

Capítulo 11

Introducción al análisis de Fourier

La ubicuidad de la periodicidad en la naturaleza es patente y bien cercana. Nuestra vida está regida por la sucesión de días y noches, veranos, inviernos, años, ... nuestro cuerpo está constantemente animado por ritmos fisiológicos, latidos, respiraciones. Nuestro espíritu también tiene sus ritmos anímicos. Nuestra actividad toda, nuestra música, nuestros juegos, nuestras máquinas están invadidas por la periodicidad. El análisis armónico, tal como lo entendemos hoy, consiste en un proceso matemático para explorar los fenómenos de naturaleza recurrente. Toda intelección, no sólo la matemática, está en realidad fuertemente ligada a la recurrencia, a la repetitividad. Sin ella nuestro pensamiento no encontraría esquemas de referencia. La recurrencia es condición intrínseca de nuestro tipo de intelección. El caos, lo ininteligible, es la ausencia de recurrencias. Si cada animal que nos encontrásemos fuese totalmente diferente en su modo de locomoción, en sus órganos sensoriales, en su forma de alimentación, etc ... ¿Podríamos tener una ciencia zoológica organizada? Si los astros todos llevasen trayectorias de diferentes tipos, si nuestros días y noches fuesen todos de diferente duración, sin las uniformidades que observamos, no tendríamos la ciencia astronómica que tenemos. Nuestra forma de entender referencias exige esquemas de recurrencia en los que encajar los nuevos fenómenos.

Miguel de Guzmán, Impactos del Análisis Armónico, Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (Madrid, 23 Marzo 1983)

11.1. Planteamiento del problema

El párrafo del profesor Miguel de Guzmán nos habla de lo presente que está la periodicidad en nuestro entorno, de los fenómenos que se repiten cada cierto intervalo de tiempo. Observa la Figura 11.1. Se trata de un fragmento de electrocardiograma humano, es decir, el gráfico que se obtiene con el electrocardiógrafo para medir la actividad eléctrica del corazón a medida que transcurre el tiempo. Este gráfico sirve para diagnosticar las enfermedades cardiovasculares. Como se puede ver, el valor de la amplitud de la actividad eléctrica del corazón en cada instante se repite casi exactamente cada cierto período de tiempo T . Es decir, si $A(t)$ es la actividad eléctrica medida en el instante de tiempo t , entonces se tiene $A(t + T) = A(t)$ para todo t .

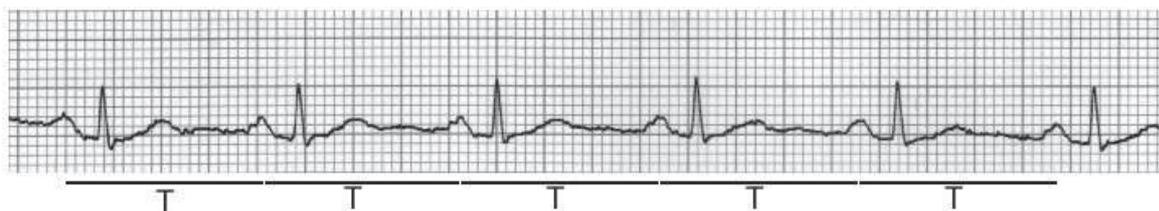


Figura 11.1: Fragmento de un electrocardiograma

Son muchas las señales periódicas o aproximadamente periódicas que aparecen en las ciencias y en la Ingeniería: la luz, el sonido, las mareas, los períodos de lluvias, las fluctuaciones en los precios, las señales de exploración sísmica, las señales de explosiones, las señales electromagnéticas, etc. La forma de onda de un fenómeno real puede ser muy complicada. Observa la Figura 11.2. Hemos utilizado un software de análisis de audio digital para capturar 0.5 segundos del tema *Marble Halls* de Enya. La amplitud de la onda está expresada en decibelios (dB), y como puedes ver su forma es realmente complicada.

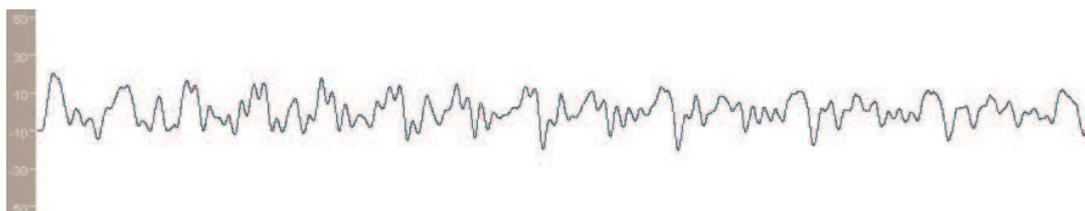


Figura 11.2: Fragmento de Marble Halls de Enya

Observa en cambio la forma de onda que aparece en la Figura 11.3, se trata de una nota DO pura, producida por un sintetizador de musical mediante la expresión analítica $A(t) = 0.002 \text{ sen}(2\pi 261t)$.

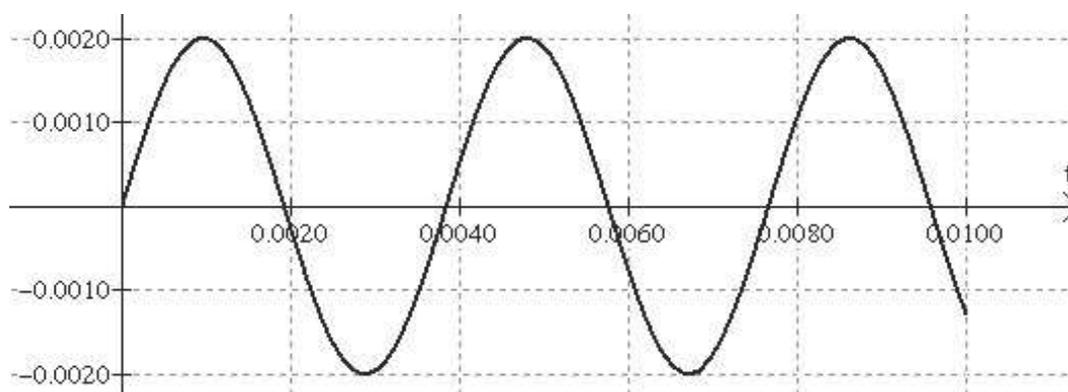


Figura 11.3: Nota DO

La nota DO está asociada a cualquier vibración que tenga una frecuencia de 261 Hz (ciclos por segundo), sin importar cómo se produzca dicha vibración. Por ejemplo, si consiguieras golpear la mesa con una regla a 261 golpes por segundo, conseguirías también un DO. El período será el tiempo que tarda la onda en completar un ciclo, que será en este caso $T = 1/261 = 0.00383$. Del mismo modo, la Figura 11.4 muestra la gráfica de una nota LA pura, producida por el sintetizador mediante la expresión analítica $B(t) = 0.002 \text{ sen}(2\pi 438.9t)$. La nota LA está asociada a cualquier vibración que tenga una frecuencia de 438.9 Hz. El período será en este caso $T = 1/438.9 = 0.00228$.

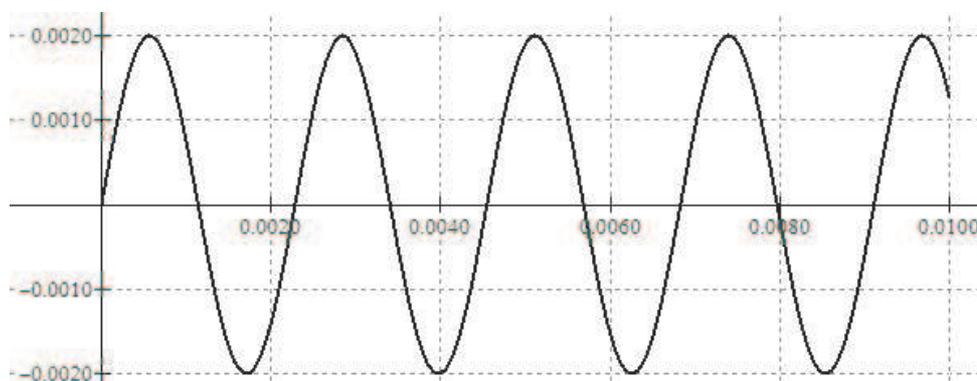


Figura 11.4: Nota LA

Ya tenemos dos definiciones que nos interesan a la hora de estudiar cualquier fenómeno periódico en el tiempo (ver Figura 11.5)

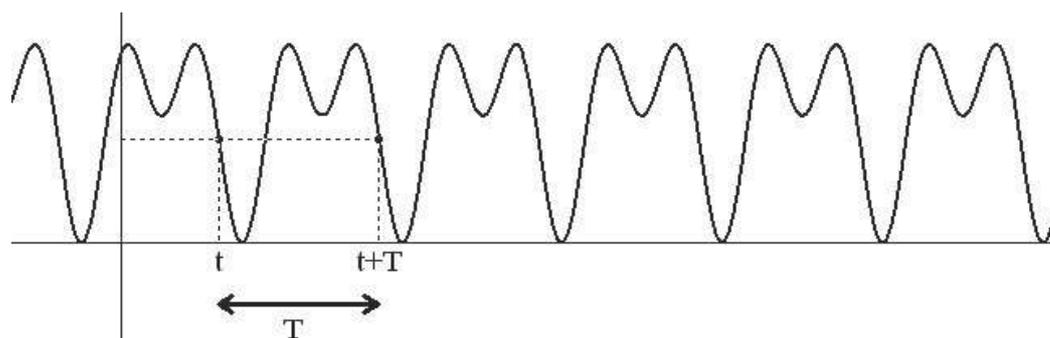


Figura 11.5: Función Periódica

Definición 11.1 Si $E(t)$ es una función periódica, el período de oscilación de $E(t)$ es el menor valor T tal que $E(t + T) = E(t)$.

Definición 11.2 Si $E(t)$ es una función periódica de periodo T , la frecuencia F de $E(t)$ es el número de oscilaciones completas que tienen lugar en una unidad de tiempo.

Así pues, el período T de una señal periódica en el tiempo se mide en las mismas unidades que el tiempo, y su frecuencia F se mide en ciclos por unidad de tiempo. Si la unidad de tiempo es el segundo, la frecuencia F se medirá en ciclos por segundo (Hertzios, Hz). En general, $F=1/T$ y $T=1/F$.

Por ejemplo, la Tierra gira alrededor de su eje con una frecuencia $F=1$ giro/día= $1/24$ giros/hora. Un electrocardiograma humano típico muestra un rango de frecuencias entre 0 y 100 Hz. Supongamos que en un instante determinado se observa en la actividad eléctrica

del corazón de una persona una frecuencia de 25.6 Hz. Eso significa que el período es de $T=1/25.6 = 0.39$ segundos. Por tanto la actividad eléctrica del corazón de esa persona es idéntica cada 0.39 segundos.

Observa ahora las formas de onda que aparecen en las figuras 11.6 y 11.7. Corresponden ambas a una nota DO producida por un sintetizador musical simulando el sonido de un clarinete (Figura 11.6) y un fagot (Figura 11.7).

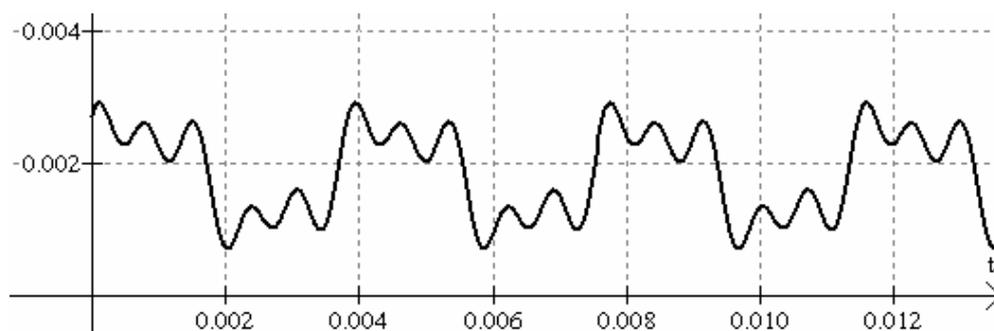


Figura 11.6: DO Clarinete

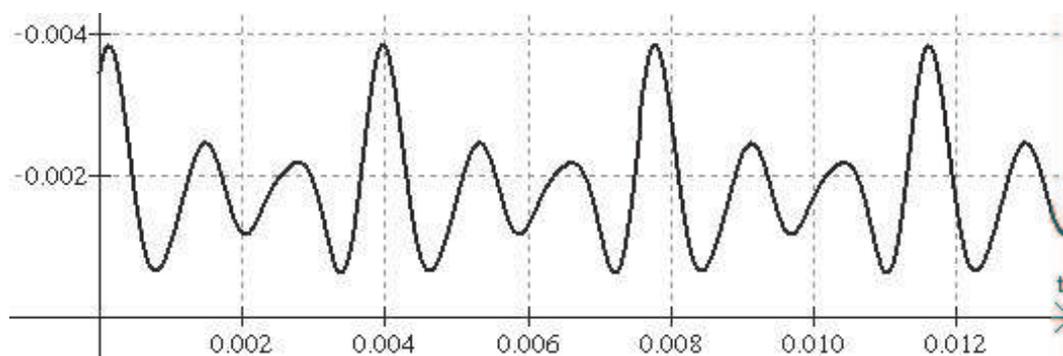


Figura 11.7: DO Fagot

Las expresiones analíticas de ambas funciones que puede utilizar el sintetizador son las siguientes:

Para el DO del clarinete:

$$A(t) = 0.0007(2.6 + 0.5 \cos(2\pi Ft) + \text{sen}(2\pi Ft) + 0.3 \cos(6\pi Ft) + \\ + 0.4 \text{sen}(6\pi Ft) + 0.5 \cos(10\pi Ft) + 0.16 \text{sen}(10\pi Ft)) \quad (11.1)$$

Para el DO del fagot:

$$\begin{aligned} B(t) = & 0.0007(2.6 + 0.32 \cos(2\pi Ft) + 0.04 \sin(2\pi Ft) + \\ & + 0.6 \cos(4\pi Ft) + 0.2 \sin(4\pi Ft) + \cos(6\pi Ft) + \sin(6\pi Ft) + \\ & + 0.2 \cos(8\pi Ft) + 0.3 \sin(8\pi Ft) + 0.2 \cos(10\pi Ft) + 0.1 \sin(10\pi Ft)) \end{aligned} \quad (11.2)$$

Los valores 0.0007 y 2.6 en ambas expresiones son simples términos de escala y traslación respectivamente. El valor F caracteriza a la nota DO, y vale en este caso 261. Pero observemos cómo se han construido ambas funciones $A(t)$ y $B(t)$. La tablas 11.1 y 11.2 muestran las diversas componentes que forman cada una de ellas y la frecuencia de cada componente. Por cierto, cada componente se llama armónico de la función, y F se llama frecuencia fundamental de la señal.

Tabla 11.1

$A(t)$	
Armónico	Frecuencia
$0.000085 \cos(2\pi Ft) + 0.00017 \sin(2\pi Ft)$	F
$0.000051 \cos(6\pi Ft) + 0.000068 \sin(6\pi Ft)$	3F
$0.000085 \cos(10\pi Ft) + 0.0000272 \sin(10\pi Ft)$	5F

Tabla 11.2

$B(t)$	
Armónico	Frecuencia
$0.0000544 \cos(2\pi Ft) + 0.0000068 \sin(2\pi Ft)$	F
$0.000102 \cos(4\pi Ft) + 0.000034 \sin(4\pi Ft)$	2F
$0.00017 \cos(6\pi Ft) + 0.00017 \sin(6\pi Ft)$	3F
$0.000034 \cos(8\pi Ft) + 0.000051 \sin(8\pi Ft)$	4F
$0.000034 \cos(10\pi Ft) + 0.000017 \sin(10\pi Ft)$	5F

Como puede verse, las notas $A(t)$ y $B(t)$ están formadas por componentes que tienen la frecuencia DO pura (igual a F) y además algunos armónicos que tienen una frecuencia múltiplo de F. Las funciones $A(t)$ y $B(t)$ resultan de sumar armónicos que tienen frecuencias iguales a múltiplos de F, pero la frecuencia final resultante también es $F=261$ Hz y el período es $T=1/261 = 0.00383$ segundos, como en cualquier nota DO. Pero observa que cada uno de los armónicos tiene un "peso" en el tono de la nota. Por ejemplo, el cuarto armónico de la nota DO del fagot (última fila de la Tabla 11.2) se obtiene dando un peso de 0.000034 a la función $\cos(8\pi Ft)$ y un peso 0.000051 a $\sin(8\pi Ft)$. En cambio, la nota DO del clarinete ha sido sintetizada sin el cuarto armónico. La diferencia entre la nota DO de un clarinete y la de un fagot es precisamente el peso que se le da a los armónicos, que tienen frecuencias múltiplo de F.

Por ejemplo, una nota LA en un violín o una flauta, tiene una frecuencia fundamental de 438.9 Hz y armónicos con frecuencias de 877.8 Hz, 1316.7 Hz, 1755.6 Hz y así sucesivamente. Aunque un violín y una flauta toquen la misma nota LA, el sonido será distinto porque sus armónicos tienen distinta "fuerza", "peso" o amplitud. Las notas puras, como las que aparecen en las figuras 11.3 y 11.4 son musicalmente muy aburridas, resultan monótonas al oído. Un sintetizador puede conseguir una imitación muy convincente de un violín o una flauta mediante la combinación de ondas sinusoidales puras de las amplitudes adecuadas. Además, pueden utilizarse estas ideas para simular orquestas con una gran variedad de instrumentos. La Figura 11.8 muestra la gráfica de una nota DO sumando las notas DO sintetizadas de un clarinete (ecuación 11.1 y Figura 11.6) y un Fagot (ecuación 11.2 y Figura 11.7). Observa que el nuevo tono sigue siendo un DO porque su frecuencia sigue siendo de 261 Hz, pero lo que distingue al nuevo sonido son los armónicos que lo forman y la amplitud de cada uno

de ellos.

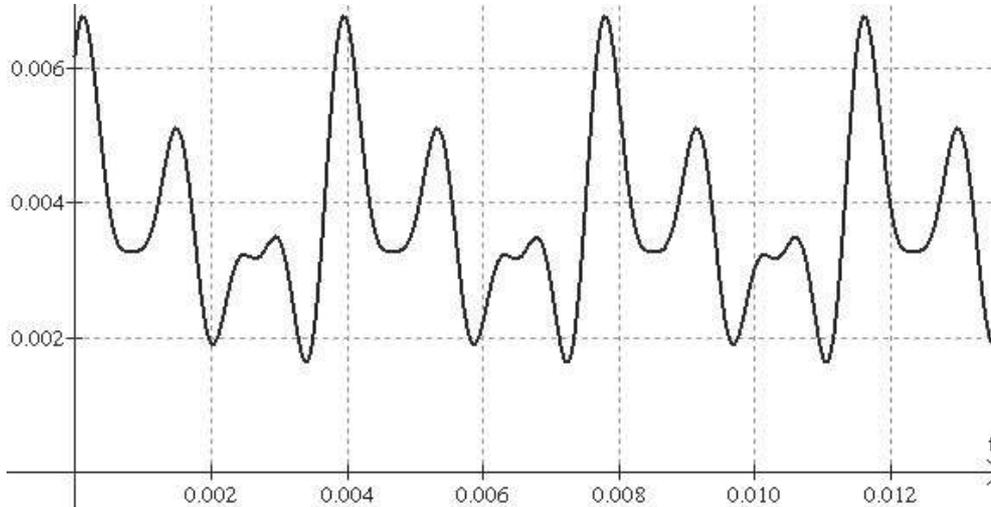


Figura 11.8: Nota DO. Clarinete + Fagot

Veamos con más detalle cómo estudiar el peso o amplitud de cada armónico de una función senoidal cualquiera. Tomemos una función senoidal general $F(t)$:

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(2k\pi Ft) + b_k \cdot \text{sen}(2k\pi Ft))$$

La componente fundamental de $F(t)$ es $H_1(t) = a_1 \cos(2\pi Ft) + b_1 \text{sen}(2\pi Ft)$, que tiene como frecuencia F . El resto de las componentes serán:

$$H_k(t) = a_k \cos(2k\pi Ft) + b_k \text{sen}(2k\pi Ft), \quad k = 2, \dots, n \quad (11.3)$$

Ahora nos interesa encontrar la amplitud de cada uno de los armónicos (11.3). La idea es expresar (11.3) en términos de una función coseno, así:

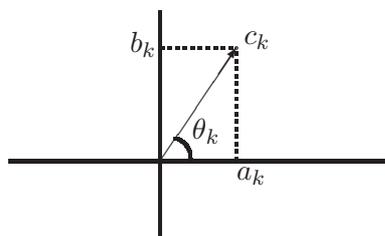
$$H_k(t) = M \cos(2k\pi Ft + \theta) \quad (11.4)$$

tras lo cual, la amplitud de (11.3) será el valor M que hayamos obtenido. Veamos pues cómo transformar (11.3) en la expresión (11.4). Primero observamos que los coeficientes a_k y b_k se pueden interpretar como las partes real e imaginaria del número complejo $c_k = a_k + ib_k$ (ver Figura 11.9):

de donde:

$$\text{sen } \theta_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \quad ; \quad \cos \theta_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$$

$$\theta_k = \text{arc tg } \frac{b_k}{a_k}$$

Figura 11.9: Complejo c_k

Ahora, de la ecuación (11.3) obtenemos

$$\begin{aligned} H_k(t) &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos(2k\pi Ft) + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \operatorname{sen}(2k\pi Ft) \right) = \\ &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} (\cos \theta_k \cos(2k\pi Ft) + \operatorname{sen} \theta_k \operatorname{sen}(2k\pi Ft)) = \\ &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos(2k\pi Ft - \theta_k) \end{aligned}$$

Ésta última igualdad se obtiene de la expresión trigonométrica $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$. Así pues, la amplitud M de la función (11.3) es igual al módulo del número complejo $c_k = a_k + ib_k$. O lo que es lo mismo, el peso o amplitud del armónico k -ésimo es:

$$|c_k| = |a_k + ib_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (11.5)$$

Esto nos da una idea para representar gráficamente $F(t)$ de un modo diferente al usual. Observa la figura 11.10. Para la nota DO del fagot (ecuación 11.2, figura 11.7). Hemos representado en el eje OX los distintos valores de las frecuencias de los armónicos de $F(t)$. Estas frecuencias son F , $2F$, $3F$, $4F$ y $5F$, no hay más armónicos en este caso. En el eje OY, hemos representado la amplitud de cada armónico, calculada mediante la ecuación 11.4. Este diagrama de llama espectro de $F(t)$ y nos da una idea de la amplitud de cada uno de los armónicos de $F(t)$.

Ejercicio 11.1 *Calcula la expresión analítica de nueva nota DO que hemos sintetizado sumando las notas del clarinete y del fagot (Figura 11.7). Calcula y representa su espectro. Si tienes curiosidad, puedes escuchar las notas musicales que hemos estudiado. Puedes emplear uno de los muchos applets que se encuentran en Internet y que permiten escuchar el sonido que resulta de sumar funciones senoidales cuya onda se representan del siguiente modo:*

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(2k\pi Ft) + b_k \cdot \operatorname{sen}(2k\pi Ft))$$

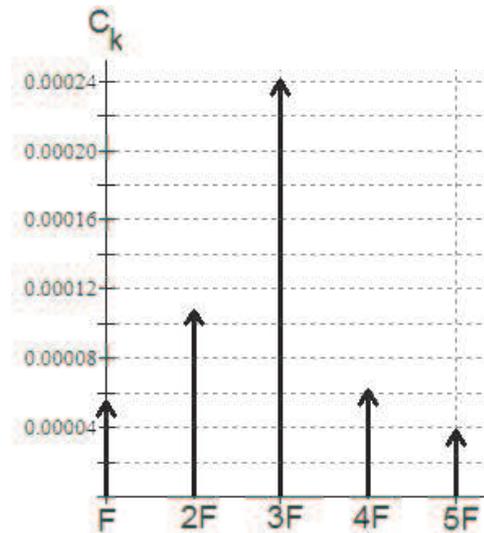


Figura 11.10: Espectro del Fagot

Prueba por ejemplo el applet

<http://www.sociedadelainformacion.com/departfqtobarra/ondas/SONIDO/SONIDO.HTM>.

Modificando el número n de armónicos utilizados y los valores de los coeficientes a_k y b_k , se obtienen sonidos que tienen igual frecuencia (F) pero diferentes tonos porque cambian las amplitudes de los armónicos.

También podemos representar gráficamente cada uno de los armónicos y sus amplitudes. Observa la Figura 11.11, que corresponde a la nota DO del clarinete (ecuación 11.1 y figura 11.5). En el eje OX situamos el espectro de la función (sólo tres frecuencias están presentes, F , $3F$ y $5F$). El eje OY es el eje de la variable t . El eje OZ representa el valor de la onda resultante y el de cada armónico en cada instante t .

El análisis del espectro de señales tiene también utilidad en muchas otras disciplinas científicas. Por ejemplo, las componentes frecuenciales de la actividad eléctrica del corazón (ver figura 11.1) son diferentes en un corazón enfermo y en uno sano, de modo pueden utilizarse para diagnosticar enfermedades cardiovasculares. Y el espectro de la actividad eléctrica del cerebro depende de la actividad cerebral que se esté realizando en ese momento (estar en reposo, resolver un problema, memorizar una lista de números, etc), de modo que el espectro de un encefalograma permite conocer mejor cómo trabaja el cerebro.

Hemos visto cómo la existencia de armónicos en una nota musical puede proporcionar riqueza, de tal modo que la combinación de armónicos permite sintetizar tonos que simulan con gran fidelidad las notas de los instrumentos musicales reales. Sin embargo, en Ingeniería, los armónicos pueden ser fuente de dificultades para al funcionamiento de dispositivos mecánicos o eléctricos.

Observa la Figura 11.12, que representa la forma de onda $A(t)$ que teóricamente debería tener una tensión alterna de 0.015 voltios y $F=50$ Hz ($T=1/F=0.02$ s), es decir, $A(t) = 0.015 \sin(100\pi t)$.

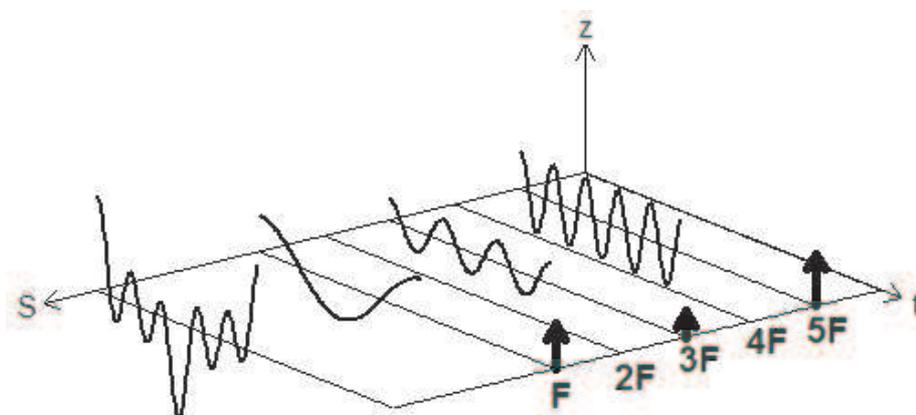


Figura 11.11: Frecuencias del Clarinete en 3D

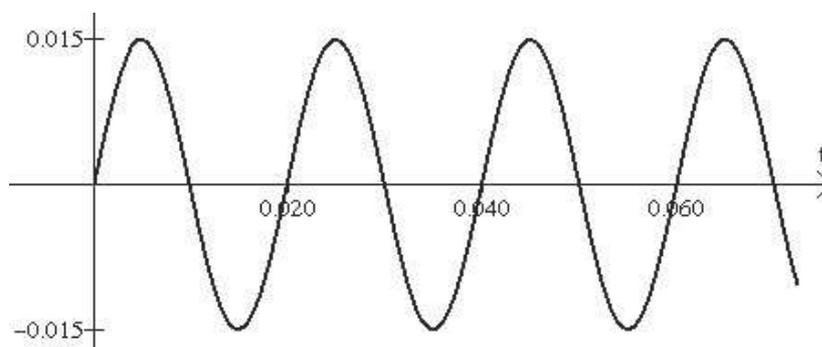


Figura 11.12: Corriente alterna 50 Hz

En realidad, la tensión suministrada por las compañías eléctricas no es perfectamente senoidal, sino que tiene pequeñas o grandes distorsiones. Pero además, cuando se conectan a la red dispositivos como ordenadores o reguladores de velocidad de motores, éstos dispositivos generan armónicos que se transmiten a la red eléctrica. Por ejemplo, las fuentes de alimentación de los PCs suelen inyectar a la red armónicos de orden 3, 5 y 7. Otros armónicos que aparecen de forma significativa son los de orden 11 y 13. Observa la Figura 11.13. Hemos representado la anterior onda de 50 Hz pero "contaminada" con armónicos de orden 6, 10 y 14. El concreto, la onda representada es

$$B(t) = A(t) + 0.00068 \sin(600\pi t) + 0.000835 \sin(1000\pi t) + 0.00235 \sin(1400\pi t).$$

La Figura 11.14 muestra el espectro de $B(t)$. Como puedes ver, la forma resultante está muy distorsionada respecto a la señal pura $A(t)$. Los problemas que ocasionan los armónicos son muy variados. Son causa de sobrecarga en las baterías y condensadores, pérdidas por sobrecalentamiento en cables, transformadores y motores, sobretensiones, pérdida de potencia

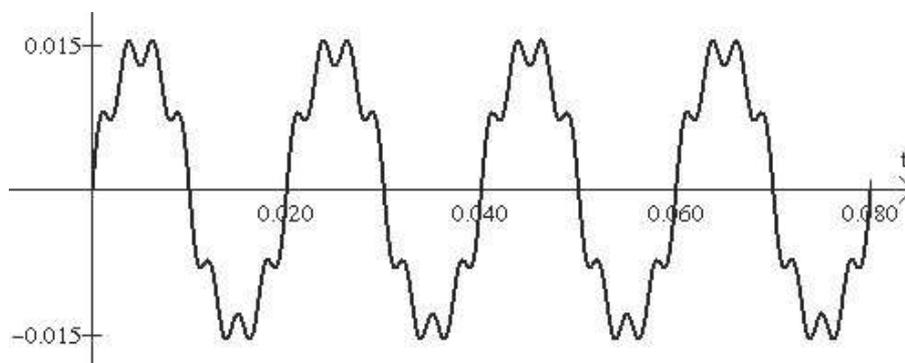


Figura 11.13: Alterna de 50 Hz contaminada

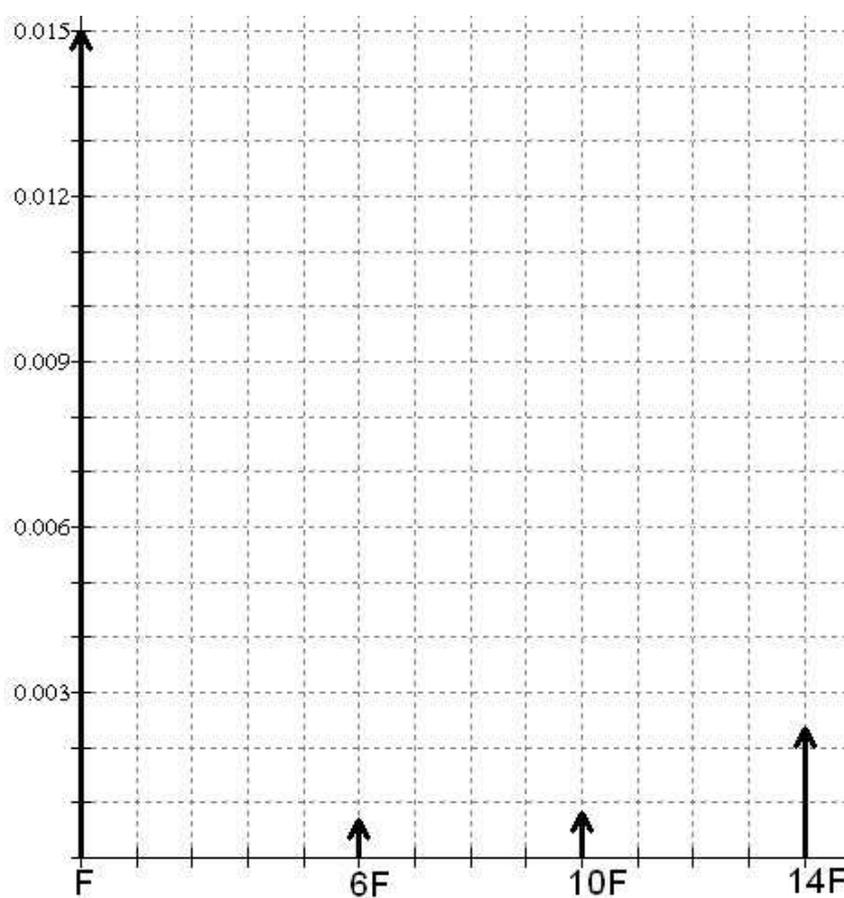


Figura 11.14: Espectro de onda de 50 Hz contaminada

e interferencias. Para resolver el problema de la existencia de armónicos en la red eléctrica, el primer lugar se realiza un análisis del espectro para detectar qué armónicos se encuentran en la red; normalmente se tienen en cuenta los armónicos hasta el orden 31; a continuación se colocan filtros diseñados para atenuar la amplitud de los armónicos de determinada banda de frecuencias consideradas perjudiciales.

Otro ejemplo de efectos negativos de los armónicos se da en los sistemas mecánicos vibrantes. La vibración resultante en un sistema (un coche, por ejemplo) es la suma de las vibraciones provocadas por el funcionamiento de los diversos componentes (en el coche, el motor, engranajes, correas de transmisión, aspas del ventilador, tipo de asfalto por el que circula, etc). Hay vibraciones difíciles de detectar, pero otras se muestran como golpeteos intermitentes que crean una señal repetitiva. Un problema especialmente grave es el causado por la resonancia. Resulta que todo sistema mecánico tiene cierta frecuencia natural de vibración, que depende de sus características estructurales: masa, rigidez, dispositivos de amortiguación, soportes, tuberías, etc. Pues bien, si un agente externo provoca una vibración del sistema mecánico próxima a su frecuencia natural, la amplitud de vibración del sistema se incrementará enormemente, pudiendo causar grandes perjuicios. Cuando una resonancia es detectada mediante un análisis del espectro de la vibración, es necesario identificar qué agente la causa y aislarse. Por ejemplo, si el agente causante de la resonancia es un motor, quizá se solucione variando su velocidad de giro. Aquí de nuevo los armónicos pueden provocar efectos perjudiciales. Por ejemplo, supongamos que el sistema mecánico tiene una frecuencia natural de resonancia F y que un motor provoca al girar una vibración de frecuencia fundamental $F/4$. La frecuencia fundamental de rotación del motor no produce resonancia, pero si la vibración del motor contiene el cuarto armónico (aunque sea de poca amplitud), ésta componente tendrá una frecuencia $4F/4=F$, lo cual ya produce la resonancia del sistema. Ver en la Figura 11.15 un posible espectro de frecuencias de la vibración del motor, donde a pesar de que el armónico de frecuencia F aparece con poca intensidad, al coincidir con la frecuencia de resonancia del sistema mecánico éste entra en resonancia y se producen grandes vibraciones.

La resonancia de los sistemas mecánicos es responsable de otros fenómenos, algunos curiosos y otros catastróficos. La resonancia causa que algunos cantantes sean capaces de romper una copa de cristal con su voz, haciendo que la frecuencia que emiten (o la de un armónico) sea igual a la frecuencia natural de la copa. El efecto es un aumento de la vibración de la copa, hasta su rotura. No se debe a la intensidad de la voz del cantante, sino a su frecuencia. En rango normal de frecuencias de la voz humana está entre 100 y 4000 Hz, pero es una señal muy rica en armónicos, cuya frecuencia puede coincidir con la frecuencia de resonancia de objetos como copas de vidrio. Los ecualizadores de los equipos de música permiten modificar las amplitudes de las diferentes componentes frecuenciales de la señal sonora, a fin de eliminar atenuar (filtrar) o amplificar determinadas bandas. Por ejemplo, aumentando la intensidad en la banda de 16 kHz (16000 Hz), aumenta la presencia de sonidos sutiles, como platillos, triángulos, etc. En cambio, la banda de 1 KHz (1000 Hz) actúa sobre la voz del cantante, que puede quedarse casi inaudible. También el análisis espectral del sonido se utiliza en diversos algoritmos de compresión como el mp3. Este algoritmo se basa en aprovechar las limitaciones del oído humano para captar sonidos fuera de cierta banda de frecuencias, desechando lo que tiende a ser inaudible. El resultado final es una señal de

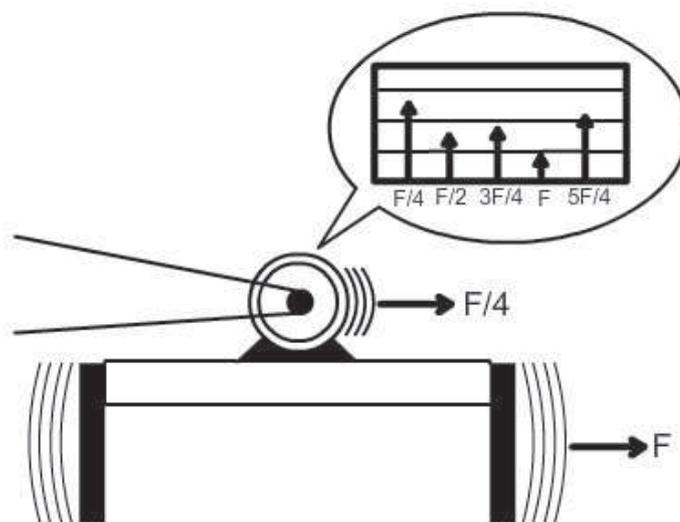


Figura 11.15: Resonancia de motor

audio que tiene muy poca distorsión respecto a la original, pero que ocupa menos espacio en la unidad de almacenamiento.

Un ejemplo clásico del efecto catastrófico provocado por la resonancia es el de la destrucción de puentes colgantes, como ocurrió con el puente de Tacoma (EEUU) en noviembre de 1940. El puente estaba diseñado para soportar vientos de más de 200 Km/h, pero una suave brisa de poco más de 60 Km/h lo hizo vibrar hasta entrar en resonancia. En Internet puedes encontrar imágenes realmente espectaculares de las enormes oscilaciones del puente de Tacoma poco antes de su caída.

También se puede producir un resultado desastroso cuando la frecuencia natural de un edificio coincide con la frecuencia de un armónico contenido en una señal sísmica. Las señales sísmicas de terremotos tienen un rango típico de entre 0.01 y 15 Hz, y los edificios situados en zonas de riesgo se calculan de modo que su frecuencia natural esté fuera de este rango y de el de sus armónicos.

Veamos un último ejemplo de los efectos de la resonancia. Casi todos los conductores han podido apreciar un curioso tipo de vibración en su vehículo. A cierta velocidad, por ejemplo a 110 Km/h, aparece una vibración que se hace muy presente en el volante, y ésta desaparece a una velocidad mayor, por ejemplo a 120 km/h. Casi todos los coches seminuevos o viejos comparten la aparición de vibraciones para un rango concreto de velocidades. Pues bien, estas vibraciones también pueden ser debidas a la resonancia. A cierta velocidad, la frecuencia de rotación de las ruedas (o un múltiplo de esta frecuencia) se iguala con la frecuencia de vibración natural de los amortiguadores, que transmiten la vibración hasta el volante. El problema normalmente se resuelve colocando unos pequeños contrapesos en las llantas de las ruedas para equilibrarlas, modificando de esta manera la frecuencia de resonancia del sistema para que no se alcance a ninguna velocidad a la que el vehículo pueda circular.

Todo lo que hemos explicado hasta el momento nos lleva a comprender la importancia del análisis armónico de una señal periódica. Sin embargo, se nos plantean diversos problemas a los que habrá que encontrar solución:

1. Si la señal periódica $F(t)$ es de la forma

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(2k\pi Ft) + b_k \cdot \sin(2k\pi Ft))$$

entonces es muy sencillo analizar su espectro. La amplitud ($|c_k|$) del armónico k -ésimo es:

$$|c_k| = |a_k + ib_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

Ahora bien, ¿qué ocurre si la señal es periódica pero no senoidal? En Ingeniería se utilizan pulsos rectangulares, en diente de sierra, etc como los que aparecen en la Figura 11.16, que no son senoidales. ¿Tendrán armónicos las señales periódicas arbitrarias? Si es así, ¿cómo se calcularán sus coeficientes?

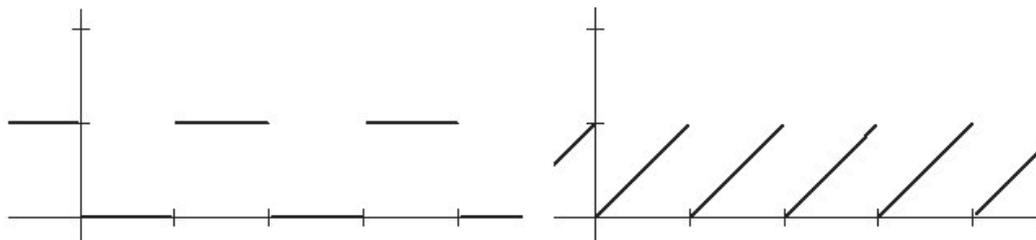


Figura 11.16: Ejemplos de funciones periódicas

2. ¿Y si no tenemos la expresión analítica de $F(t)$, sino sólo una muestra de valores? Esto es muy usual en Ingeniería, porque se mide una colección de valores de la magnitud que se desea estudiar (tensión o intensidad en una red eléctrica, fuerza, potencia desarrollada por un motor, desplazamiento de un resorte, etc), a fin de almacenarlos en un ordenador y aplicarles algún tratamiento. ¿Cómo se calculará el espectro de la señal en este caso?

A lo largo de los siguientes apartados iremos dando respuesta a estos problemas que se nos han planteado.

11.2. Desarrollo de una función periódica en serie de Fourier

11.2.1. La serie de Fourier de una función $F(t)$

El hecho de que una señal se pueda descomponer como suma de otras señales periódicas más sencillas es un hecho conocido por la Ciencia desde hace mucho tiempo. Ya en 1671,

Isaac Newton demostró que la luz solar está formada por la suma de siete colores diferentes, que se hacen visibles al hacer pasar la luz blanca por un prisma de vidrio (Figura 11.17). El propio Newton llamó espectro a estas bandas de colores. Además, si se hace pasar el haz de siete colores por un prisma invertido, los colores vuelven a mezclarse, dando lugar a la luz blanca original.

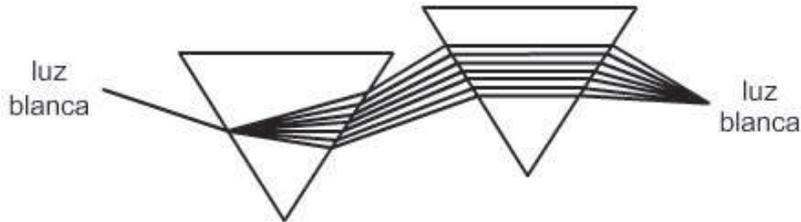


Figura 11.17: Prisma

Así pues, el primer prisma realiza la descomposición de la señal (análisis) y el segundo la mezcla de las partes para producir la señal original (síntesis). Si impedimos que uno de los colores llegue al segundo prisma (por ejemplo, ocultándolo con un trocito de cartulina), la nueva luz resultante ya no será blanca. Habremos sintetizado una nueva luz. Eso es exactamente lo que hicimos en el apartado anterior, cuando hablamos de señales sonoras: modificamos los diversos armónicos que constituían el sonido, dando lugar a nuevos sonidos. Por cierto, una diferencia importante que existe entre las señales sonoras y las luminosas es la frecuencia. Las frecuencias de las ondas de luz son muchísimo mayores. Por ejemplo, la longitud de onda (a la que en matemáticas se llama período) de la luz visible se encuentra entre 400 y 700 nanómetros (un nanómetro es igual a 10^{-9} metros).

Al plantearnos cómo descomponer una señal periódica cualquiera $F(t)$ como una suma de funciones senoidales, enseguida podemos descartar que esta suma sea en general finita. Funciones periódicas $F(t)$ como las que aparecen en la Figura 11.16 no son trigonométricas, de modo que no va a ser posible escribirlas de la forma:

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(2k\pi Ft) + b_k \cdot \text{sen}(2k\pi Ft))$$

La única posibilidad que puede existir es que la suma sea infinita. No es la primera vez que escribimos una función $F(t)$ mediante una suma infinita de funciones. Por ejemplo, no hay forma de escribir la función $F(t) = e^t$ como una suma finita de potencias $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$, pero sí se puede escribir como suma infinita de estas potencias. Es la serie de McLaurin:

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

Pero ahora buscamos el modo de escribir una función $F(t)$ periódica de período T (o frecuencia $F=1/T$) como suma de funciones trigonométricas de la forma $H_k(t) = a_k \cos(2k\pi Ft) +$

$b_k \operatorname{sen}(2k\pi Ft)$, es decir:

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(2k\pi Ft) + b_k \cdot \operatorname{sen}(2k\pi Ft))$$

Esta serie se llama serie de Fourier de $F(t)$.

11.2.2. Cálculo de los coeficientes a_k , b_k de la serie de Fourier

Vamos a utilizar las siguientes igualdades:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2m\pi t}{T} \cdot \cos \frac{2n\pi t}{T} dt = 0 \quad (11.6)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2m\pi t}{T} \cdot \operatorname{sen} \frac{2n\pi t}{T} dt = 0 \quad (11.7)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen} \frac{2m\pi t}{T} \cdot \operatorname{sen} \frac{2n\pi t}{T} dt = 0 \quad (11.8)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \frac{2m\pi t}{T} dt = T/2 \quad (11.9)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}^2 \frac{2m\pi t}{T} dt = T/2 \quad (11.10)$$

Vamos a comenzar tomando una función $F(t)$ formada por un solo sumando de la serie.

$$F(t) = a_0 + a_k \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} \quad (11.11)$$

Para determinar el coeficiente a_0 de ecuación 11.11, integramos ambos términos en el intervalo $[-T/2, T/2]$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{T}{2k\pi} \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0 \quad (11.12)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{-T}{2k\pi} \cos \frac{2k\pi t}{T} \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0 \quad (11.13)$$

nos queda

$$\int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt = a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt = a_0 \cdot T$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt$$

Ahora, para obtener el término a_k multiplicamos la ecuación (11.11) por $\cos \frac{2k\pi t}{T}$, integramos y utilizamos las igualdades (11.7) y (11.9):

$$F(t) \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} = a_0 \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} + a_k \cdot \cos^2 \frac{2k\pi t}{T} + b_k \cdot \sen \frac{2k\pi t}{T} \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = a_0 \cdot 0 + a_k \cdot \frac{T}{2} + b_k \cdot 0 = a_k \cdot \frac{T}{2}$$

de donde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} dt$$

Finalmente, para obtener el término b_k multiplicamos la ecuación (11.11) por $\sen \frac{2k\pi t}{T}$, integramos y utilizamos las igualdades (11.7) y (11.10):

$$F(t) \cdot \sen \frac{2k\pi t}{T} = a_0 \cdot \sen \frac{2k\pi t}{T} + a_k \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} \cdot \sen \frac{2k\pi t}{T} + b_k \cdot \sen^2 \frac{2k\pi t}{T}$$

$$F(t) \cdot \sen \frac{2k\pi t}{T} = a_0 \cdot 0 + a_k \cdot 0 + b_k \cdot \frac{T}{2} = b_k \cdot \frac{T}{2}$$

y entonces

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cdot \sen \frac{2k\pi t}{T} dt$$

Ahora vamos a considerar la serie de Fourier completa:

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \cdot \sen \frac{2k\pi t}{T} \right)$$

Procediendo del mismo modo, se llega a idénticas expresiones para a_k y b_k . Por ejemplo, multiplicando por $\cos \frac{2n\pi t}{T}$ e integrando:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cdot \cos \frac{2n\pi t}{T} dt &= a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2n\pi t}{T} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2k\pi t}{T} \cdot \cos \frac{2n\pi t}{T} dt + \right. \\ &\left. + b_k \int_{-T/2}^{T/2} \sen \frac{2k\pi t}{T} \cdot \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \right) \end{aligned} \quad (11.14)$$

Con lo cual, utilizando las igualdades (11.6), (11.7) y (11.9):

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cdot \cos \frac{2n\pi t}{T} dt$$

Así se obtiene también:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cdot \operatorname{sen} \frac{2n\pi t}{T} dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt$$

Ejercicio 11.2 Demuestra que para calcular los coeficientes de Fourier a_0 , a_k y b_k se puede evaluar cada integral en cualquier intervalo de la forma $[c, c + T]$, donde c es un número real. En consecuencia, se tienen las siguientes expresiones generales para el cálculo de los coeficientes de Fourier de $F(t)$:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} F(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} F(t) \cdot \cos \frac{2n\pi t}{T} dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} F(t) \cdot \operatorname{sen} \frac{2n\pi t}{T} dt$$

11.2.3. Convergencia de la serie de Fourier

En el proceso que hemos seguido para deducir el valor de los coeficientes a_k , b_k de la serie de Fourier, hay una cuestión importante que nos ha pasado desapercibida. Observa que para obtener la igualdad (11.14) hemos supuesto que la integral de una suma infinita de funciones es igual a la suma infinita de las integrales. Es decir, hemos supuesto que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} \right) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left(a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} \right) dt$$

Ya sabemos que la suma finita de funciones integrables es una función también integrable y su integral se obtiene sumando las integrales de todas ellas. Pero, ¿es cierta esta propiedad también si se trata de una suma infinita de funciones? No siempre. La posibilidad de integrar y derivar término a término una serie infinita de funciones está relacionada con el concepto de convergencia uniforme de series de funciones, que es un concepto avanzado que no vamos a tratar aquí. En cambio, si nos vamos a preocupar de otra pregunta que puede sernos más interesante: si se calculan los coeficientes a_0 , a_k , b_k $k = 1, 2, \dots$ de la serie de Fourier de una función $F(t)$ utilizando las expresiones que hemos obtenido en el apartado anterior, ¿es seguro que la serie de Fourier converge hacia $F(t)$ para cada valor de t ? Es decir, se trata de conocer si es cierta la siguiente igualdad para cada valor de t :

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} \right)$$

Enseguida vamos a enunciar un teorema importante sobre la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función $F(t)$, que puede aplicarse a la mayoría de las funciones que aparecen en Ingeniería. Pero antes necesitamos conocer el concepto de función monótona a tramos.

Definición 11.3 Una función $F(t)$ es monótona a tramos en un intervalo (a, b) , si es posible encontrar un número finito de subintervalos

$$(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_n, b) \quad (a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < b)$$

de modo que la función $F(t)$ sea creciente, decreciente o constante en cada subintervalo.

Por ejemplo, la función cuya gráfica se representa en la Figura 11.18 es monótona a tramos en el intervalo $(0, 0.02)$ porque en los subintervalos $(0, 0.005)$, $(0.005, 0.01)$ y $(0.01, 0.02)$ $F(t)$ es creciente, constante y decreciente respectivamente.

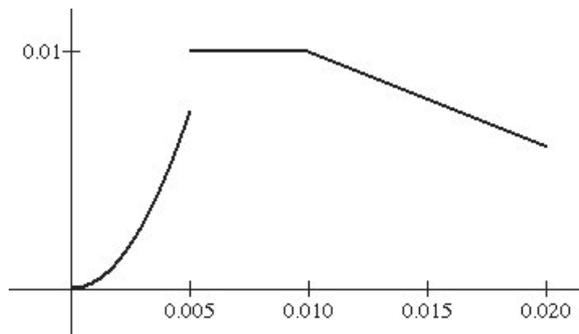


Figura 11.18: Función monótona a tramos

En cambio, la Figura 11.19 muestra la gráfica de la función $F(t) = t \text{ sen}(1/t)$, que tiene infinitos máximos y mínimos en el intervalo $(0, 0.02)$. Por tanto, no es monótona a tramos en dicho intervalo.

Ya podemos enunciar el teorema de convergencia de la serie de Fourier.

Teorema 11.1 (Condiciones de Dirichlet). Si la función $F(t)$ periódica de periodo T es acotada y monótona a tramos en el intervalo $(-T/2, T/2)$, entonces la serie de Fourier de $F(t)$

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \cdot \text{sen} \frac{2k\pi t}{T} \right)$$

es convergente para todo t . El valor hacia el que converge $S(t)$ se obtiene del siguiente modo:

- Si t_0 es un punto en el que $F(t)$ es continua, entonces $S(t_0) = F(t_0)$.

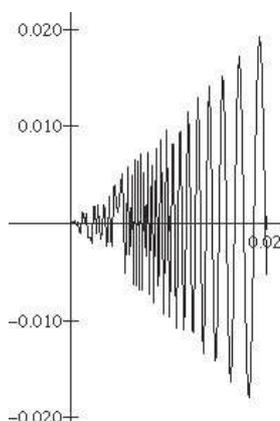


Figura 11.19: Función no monótona a tramos

- Si t_0 es un punto en el que $F(t)$ no es continua, entonces $S(t_0)$ converge hacia la media aritmética de los límites laterales de $F(t)$ en el punto t_0 , es decir:

$$S(t_0) = \frac{F(t_0^+) + F(t_0^-)}{2}$$

11.2.4. Coeficientes de Fourier de funciones pares e impares

Como hemos visto, los coeficientes de Fourier de la función $F(t)$ se obtienen del siguiente modo:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cdot \sen \frac{2k\pi t}{T} dt$$

En las tres expresiones se calcula una integral en el intervalo simétrico $[-T/2, T/2]$. Pero en general, la integral de una cierta función $G(x)$ definida en un intervalo $[-L, L]$ es más sencilla de evaluar si $G(x)$ es una función par o impar. En concreto,

Ver Figura 11.20-a. Si $G(x)$ es una función par, es decir, si $G(-x) = G(x)$ en $[-L, L]$, entonces:

$$\int_{-L}^L G(x) dx = 2 \int_0^L G(x) dx$$

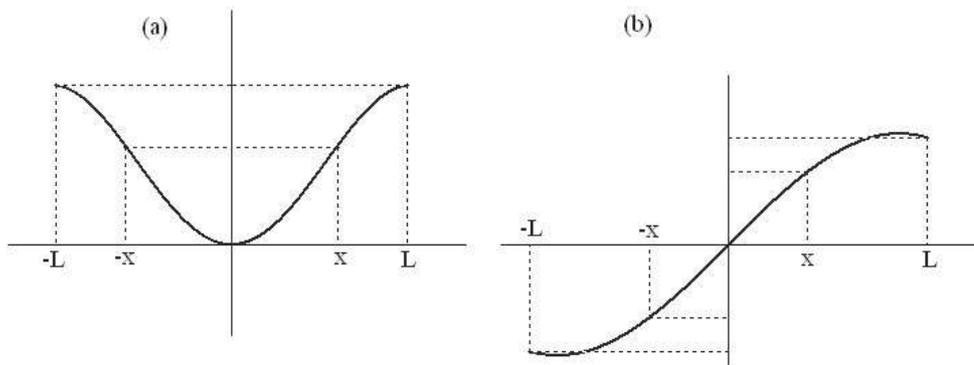


Figura 11.20: Función par y función impar

Ver Figura 11.20-b. Si $G(x)$ es una función impar, es decir, si $G(-x) = -G(x)$ en $[-L, L]$, entonces:

$$\int_{-L}^L G(x) dx = 0$$

Ejercicio 11.3 Justifica las siguientes propiedades:

1. Si $F(t)$ es una función par en $[-T/2, T/2]$, entonces :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} F(t) dt$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} F(t) \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} dt \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

2. Si $F(t)$ es una función impar en $[-T/2, T/2]$, entonces :

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} F(t) \cdot \text{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Ejemplo 11.1 Calcular la serie de Fourier de la función $F(t)$ periódica de periodo 2π definida más abajo, estudiar la convergencia de dicha serie y analizar el espectro de frecuencias de $F(t)$.

$$F(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq t \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases}$$

La Figura 11.21 representa la gráfica de $F(t)$.

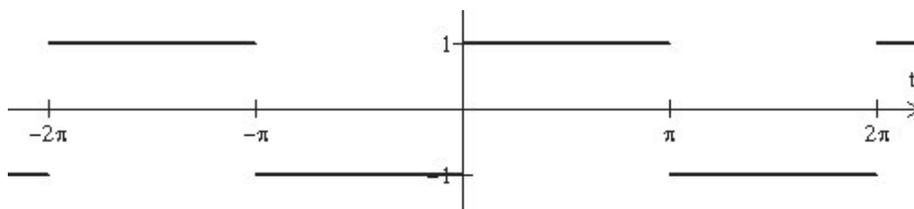


Figura 11.21: Ejemplo 11.1

$T = 2\pi$ y como $F(t)$ es impar, $a_k = 0 \quad \forall k$

$$b_k = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi \text{sen } kt \, dt = \frac{-2 \cos kt}{\pi k} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{k\pi} (\cos k\pi - 1) = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos k\pi) =$$

$$= \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

por tanto

$$S(t) = \frac{4}{\pi} \left(\text{sen } t + \frac{\text{sen } 3t}{3} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(2k+1)t}{2k+1}$$

Respecto a la convergencia de $S(t)$, como $F(t)$ cumple las condiciones de Dirichlet se tiene:

- En los intervalos $(-\pi, 0)$ y $(0, \pi)$ $F(t)$ es continua, por tanto $S(t) = F(t)$.
- En el punto $t = -\pi$, $S(-\pi) = \frac{(1-1)}{2} = 0$
- En el punto $t = 0$, $S(0) = \frac{(-1+1)}{2} = 0$
- En el punto $t = \pi$, $S(\pi) = \frac{(1-1)}{2} = 0$

En cualquier otro punto t que no se encuentre en el intervalo $[-\pi, \pi)$ es válido el mismo razonamiento, ya que la función es periódica. Observa la Figura 11.22. Hemos representado las gráficas de algunas sumas parciales de la serie de Fourier de $F(t)$, esto es,

$$S_1(t) = \frac{4}{\pi} \text{sen } t, \quad S_3(t) = \frac{4}{\pi} \left(\text{sen } t + \frac{\text{sen } 3t}{3} \right)$$

$$S_5(t) = \frac{4}{\pi} \left(\text{sen } t + \frac{\text{sen } 3t}{3} + \frac{\text{sen } 5t}{5} \right) \quad \text{etc}$$

Observa cómo a medida que se toman más sumandos, la suma parcial $S_k(t)$ de la serie de Fourier está cada vez más próxima a $F(t)$ en los puntos de continuidad. Observa también el modo en que las sumas parciales "salvan" las discontinuidades de $F(t)$.

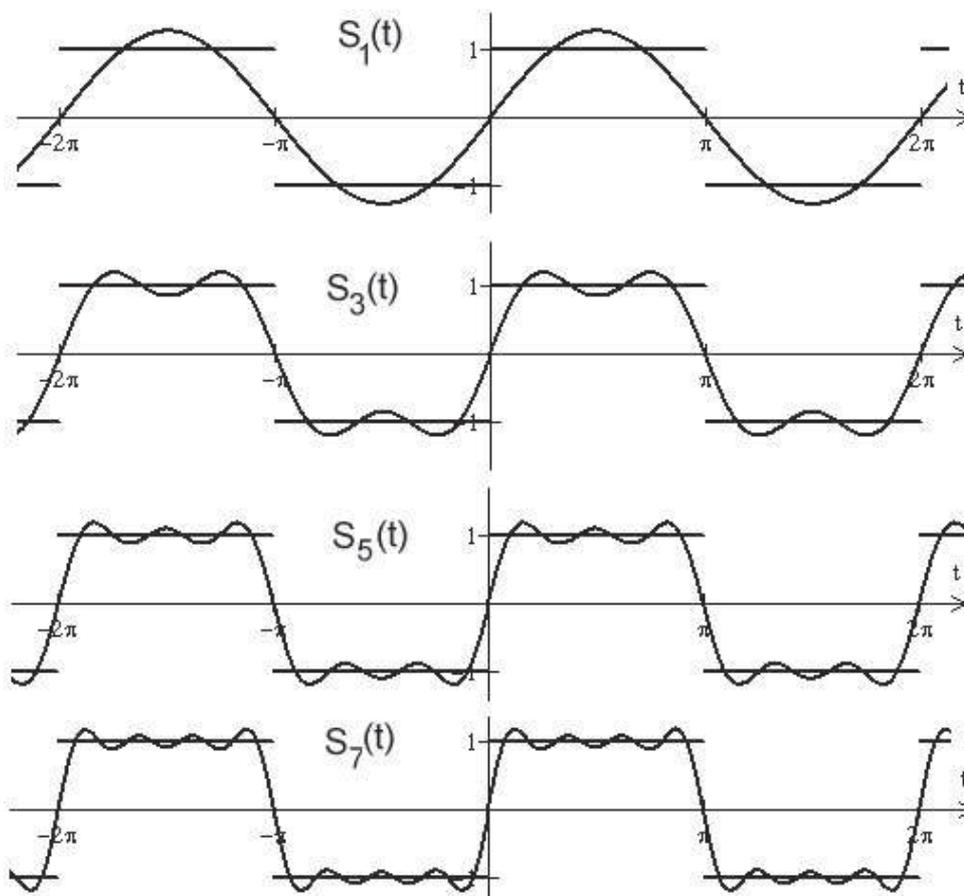


Figura 11.22: Sucesivas aproximaciones del ejemplo 11.1

Respecto al análisis del espectro de $F(t)$, se tiene

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{4}{k\pi}$$

Los armónicos pares no existen en $F(t)$, y en cuanto a los impares, sus amplitudes decrecen a medida que aumenta el orden k . La Figura 11.23 muestra las once primeras líneas espectrales de $F(t)$.

Ejercicio 11.4 Calcular la serie de Fourier de las funciones cuyas gráficas se representan en la Figura 11.16. Analizar la convergencia de dichas series y representar el espectro de frecuencias de las funciones.

Ejercicio 11.5 El mismo planteamiento que el ejercicio anterior, para las siguientes funciones periódicas de periodo 2π .

1. $F(t) = t$ para $t \in [-\pi, \pi]$

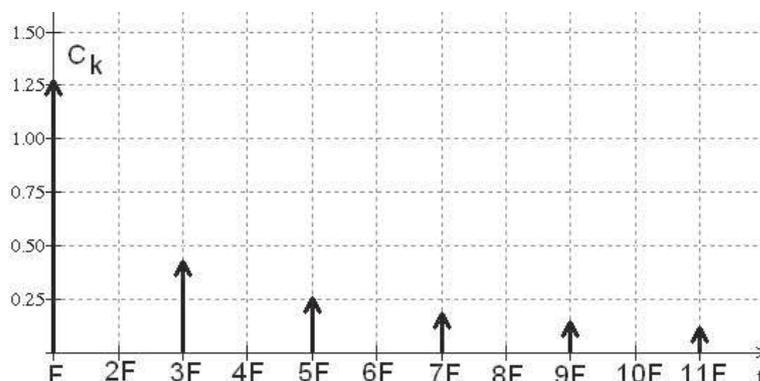


Figura 11.23: Espectro del ejemplo 11.1

$$2. \quad G(t) = \begin{cases} -t & \text{si } t \in [-\pi, 0] \\ t & \text{si } t \in [0, \pi] \end{cases}$$

11.2.5. Interpretación de los coeficientes de la serie de Fourier

Vamos a tomar de nuevo los coeficientes de la serie de Fourier:

$$1. - \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt$$

$$2. - \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} dt$$

$$3. - \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cdot \text{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt$$

En las tres expresiones se evalúa la integral de una función en el intervalo $[-T/2, T/2]$ y se divide esta integral entre T . Por tanto, se está calculando el valor medio de la función en ese intervalo (o en cualquier otro intervalo de longitud igual al período, por ejemplo el intervalo $[0, T]$). Es decir:

1. El coeficiente a_0 de la serie de Fourier de $F(t)$ es igual al valor medio de $F(t)$ en cualquier intervalo de longitud igual al período.
2. El coeficiente a_k de la serie de Fourier de $F(t)$ es igual al doble del valor medio de la función $F(t) \cos(2k\pi t/T)$ en cualquier intervalo de longitud igual al período.
3. El coeficiente b_k de la serie de Fourier de $F(t)$ es igual al doble del valor medio de la función $F(t) \text{sen}(2k\pi t/T)$ en cualquier intervalo de longitud igual al período.

Sin embargo, nos puede resultar intrigante el significado de las funciones $F(t) \cos(2k\pi t/T)$ y $F(t) \text{sen}(2k\pi t/T)$ para las que se calcula el valor medio a fin de obtener a_k

y b_k . Veamos qué significan ambas funciones. Observa la Figura 11.24. Hemos representado en (a) la función $F(t) = \cos(t)$, que es periódica de periodo $T = 2\pi$. En (b1), (c1), (d1) y (e1) se muestran respectivamente las funciones $\text{sen}(2k\pi t/T) = \text{sen}(kt)$ para $k=2, 5, 10$ y 20 . En (b2), (c2), (d2) y (e2) se muestran respectivamente las funciones $F(t)\text{sen}(2k\pi t/T) = F(t)\text{sen}(kt)$. Sobre éstas últimas gráficas, hemos representado también, a trazo fino, la propia función $F(t)$. Como puede verse, la amplitud de $F(t)\text{sen}(2k\pi t/T)$ viene dada por la amplitud de $F(t)$. Observa cómo $F(t)\text{sen}(2k\pi t/T)$ "envuelve" a $F(t)$. Decimos que $F(t)$ modula en amplitud a la función $\text{sen}(2k\pi t/T)$ o que $\text{sen}(2k\pi t/T)$ es la señal portadora y $F(t)$ la señal moduladora en amplitud. Esta es una forma de decir que la función $F(t)\text{sen}(2k\pi t/T)$, que resulta de modular en amplitud $\text{sen}(2k\pi t/T)$ mediante $F(t)$, contiene la información de la función moduladora.

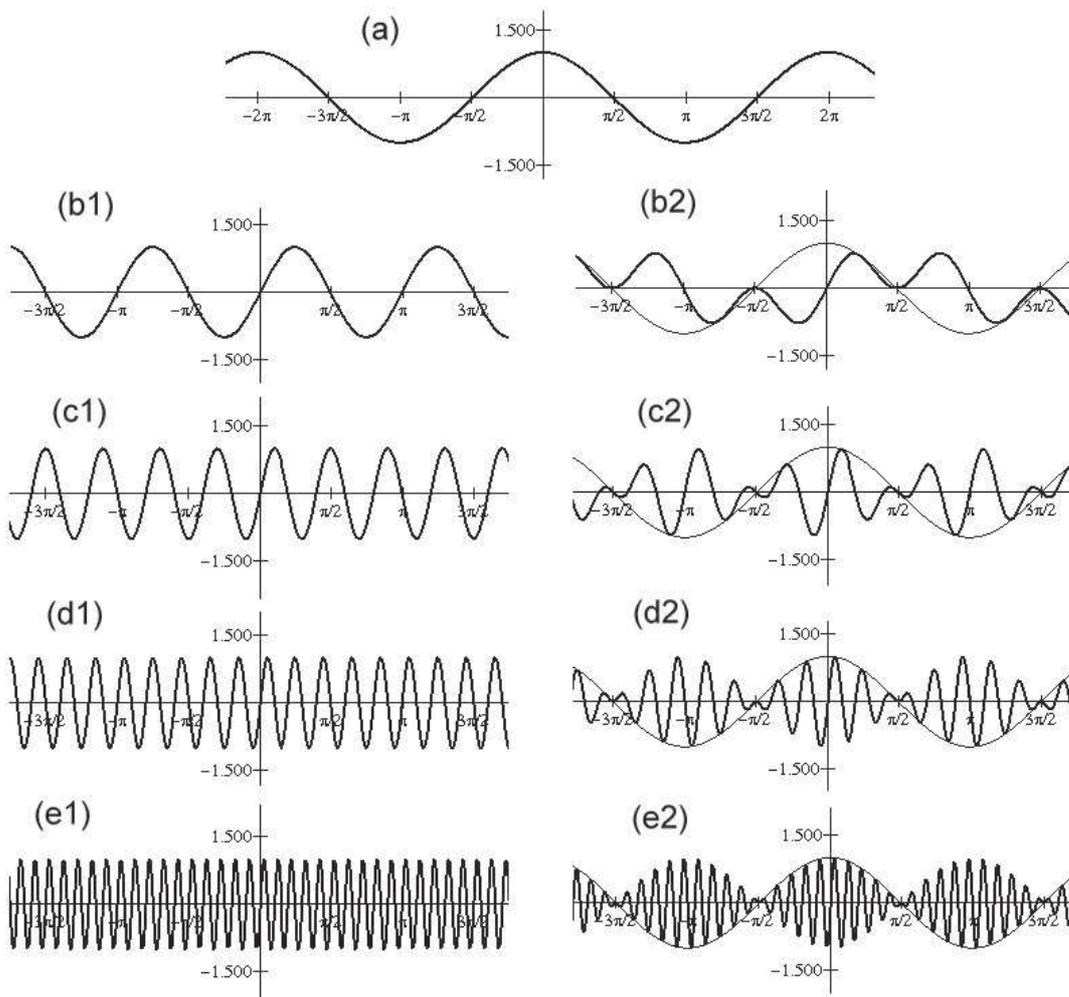


Figura 11.24: Modulación

¿Y qué interés puede tener la modulación de amplitud de funciones? Pues resulta que éste es el principio mediante el que funciona el sistema de Amplitud Modulada (AM) de la radiodifusión. Observa la Figura 11.25. Se tiene la señal de audio $F(t)$ que se desea transmitir a través de la emisora. La señal $F(t)$ es audible, y por lo tanto de baja frecuencia. $F(t)$ podría ser el fragmento del tema Marble Halls de la Figura 11.2. Esta señal $F(t)$ no es una señal de radiofrecuencia, de modo que no puede transmitirse directamente vía ondas de radio. Pues bien, el invento consiste en hacer que la señal $F(t)$ que deseamos transmitir "cabalque" encima de una señal portadora de radiofrecuencia $R(t)$. Por ejemplo, si la emisora de radiodifusión emite en AM con una frecuencia $F=600$ KHz, la señal portadora puede ser $R(t) = \sin(2\pi Ft)$. Ahora, se modula $R(t)$ mediante $F(t)$, obteniendo la señal $M(t) = F(t)R(t) = F(t)\sin(2\pi Ft)$. La señal de radiofrecuencia $M(t)$ ya se puede transmitir por radiodifusión. Cuando se sintoniza en el dial del receptor de radio la frecuencia de 600 KHz, se filtra la señal de alta frecuencia, quedando sólo la señal audible, que es la que se escucha a través del altavoz del receptor. En la práctica, la señal llega al receptor con interferencias y ruido, de modo que su espectro contiene un amplio rango de frecuencias. Además, tampoco es posible filtrarla completamente para extraer la señal pura de audio. Todo ello hace que a veces la señal sea difícilmente audible.

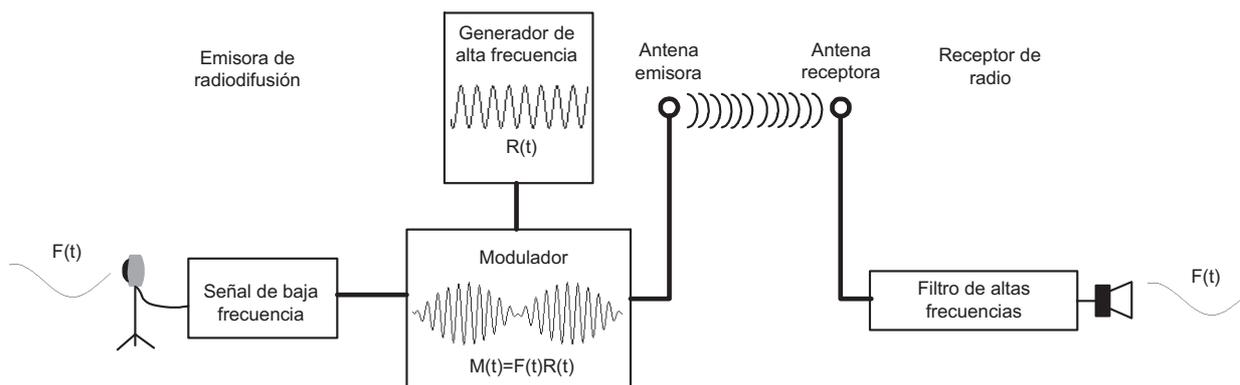


Figura 11.25: Emisora de radio

Pero volvamos a la cuestión que estábamos estudiando en este apartado: se trataba de interpretar el significado de los coeficientes de la serie de Fourier a_k y b_k . Según lo que acabamos de ver, para $k > 0$, los coeficientes se pueden interpretar así:

- El coeficiente a_k de la serie de Fourier de la función $F(t)$ periódica de periodo T es igual al doble del valor medio, calculado en cualquier intervalo de longitud T , de la función que resulta de modular en amplitud mediante la función $F(t)$ la función $\cos(2k\pi t/T)$, que es periódica de periodo T/k .
- El coeficiente b_k de la serie de Fourier de la función $F(t)$ periódica de periodo T es igual al doble del valor medio, calculado en cualquier intervalo de longitud T , de la función que resulta de modular en amplitud mediante la función $F(t)$ la función $\sin(2k\pi t/T)$, que es periódica de periodo T/k .

11.2.6. Aspectos computacionales

Muestreo de señales

En la práctica, cuando debe realizarse el análisis espectral de una señal $F(t)$, lo usual es no disponer de la expresión analítica de $F(t)$ sino de una muestra de valores de $F(t)$. Supongamos que deseamos analizar la señal $F(t)$ en el intervalo $[0, T]$. Para ello tomaremos N instantes uniformemente espaciados en dicho intervalo y calcularemos el valor de la señal en cada uno de ellos. Es decir:

$$t_r = \frac{rT}{N}, \quad y_r = F(t_r), \quad r = 0, \dots, N-1$$

Observa la Figura 11.26. Hemos muestreado $N=9$ valores de una señal $F(t)$ en el intervalo $[0, 0.6]$. El periodo de muestreo ha sido por tanto $T_S = 0.6/9 = 0.06667$. O lo que es lo mismo, la frecuencia de muestreo ha sido de $F_S = 1/T_S = 15$ muestras/segundo. En la Tabla 11.3 hemos colocado los instantes en los que se ha muestreado la señal (t_r) y el valor medido ($F(t_r)$) para $r = 0, \dots, 8$.

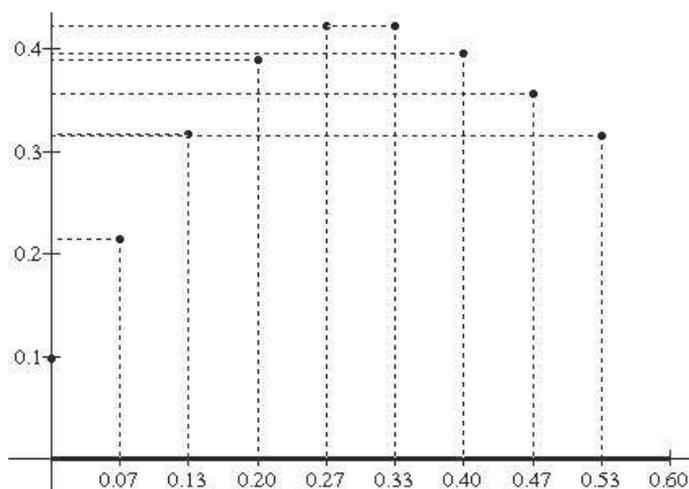


Figura 11.26: Muestreo

Tabla 11.3

r	t_r	$F(tr)$
0	0.00000	0.09728
1	0.06667	0.21530
2	0.13333	0.31781
3	0.20000	0.38911
4	0.26667	0.42296
5	0.33333	0.42201
6	0.40000	0.39548
7	0.46667	0.35580
8	0.53333	0.31512

Ejercicio 11.6 Supongamos que deseamos muestrear N valores uniformemente espaciados de la señal $F(t)$ en el intervalo $[a, b]$. Calcular el valor de la frecuencia de muestreo necesaria (F_S) y el del período de muestreo ($T_S = 1/F_S$). Obtener la expresión con la que calcular los puntos t_r donde muestrear. Utilizar esta expresión para muestrear 15 valores de la función $F(t) = 2 \operatorname{sen}(2\pi t)$ en el intervalo $[0.25, 0.25 + T]$.

Ya que normalmente no disponemos de la expresión analítica de la señal continua $F(t)$ y tampoco es posible almacenar todos los valores de $F(t)$, el muestreo de señales continuas es una operación necesaria para estudiar el comportamiento de la señal. Ahora bien, ¿qué frecuencia de muestreo F_S habrá que emplear? ¿Cómo podemos estar seguros de que mediante la muestra de $F(t)$ seremos capaces de conocer las componentes frecuenciales de $F(t)$? Pues bien, el Teorema de muestreo nos indica qué frecuencia de muestreo mínima debemos emplear.

El teorema de muestreo

Supongamos que $F(t)$ es una señal periódica de periodo T ($F=1/T$) y que nos interesa conocer el contenido frecuencial de $F(t)$. Es decir, nos interesa conocer cada una de las componentes $a_k \cos(2k\pi F) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi F)$ armónicas de $F(t)$. Para ello muestrearemos la señal $F(t)$ en el intervalo $[0, T]$ empleando cierta frecuencia de muestreo $F_S = N/T = NF$, donde N es el número de puntos muestreados. Es decir:

$$t_r = r/F_S = rT/N, \quad y_r = F(t_r), \quad r = 0, \dots, N - 1$$

Supongamos que $F(t)$ sólo contiene un número finito de frecuencias armónicas. Deseamos conocer los armónicos que tienen como frecuencias $2F, 3F, \dots, nF = F_{max}$. Pues bien, el Teorema de muestreo asegura que la frecuencia de muestreo que debemos emplear debe ser **superior** a $2F_{max}$.

Consideremos por ejemplo la función:

$$F(t) = \operatorname{sen}(20\pi t) + \cos(40\pi t) - \operatorname{sen}(100\pi t)$$

La frecuencia fundamental de $F(t)$ es $F=10$ Hz ($T=1/10 = 0.1$), y también están presentes los armónicos 2° (frecuencia 20 Hz) y 5° (frecuencia 50 Hz). En este caso $F_{max} = 50$ Hz, de modo que la frecuencia de muestreo debe ser superior a $2 \cdot 50 = 100$ Hz. Por tanto, deberemos elegir un valor de N tal que

$$F_S = NF = 10N > 100 \rightarrow N > 10$$

Así pues, si elegimos por ejemplo $N=15$, los 15 puntos donde deberemos muestrear la señal serán:

$$t_r = rT/N = r(0.1/15) = 0.0067r, \quad r = 0, \dots, 14$$

El valor "crítico" de frecuencia de muestreo $2F_{max}$ se llama frecuencia de Nyquist. Así pues, debemos muestrear en $[0, T]$ a una frecuencia **mayor** que la frecuencia de Nyquist. Si F_{max} es la frecuencia del armónico n , es decir, si $F_{max}=nF$, deberemos utilizar un valor N tal que $F_S = N/T > 2F_{max} = 2n/T$, por tanto $N > 2n$. Es decir, para extraer la información frecuencial de $F(t)$ hasta el armónico n , deben muestrearse en el intervalo $[0, T]$ un número N de puntos mayor que el doble de n .

Observa que, de acuerdo al teorema de muestreo, necesitamos conocer información acerca del contenido en frecuencias de la señal $F(t)$ que vamos a muestrear. Normalmente esta información sí estará disponible. Por ejemplo, sabemos que las principales componentes frecuenciales de una señal de voz humana se encuentran por debajo de $F_{max} = 3$ KHz. Y también sabemos que las señales de televisión contienen componentes frecuenciales importantes hasta $F_{max} = 5$ MHz (1 MHz=1000000 Hz). Una vez muestreada la señal $F(t)$ (de TV, voz, tensión, intensidad etc), con el suficiente número de puntos, se procesa la muestra para extraer de ella la información frecuencial que contiene $F(t)$.

Ejemplos

1. Supongamos que deseamos muestrear un período de la señal de tensión alterna "pura" de 50 Hz, $A(t) = 0.015 \text{sen}(100\pi t)$, $T = 1/50 = 0.02$, de la Figura 11.12. La única frecuencia que contiene esta señal es la de 50 Hz, de modo que $F_{max} = 50$. De acuerdo al teorema de muestreo, la frecuencia de Nyquist es $F_S = 100$ Hz. Eso significa que el período de muestreo debe ser menor que $T_S = 1/100 = 0.01$ segundos. Eso significa que nuestro dispositivo muestreador debe ser capaz de medir valores de $A(t)$ a más de 100 mediciones por segundo. Por tanto, mediremos más de dos valores uniformemente espaciados en el intervalo $[0, 0.02]$. Por ejemplo, si elegimos $N=3$:

$$T = 0.02, \quad t_r = rT/3, \quad r = 0, 1, 2$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.02/3 = 0.0067, \quad t_2 = 0.04/3 = 0.0133$$

Observa que si tomáramos como frecuencia de muestreo exactamente el valor de la frecuencia de Nyquist, $N=2$ y por tanto los instantes de muestreo serían $t = 0$ y $t = 0.01$, y los valores medidos serían $A(0) = A(0.01) = 0$, lo cual no aporta información sobre $A(t)$. La frecuencia de muestreo debe ser mayor que la frecuencia de Nyquist.

2. Supongamos que deseamos muestrear la señal de la nota DO de la Figura 11.6, generada por el sintetizador. La señal continua tenía la expresión:

$$A(t) = 0.0007(2.6 + 0.5 \cos(2\pi Ft) + \sin(2\pi Ft) + 0.3 \cos(6\pi Ft) + 0.4 \sin(6\pi Ft) + 0.5 \cos(10\pi Ft) + 0.16 \sin(10\pi Ft)) \quad (F = 261 \text{ Hz})$$

En este caso, las componentes frecuenciales son $F = 261$ Hz, $3F = 783$ Hz y $5F = 1305$ Hz. Por tanto, $F_{max} = 1305$ Hz (5° armónico). De acuerdo al teorema de muestreo, debe tomarse una frecuencia de muestreo $F_S > 2 \cdot 1305 = 2610$ Hz. Eso significa que el período de muestreo T_S debe ser menor que $1/2610 = 0.000383142$ segundos. Eso significa que deben medirse valores de $A(t)$ con un período de muestreo menor que 0.000383142 segundos o que deben medirse más de 2610 valores de $A(t)$ por segundo, o más de $5 \cdot 2 = 10$ valores en $[0, T]$, $T = 1/261$.

3. Supongamos que deseamos muestrear una señal de TV. Como hemos explicado en el párrafo anterior, en este caso $F_{max} = 5$ MHz. Por tanto, si deseamos extraer toda la información frecuencial de la señal, la frecuencia de muestreo debe ser mayor que $F_S = 10$ MHz. Eso significa que debe medirse la señal cada menos de $1/1000000 = 10^{-6}$ segundos. Eso explica la gran cantidad de espacio que ocupa la señal de vídeo almacenada en la unidad de disco. Por eso existen algoritmos de compresión de imagen capaces de eliminar redundancias y partes no esenciales de la señal, de tal modo que el espacio final que ocupa en disco es mucho menor. Con la misma finalidad existen algoritmos de compresión de señal de audio, uno de los más populares es el mp3. En el software de digitalización de audio, es muy usual que se puedan seleccionar frecuencias de muestreo como 44100 Hz (calidad CD), 96000 Hz (masterización de alta calidad), 32000 Hz (digitalización de discos de vinilo) u 8000 Hz (calidad de sonido telefónico). Observa cómo ésta última frecuencia de muestreo es suficiente para conservar el rango de frecuencias habitual de la voz humana, de hasta 3000 Hz.

Ejercicio 11.7 *Calcular la frecuencia de muestreo que debe utilizarse para analizar el espectro de la señal continua que aparece representada en la Figura 11.7. Calcular el número de valores que deberán muestrearse para estudiar la señal en un intervalo de longitud igual al período.*

La transformada discreta de Fourier (DFT)

Como ya hemos explicado, los ordenadores digitales pueden únicamente trabajar con información discreta y finita. Es decir, pueden trabajar con una muestra finita de la señal continua $F(t)$ que se está estudiando. Supongamos que hemos muestreado N puntos de la señal $F(t)$:

$$y_r = F(t_r), \quad t_r = rT/N \quad r = 0, \dots, N-1$$

También hemos hablado de la frecuencia de muestreo mínima que debemos emplear para poder extraer toda la información frecuencial de $F(t)$. Si n es el mayor armónico

presente en la señal, según el teorema de muestreo debe elegirse N tal que $N/2 > n$ (en lo que sigue vamos a considerar que N es un número par). Eligiendo N de ese modo, a partir de la muestra y_0, y_1, \dots, y_{N-1} seremos capaces de extraer toda la información frecuencial de $F(t)$. Por ejemplo, si el último armónico que contiene la señal es el número 15, nos bastará tomar $N/2 > 15$. Podemos muestrear por ejemplo $N=32$ valores de $F(t)$ y así obtener toda la información frecuencial de $F(t)$. En la práctica, si n es el mayor armónico presente en la señal, primero determinamos un valor de N tal que $N/2 > n$ y luego muestrearemos $F(t)$ para obtener y_0, y_1, \dots, y_{N-1} . Ahora la cuestión es ¿cómo procesamos los valores muestreados y_0, y_1, \dots, y_{N-1} a fin de obtener los coeficientes de Fourier a_0, a_k, b_k para $k = 0, 1, \dots, N/2$?

En el apartado 11.2.5 vimos que los coeficientes de Fourier se pueden interpretar como valores medios de ciertas funciones. Pues bien, la idea es encontrar una aproximación de esas medias mediante la media aritmética de N valores. En concreto:

Para cada $k = 0, \dots, N/2$:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \approx \frac{F(t_0) + \dots + F(t_{N-1})}{N} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} y_r$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt \approx 2 \frac{F(t_0) \cos \frac{2k\pi t_0}{T} + \dots + F(t_{N-1}) \cos \frac{2k\pi t_{N-1}}{T}}{N} =$$

$$= \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} F(t_r) \cos \frac{2k\pi t_r}{T} = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} y_r \cos \frac{2k\pi r}{N}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt \approx \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} y_r \operatorname{sen} \frac{2k\pi r}{N}$$

El tratamiento se hace más sencillo utilizando las operaciones que conocemos de números complejos. A partir de los N valores muestreados y_r , $r = 0, \dots, N-1$, calculamos los siguientes $N/2+1$ números complejos Y_k , $k = 0, \dots, N/2$:

$$Y_k = \sum_{r=0}^{N-1} y_r \cos \frac{2k\pi r}{N} - i \sum_{r=0}^{N-1} y_r \operatorname{sen} \frac{2k\pi r}{N} = \sum_{r=0}^{N-1} y_r \left(\cos \frac{2k\pi r}{N} - i \operatorname{sen} \frac{2k\pi r}{N} \right) = \sum_{r=0}^{N-1} y_r e^{-i \frac{2k\pi r}{N}}$$

$$Y_k = \sum_{r=0}^{N-1} y_r e^{-i \frac{2k\pi r}{N}} \quad k = 0, \dots, N/2 \tag{11.15}$$

Por tanto ya tenemos expresiones para el cálculo aproximado de los coeficientes de Fourier mediante los $N/2+1$ valores Y_k :

$$a_0 = \frac{1}{N} Y_0; \quad \bar{c}_k = a_k - ib_k = \frac{2}{N} Y_k; \quad a_k = \frac{2}{N} \operatorname{Re}(Y_k); \quad b_k = -\frac{2}{N} \operatorname{Im}(Y_k) \quad k = 1, \dots, N/2 \tag{11.16}$$

(2)

Ejercicio 11.8 Hemos muestreado ocho valores de una función $F(t)$ en el intervalo $[0, 1.5]$, que aparecen en la Tabla 11.4. Se trata de calcular los $8/2+1=5$ coeficientes de Fourier.

Tabla 11.4

r	t_r	$y_r = F(t_r)$
0	0	1
1	0.1875	1.35
2	0.375	1.68
3	0.5625	1.97
4	0.75	2.23
5	0.9375	2.46
6	1.125	2.68
7	1.3125	2.88

En este caso, $N=8$ e $y_0 + y_1 + \dots + y_7 = 16.25$, por tanto $a_0 = 16.25/8 = 2.03125$. La Tabla 11.5 muestra los cálculos para obtener $-\text{Im}(Y_k)$, el elemento de la fila r -ésima y columna k -ésima muestra el valor de $y_r \cos(2k\pi r/N)$, y la suma de cada columna es el valor deseado de $-\text{Im}(Y_k)$.

Tabla 11.5

	k=1	k=2	k=3	k=4
$r = 0$	1.000	1.000	1.000	1.000
$r = 1$	0.955	0.000	-0.955	-1.350
$r = 2$	0.000	-1.680	0.000	1.680
$r = 3$	-1.393	0.000	1.393	-1.970
$r = 4$	-2.230	2.230	-2.230	2.230
$r = 5$	-1.739	0.000	1.740	-2.460
$r = 6$	0.000	-2.680	0.000	2.680
$r = 7$	2.036	0.000	-2.036	-2.880
$-\text{Im}(Y_k)$	-1.371	-1.130	-1.089	-1.070

La Tabla 11.6 muestra los cálculos para obtener $\text{Re}(Y_k)$, el elemento de la fila r -ésima y columna k -ésima muestra el valor de $y_r \sin(2k\pi r/N)$, y la suma de cada columna es el valor deseado de $\text{Re}(Y_k)$.

Tabla 11.6

	k=1	k=2	k=3	k=4
$r = 0$	0.000	0.000	0.000	0.000
$r = 1$	0.955	1.350	0.955	0.000
$r = 2$	1.680	0.000	-1.680	0.000
$r = 3$	1.393	-1.970	1.393	0.000
$r = 4$	0.000	0.000	0.000	0.000
$r = 5$	-1.739	2.460	-1.739	0.000
$r = 6$	-2.680	0.000	2.680	0.000
$r = 7$	-2.036	-2.880	-2.037	0.000
$\text{Re}(Y_k)$	2.428	1.040	0.428	0.000

La Tabla 11.7 muestra los valores estimados (calculados de forma aproximada) de a_0 , a_k y b_k ($k = 0, \dots, N/2 = 4$) a partir de los valores muestreados y_r ($r = 0, \dots, N - 1 = 7$) y la amplitud de cada armónico.

Tabla 11.7

k	a_k	b_k	$ c_k $
0	2.031		2.031
1	-0.343	-0.607	0.697
2	-0.282	-0.260	0.384
3	-0.272	-0.107	0.292

Así pues, hemos aproximado la función original $F(t)$ mediante el polinomio trigonométrico:

$$T(t) = a_0 + \sum_{k=1}^4 \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{4} + b_k \sen \frac{k\pi t}{4} \right)$$

¿Cómo de próximo estará el polinomio $T(t)$ de la función original $F(t)$? Observa la Figura 11.27.

Hemos representado el polinomio $T(t)$ (a trazo fino) y la función original $F(t)$ (a trazo grueso) en el intervalo $[0, 1.5]$. Observa que $T(t)$ está relativamente cerca de $F(t)$ salvo en las proximidades de los extremos del intervalo ($t = 0$ y $t = 1.5$). ¿Qué ocurre en esos puntos? Pues lo que ocurre es que $F(t)$ es discontinua en ambos puntos. Observa la Figura 11.28, hemos representado varios períodos de la función $F(t)$ y $T(t)$. Fíjate en cómo la función continua $T(t)$ debe hacer malabarismos para salvar las discontinuidades de $F(t)$.

Ejercicio 11.9 *Aplica el Teorema 11.1 (condiciones de Dirichlet) para calcular el valores hacia los que converge la serie de Fourier de esta función $F(t)$ en los extremos del intervalo $[0, 1.5]$.*

Los $N/2+1$ valores complejos Y_k ($k = 0, \dots, N/2$) que hemos obtenido a partir de los N valores muestreados y_r ($r = 0, \dots, N - 1$) son muy importantes en análisis de señales. A partir de

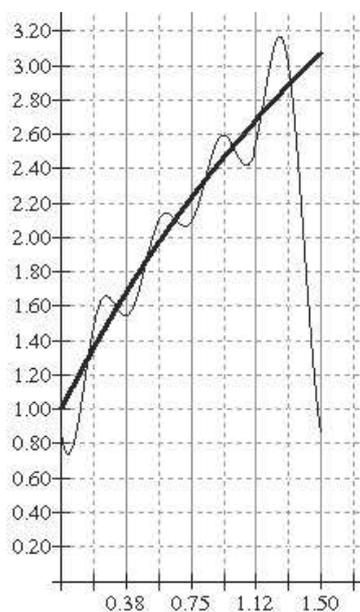


Figura 11.27: Polinomio trigonométrico y DFT

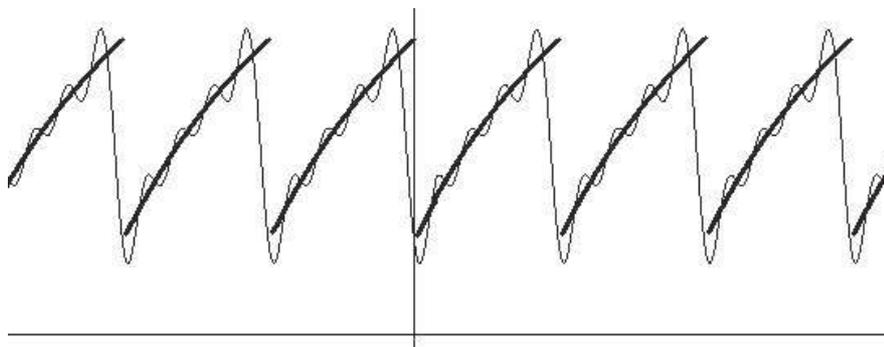


Figura 11.28: Polinomio trigonométrico y DFT con varios periodos

la expresión (11.15) de cálculo de Y_k , mediante las expresiones de (11.16) se estiman los coeficientes de Fourier de la función muestreada.

Definición 11.4 Se llama transformada discreta de Fourier (*DFT, Discrete Fourier Transform*) de la muestra de N valores y_r ($r = 0, \dots, N-1$), al conjunto de $N/2+1$ valores complejos $Y_k = \text{Re}(Y_k) + i\text{Im}(Y_k)$, $k = 0, \dots, N/2$ obtenido de la relación (11.15).

Además, se puede demostrar que a partir de los $N/2+1$ valores complejos de la DFT (Y_k , $k = 0, \dots, N/2$) es posible recuperar los valores muestreados (y_r , $r = 0, \dots, N-1$). En otras palabras, a partir de la DFT de una muestra se puede reconstruir la propia muestra. He aquí la expresión de cálculo inverso, llamada Transformada Discreta Inversa de Fourier

(IDFT):

$$Y_r = \frac{Y_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N/2} \operatorname{Re}(Y_k) \cos \frac{2k\pi r}{N} - \frac{\operatorname{Im}(Y_{N/2})}{N} - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N/2} \operatorname{Im}(Y_k) \operatorname{sen} \frac{2k\pi r}{N} \quad r = 0, \dots, N-1$$

La transformada rápida de Fourier (FFT)

Hemos visto un procedimiento con el que estimar los coeficientes de Fourier de una función $F(t)$ a partir de una muestra $F(t)$. Este procedimiento se basa en el cálculo de la transformada discreta de Fourier de la muestra. Ahora bien, para calcular los $N/2+1$ números complejos de la transformada a partir de los N valores de la muestra mediante la relación (11.15), es necesario un importante esfuerzo de cómputo. De hecho, se puede demostrar que para una muestra de tamaño N , el número de multiplicaciones a realizar es del orden de un valor proporcional a N^2 . Observa que este número crece mucho a medida que aumenta N . Por ejemplo, si se duplica el tamaño de la muestra (es decir, si se toma doble frecuencia de muestreo), el número de operaciones necesarias se cuadruplica. Incluso automatizando los cálculos con un ordenador, el número de operaciones a realizar en un intervalo de tiempo puede resultar prohibitivo. Afortunadamente existen algoritmos con los que calcular la DFT con muchas menos operaciones. Estos algoritmos se llaman algoritmos FFT (Fast Fourier Transform, Transformada Rápida de Fourier). No vamos a entrar en detalles de estos algoritmos, pero sí indicaremos dos datos. Primero, para poder aplicarse, el valor de N debe ser potencia de 2. Segundo, el número de operaciones que es necesario realizar para calcular la DFT empleando FFT es mucho menor que con el cálculo directo, del orden de $N \log(N)$. Observa la Figura 11.29 Hemos representado las funciones $N^2/100$ y $N \log(N)/100$. La primera de ellas (cálculo directo de la DFT) crece mucho más rápidamente que la segunda (cálculo de la DFT empleando FFT). Por ejemplo, si $N=1024=2^{10}$, el valor N^2 supera el millón de operaciones necesarias, mientras que $N \log(N)$ no llega a 3100 operaciones.

Ejercicio 11.10 *Calcular, representar gráficamente y comparar las velocidades de crecimiento del número de operaciones que deben realizarse para calcular la DFT mediante el cálculo directo (N^2) o mediante los algoritmos FFT ($N \log(N)$).*

Del mismo modo, también existen algoritmos eficientes para el cálculo de la transformada discreta inversa, IFFT. En el mercado existe una amplia gama de chips que realizan tanto la FFT de una muestra como la IFFT. Estos chips se montan en los instrumentos profesionales que sirven para analizar el espectro de señales (tensión, corriente, vibraciones, sonido, vídeo, etc). Por otra parte, los algoritmos FFT e IFFT vienen incorporados en algunos paquetes de software comercial como la hoja de cálculo Excel (Herramientas/Análisis de datos/Análisis de Fourier).

Ejercicio 11.11 *Supongamos que tenemos una tensión $F(t)$ de 50 Hz ($T = 0.02$) "frecuente" con armónicos hasta orden 14. Así pues, la frecuencia de Nyquist es igual a $2 \cdot 14 \cdot 50 = 1400$ Hz, de modo que habrá que muestrear en el intervalo $[0, 0.02]$ con período de*

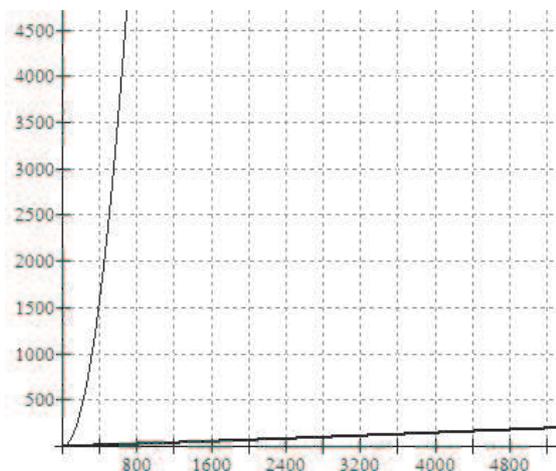


Figura 11.29: Comparación del número de operaciones

muestreo menor que $1/1400 = 0.000714286$. En el intervalo $[0, 0.02]$ tomaremos un número N de puntos tal que N sea potencia de 2 y que $0.02/N$ sea menor que el período de muestreo 0.000714286 . Si elegimos $N=16$, se tiene $0.02/16 = 0.00125$, que no es suficiente. En cambio, es suficiente $N=32$ ya que $0.02/N = 0.000625 < 0.000714286$. La Tabla 11.8 muestra los 32 valores muestreados. Se trata de emplear la FFT implementada en Excel para analizar el espectro de $F(t)$ y filtrar $F(t)$ para eliminar todo armónico superior al décimo.

Tabla 11.8

r	t_r	$F(t_r)$		r	t_r	$F(t_r)$
0	0.00000	0.19900		16	0.01000	0.22300
1	0.00063	0.31084		17	0.01063	0.32853
2	0.00125	0.18136		18	0.01125	0.19205
3	0.00188	0.25188		19	0.01188	0.25518
4	0.00250	0.24992		20	0.01250	0.24568
5	0.00313	0.25546		21	0.01313	0.24386
6	0.00375	0.31901		22	0.01375	0.30047
7	0.00438	0.19728		23	0.01438	0.17254
8	0.00500	0.30400		24	0.01500	0.27400
9	0.00563	0.19736		25	0.01563	0.16326
10	0.00625	0.33174		26	0.01625	0.29485
11	0.00688	0.26561		27	0.01688	0.22732
12	0.00750	0.27129		28	0.01750	0.23311
13	0.00813	0.26865		29	0.01813	0.23202
14	0.00875	0.20708		30	0.01875	0.17344
15	0.00938	0.32978		31	0.01938	0.30039

Mediante Excel calculamos los $32/2+1=17$ valores complejos Y_k de la DFT, los coeficientes de Fourier y el espectro. Todo ello aparece en la Tabla 11.9.

Tabla 11.9

k	$\text{Re}(Y_k)$	$\text{Im}(Y_k)$	a_k	b_k	Módulo de c_k
0	8.00000	0.00000	0.25000	0.00000	0.25000
1	-0.19200	-0.24000	-0.01200	0.01500	0.01921
2	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
6	0.38400	-0.01086	0.02400	0.00068	0.02401
7	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10	-0.00001	-0.01336	0.00000	0.00084	0.00084
11	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
12	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
13	-0.00003	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
14	-1.00799	-0.03770	-0.06300	0.00236	0.06304
15	0.00004	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
16	0.00003	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

La Figura 11.30 muestra el espectro de frecuencias de $R(t)$.

Así pues, tras el análisis determinamos que la señal $F(t)$ tiene como componentes los armónicos 6, 10 y 14 (análisis). Ahora filtramos las frecuencias no deseadas, y nos quedamos sólo con los armónicos 6 y 10 (además de con la frecuencia fundamental). Así pues, la señal "filtrada" (síntesis) será:

$$T(t) = 0.25 + 0.015 \text{sen}(100\pi t) - 0.012 \text{cos}(100\pi t) + \\ + 0.00068 \text{sen}(600\pi t) + 0.024 \text{cos}(600\pi t) + 0.00084 \text{sen}(1000\pi t)$$

¿Qué tal ha funcionado el procedimiento? Resulta que la muestra de la Tabla 11.8 ha sido tomada de la función:

$$F(t) = 0.25 + 0.015 \text{sen}(100\pi t) - 0.012 \text{cos}(100\pi t) + \\ + 0.00068 \text{sen}(600\pi t) + 0.024 \text{cos}(600\pi t) + 0.000835 \text{sen}(1000\pi t) + \\ + 0.00235 \text{sen}(1400\pi t) - 0.063 \text{cos}(1400\pi t)$$

El análisis frecuencial a través de la FFT ha permitido determinar con gran exactitud las componentes armónicas de la señal real $F(t)$ a partir de una muestra de esta función. La Figura 11.31 representa las gráficas de $F(t)$ (trazo grueso) y de $T(t)$ (trazo fino) en el intervalo $[0, 0.02]$. Observa cual ha sido el resultado de filtrar de $R(t)$ los armónicos no deseados.

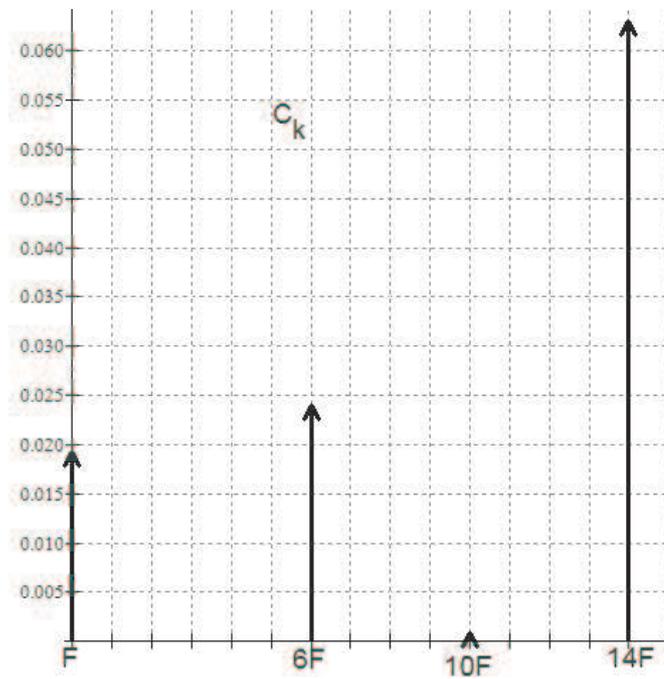


Figura 11.30: Espectro de onda. Ejemplo 11.11

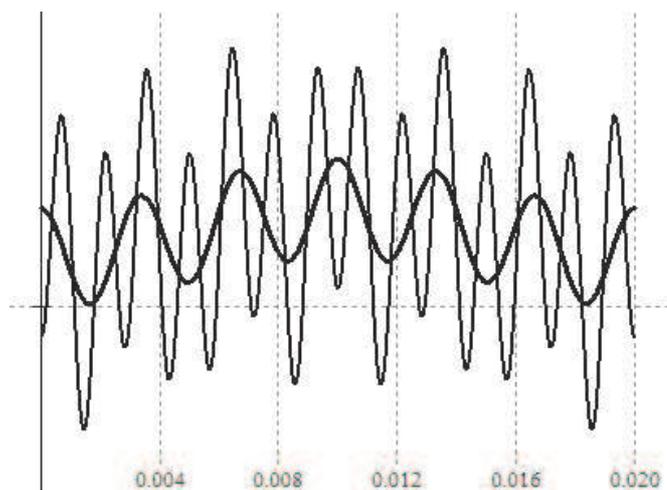


Figura 11.31: Alterna de 50 Hz contaminada y filtrada