Capítulo 11

Problemas de Análisis de Fourier

(En los problemas marcados con el icono es conveniente usar de un programa de ordenador para la representación gráfica de funciones, por ejemplo Winplot).

1. Demostrar que los coeficientes de Fourier cada una de las funciones que aparecen representadas en la figura son los siguientes:

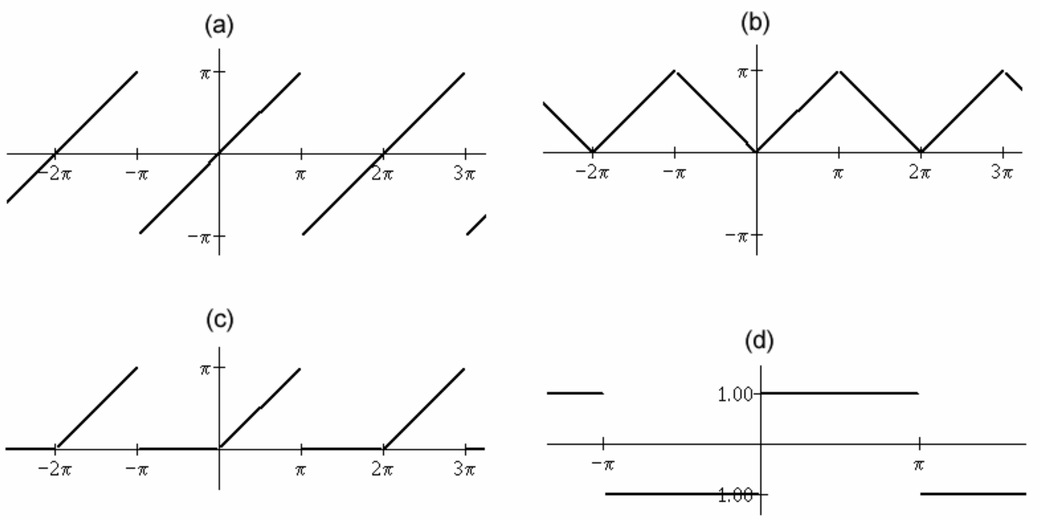
   a) $a_n = 0, \quad b_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

   b) $a_0 = \dfrac{\pi}{2}, \quad a_{2n+1} = \dfrac{-4}{\pi(2n+1)^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

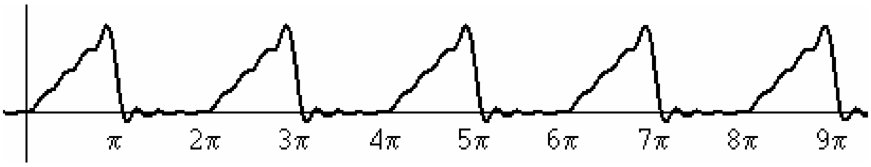
   c) $a_0 = \dfrac{\pi}{4}, \quad a_{2n+1} = \dfrac{-2}{\pi(2n+1)^2} \quad b_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

   d) $a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{4}{2n+1}\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

   En cada caso, estudiar la convergencia de la serie.



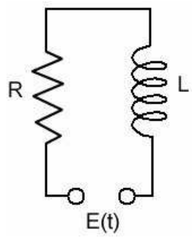
2. Dada la EDO lineal $y'+py=Q(t)$, donde p es una constante real y $Q(t)$ es una función periódica de período T, estudiar la siguiente idea: (1) calcular la serie de Fourier $S(t)$ de $Q(t)$; (2) sustituir $Q(t)$ por una aproximación $R(t)$ formada tomando una suma finita de términos de $S(t)$. La Figura adjunta muestra la gráfica de la aproximación que se obtiene al tomar los nueve primeros sumandos de la serie de Fourier de una de las funciones del ejercicio 1, ¿adivinas de cuál?; (3) resolver la EDO resultante $y'+py=R(t)$, utilizando el procedimiento que ya conocemos para las EDO lineales de orden 1.



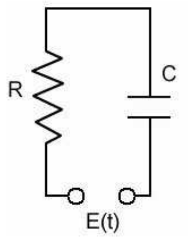
NOTA: Recordemos que

$$\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\,\mathrm{sen}\,bx-b\,\cos bx)}{a^2+b^2}+C,\quad \int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\,\cos bx+b\,\mathrm{sen}\,bx)}{a^2+b^2}+C$$

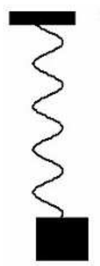
3. Sabemos que la intensidad $I(t)$ que circula por un circuito RL serie satisface la ecuación diferencial $LI'+RI=E$, donde L es el valor de la inductancia, R el de la resistencia y E es la tensión aplicada. Utilizar el ejercicio 2 para estudiar $I(t)$, siendo $E(t)$ cada una de las funciones cuyas gráficas aparecen en el ejercicio 1.

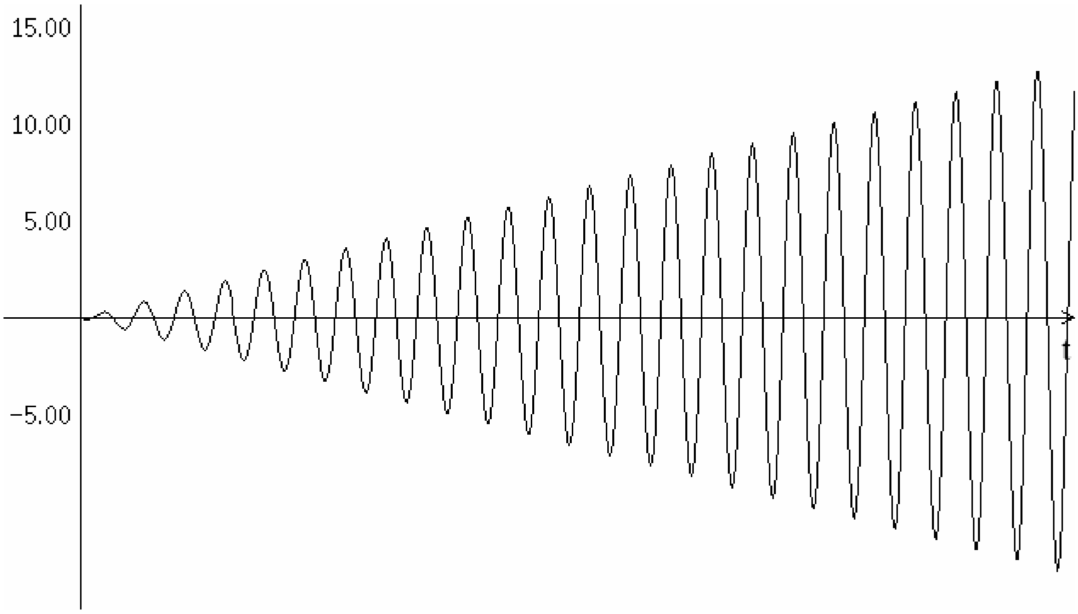


4. El mismo planteamiento que en el problema anterior, pero para un circuito RC serie, en el que la carga $q(t)$ que contiene el condensador en cada instante viene descrita por la EDO: $Rq'+q/C=E(t)$, donde R es el valor de la resistencia y C el de capacidad.



5. Una masa m cuelga de un muelle en reposo. Ver figura. Aplicamos verticalmente una fuerza periódica $F(t)$ y la masa empieza a oscilar. Si suponemos que no existe amortiguación, la ecuación diferencial $y''+w^2y=F(t)$ describe las oscilaciones de la masa, con $w^2=k/m$, siendo k una constante que indica la elasticidad del muelle. Si, por ejemplo, el muelle se estira 20 cm al colgar una masa de 10 Kg, entonces $k=10/20=0.5$ Kg/cm. Cuanto mayor sea k, mas "duro" es el muelle.





a) Empleando las mismas ideas que en el ejercicio 2, estudiar la oscilación $y(t)$ de la masa.

b) Aplicar el resultado obtenido en el apartado anterior para la función cuya gráfica aparece en la figura (c) del ejercicio 1, suponiendo que el muelle tiene una constante de elasticidad $k = 1$. Estudiar las oscilaciones para una masa $m = 4$ y $m = 1/9$.

Demostrar que en este último caso, existe un armónico (representado en la figura) cuyas oscilaciones no están acotadas cuando t tiende a infinito. ¿Para qué valores m de la masa siempre existe un armónico de amplitud no acotada?

6. **Desarrollo en serie de Fourier de una función no periódica**

Supongamos que $F(t)$ es una función definida en el intervalo $[0, L]$. Como $F(t)$ no es periódica, no se puede hablar en principio de serie de Fourier de $F(t)$. Sin embargo, estudiar la siguiente idea: (1) a partir de $F(t)$, construir otra función $H(t)$ definida en $[-L, L]$ que sea idéntica a $F(t)$ en $[0, L]$. La nueva función $H(t)$ puede definirse de tal modo que sea par o bien que sea impar; (2) extender $H(t)$ de modo que sea periódica en $\mathbb{R}$; (3) calcular la serie de Fourier de $H(t)$.

Aplicar estas ideas a las funciones siguientes:

a) $F(t) = pt + q \quad 0 \leq t \leq L$

b) $F(T) = t^2 \quad 0 \leq t \leq 2$