día guardarás un céntimo de euro, el segundo día 2, el tercero 3, y así sucesivamente. ¿Tendrás ahorrados 700 euros dentro de un año?

6. Supongamos que dos sucesiones divergen hacia el infinito. ¿Qué puede decirse de la diferencia entre ambas sucesiones?

7. Supongamos que una sucesión diverge hacia el infinito y otra converge hacia 0. ¿Qué puede decirse del producto de ambas sucesiones?

8. Supongamos que $\{b_k\}$ diverge hacia infinito y que $\{a_k\}$ es acotada. ¿Qué puede decirse de las sucesiones $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}$ y $\left\{\frac{b_k}{a_k}\right\}$?

9. Supongamos que $\{a_k\}$ diverge hacia infinito. Estudiar la convergencia de la sucesión:

$$\left(1+\frac{A}{a_k}\right)^{a_k}$$

10. Supongamos que $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ divergen hacia infinito. Estudiar la convergencia de la sucesión:

$$\left(1+\frac{A}{a_k}\right)^{b_k}$$

11. En las siguientes sucesiones recursivas $a_{n+1} = f(a_n)$, se trata de hacer el siguiente estudio:

    a) Calcular su límite, suponiendo que es convergente.

    b) Tomar cierto valor inicial a_1 y evaluar algunos términos.

    c) ¿Parece converger? ¿Cómo afecta a la convergencia la elección de a_1? Analizar la situación mediante el teorema del punto fijo.

    d) Interpretar gráficamente esta situación mediante un diagrama en red.

    1) $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{B}{a_n}\right)$ (Resultado ya conocido en Mesopotamia, 1500 años A. C.).
    2) $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$
    3) $a_{n+1} = a_n^2 - 2$
    4) $a_{n+1} = 3^{-a_n}$
    5) $a_{n+1} = 2 + \dfrac{5}{a_n^2}$

12. Las sucesiones $n!$ y $e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$ divergen hacia infinito. ¿Cuál de ellas lo hace más rápidamente? Este resultado fue descubierto por el matemático escocés James Stirling en el siglo XVIII, y por ello se conoce con el nombre de Fórmula de Stirling. ¿Cómo podrías emplearlo para encontrar una sucesión que sea convergente hacia π ? ¿ Y otra convergente hacia e?

2.2. Series

13. Para las siguientes series numéricas convergentes, se trata de estimar el valor de la suma, estableciendo previamente un criterio de parada. Compárese el número de iteraciones necesarias en cada caso.

    a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

    b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

    c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+2}$

    d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+2}$

    e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

    f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

14. Calcular el valor exacto de las siguientes series:

    a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} r^n$

    b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} nr^{n+1}$

    c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)r^{n+1}$

15. Comprobar experimentalmente la divergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Calcular cuántos sumandos deben tomarse para superar el valor $M = 10$.

16. Sabiendo que $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$ para todo x perteneciente a $(-1, 1)$, estimar el valor de $\ln(3)$.

17. Utilizando los desarrollos en serie de e^x, $\mathrm{sen}(x)$ y $\cos(x)$, estimar los valores de $e^{2.1}, \mathrm{sen}(4.25)$ y $\cos(1.32)$.