Capítulo 10

Transformada de Laplace

10.1. Actividades con el programa orden exponencial.wp2

10.1.1. Funcionamiento:

Recuerda que encontramos una condición suficiente para la existencia de la transformada de Laplace de una función $y(t)$: basta con que $y(t)$ sea de orden exponencial en el intervalo $[0, \infty)$. Viene a significar que cuando $t \to \infty$, la función $y(t)$ tiene un orden de crecimiento menor que alguna función exponencial e^{at}. De un modo más formal:

Si $y(t)$ es una función continua a tramos en $[0, \infty)$ y si existen constantes no negativas a, M y T tales que:

$$|y(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{at} \quad \forall t \geq T$$

entonces existe la transformada de Laplace $Y(s)$ de $y(t)$.

El programa **orden exponencial.wp2** tiene definidas las siguientes funciones de usuario:

$$G(X) = (BXX + CX) * HVS(X)$$
$$H(X) = EXP(X * X) * HVS(X)$$
$$F(X) = G(X)$$

El factor $HVS(X)$ sirve simplemente para representar las funciones sólo en el dominio $[0, \infty)$. Cambiando los parámetros B y C se modifica la función G. La línea $F(X) = G(X)$ indica que trabajamos con la familia de funciones $G(X)$. Si sustituimos esta línea por $F(X) = H(X)$, pasaremos a trabajar con $H(X)$.

En el inventario se encuentra las gráficas de las funciones $y = F(x)$, $y = M\,e^{ax}$ y el punto $(p, M\mathrm{e}^{ap})$, que está situado sobre ésta última curva.

10.1.2. Trabajoa a realizar:

Trabaja inicialmente con la familia de funciones $G(X)$. Asigna valores a B y C. Determina experimentalmente tres valores M, a y T que permiten asegurar que estas funciones son de orden exponencial, y que por tanto existen sus transformadas de Laplace.

Trata de hacer lo mismo con la función H(X). ¿Conclusiones?

10.2. Actividades con el modelo del movimiento de un resorte

En el Tema 9 vimos que el siguiente modelo sirve para estudiar las oscilaciones de una masa que pende de un resorte y al que se aplica una fuerza $F(t) = R\,\mathrm{sen}(wt)$:

$$\begin{aligned} &ay'' + by' + cy = R\,\mathrm{sen}(wt) \\ &y(0) = p \\ &y'(0) = q \end{aligned} \tag{10.1}$$

Donde:

$y(t)$ =posición del sólido en el instante t

a =masa del sólido

b =una constante llamada constante de amortiguación (por ejemplo, el medio físico en el que oscila el cuerpo podría ser aire, agua o algún aceite en el que estuviera sumergido el muelle para disipar el calor, lo cual nos daría diferentes valores de). c=constante que depende de las características del muelle

p =posición inicial de la masa

q =velocidad inicial de la masa

R =amplitud de la fuerza senoidal aplicada a la masa

$2\pi/w$ =frecuencia de la fuerza senoidal aplicada, $w/(2\pi)$ =período

Winplot permite resolver numéricamente ecuaciones diferenciales de orden 1:

$$\begin{aligned} &dx/dt = G(t, x, y) \\ &dy/dt = H(t, x, y) \\ &x(0) = p \\ &y(0) = q \end{aligned} \tag{10.2}$$

Para ello, abrimos la ventana **Ecua->Ecuación diferencial->dy/dt** e introducimos las funciones $G(t, x, y)$ y $H(t, x, y)$. Si el parámetro t está presente en las funciones F y G, seleccionamos la casilla "dependiente del tiempo".

Para calcular la solución, en la ventana **Una->dy/dt trayectoria** introducimos el punto inicial (p, q) tecleando estos valores en las casillas **x=, y=**, o bien hacemos clic en el punto deseado (p,q) del plano. En la casilla **t=** se especifica el valor inicial de t y en **duración límite** se puede especificar la longitud del intervalo desde el valor inicial de t. Al hacer clic en el botón **Dibujar**, Winplot calculará y representará gráficamente la curva $(x(t), y(t))$ solución de (10.2). Además, las ventanas **Misc->Ecua Dif miscelánea->x(t)-ventana** e **Misc->Ecua Dif miscelánea->y(t)-ventana** nos permiten visualizar separadamente las funciones $x(t)$, $y(t)$ en función de t. Mediante **Misc->Ecua Dif miscelánea->yx(t)-ventana** podrás ver ambas gráficas representadas en los mismos ejes En estas ventanas, haciendo clic sobre un punto cualquiera del plano se muestran sus coordenadas.

Para resolver ecuaciones diferenciales de orden 2:

$$\begin{aligned} &y'' = M(t, y, y') \\ &y(t_0) = p \\ &y'(t_0) = q \end{aligned} \tag{10.3}$$

lo que haremos es transformar (10.3) en (10.2). Así:
Llamamos $u = y$, $v = y'$. Entonces, el sistema

$$\begin{aligned} &u' = v \\ &v' = M(t, u, v) \\ &u(t_0) = p \\ &v(t_0) = q \end{aligned}$$

es equivalente a (10.1)

10.2.1. Trabajoa a realizar:

1. Transforma la ecuación en un sistema (10.2)

2. Abre un nuevo programa Winplot 2D e introduce el sistema resultante. Los valores de las constantes que aparecen en (10.1) son parámetros del modelo. Un ejemplo es el siguiente grupo de valores:

   $$p = 1,\ q = 3,\ a = 2,\ b = 6,\ c = 7.6,\ R = 8,\ w = 3,\ t \text{ inicial} = 0,\ \text{límite de } t = 15$$

   En la ventana **Una->dy/dt trayectoria** activa casilla **segu** para hacer los cálculos sólo desde el valor inicial de t hasta el valor final.

3. Visualiza la función solución $y(t)$ mediante **Misc->Ecua Dif miscelánea->x(t)-ventana** y su derivada mediante **Misc->Ecua Dif miscelánea->y(t)-ventana**. Mediante **Misc->Ecua Dif miscelánea->yx(t)-ventana** podrás ver ambas gráficas representadas sobre los mismos ejes. Explica la relación que hay entre las dos gráficas.

4. Piensa en cómo cambiará la gráfica de la solución $y(t)$ si modificas uno de los parámetros (a, b, c, R o w) manteniendo fijos los demás. Verifica después el resultado.

5. Cuando estudiamos la EDO (10.1), comprobamos que su solución tiene un sumando transitorio que podemos despreciar porque tiende rápidamente hacia 0 a medida que t crece, y un sumando permanente que oscila. La amplitud M de este término permanente es

   $$M = \frac{r}{\sqrt{(c - aw^2)^2 + b^2w^2}}$$

   Visualiza el valor de M utilizando un texto evaluado **(Btns->Texto evaluado)**. Verifica en la solución numérica obtenida por Winplot estas propiedades.

6. También comprobamos que existe a un valor crítico de w para el cual la amplitud de la oscilación del sistema era máxima (resonancia). Demostramos que el valor w_0 al que se produce resonancia del sistema es

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{2a}\right)}$$

   Visualiza también el valor de w_0 utilizando un texto evaluado. Verifica en la solución numérica obtenida por Winplot estas propiedades.

7. Calcula el valor medio de $y(t)$ en el intervalo en el que hayas estudiado la solución (en el ejemplo, el intervalo es $[0, 15]$). Calcula también el valor medio de la velocidad.