Capítulo 10

Problemas de la Transformada de Laplace

(En los problemas marcados con el icono es conveniente usar de un programa de ordenador para la representación gráfica de funciones, por ejemplo Winplot).

1. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

   a) $f(t) = t^2\,\mathrm{e}^{3t}$

   b) $f(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\cos 6t - 5\,\mathrm{sen}\, 6t)$

   c) $f(t) = \mathrm{sen}^2\, t$

   d) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t > a \end{cases}$

2. Calcular la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones.

   a) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$

   b) $F(s) = \dfrac{\mathrm{e}^{-5s}}{(s-2)^4}$

   c) $F(s) = \dfrac{2s^2-4}{(s-1)(s-2)(s-3)}$

   d) $F(s) = \dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

   e) $F(s) = \dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}$

   f) $F(s) = \dfrac{1}{(s-2)^3}$

   g) $F(s) = \dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}$

   h) $F(s) = \dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}$

3. Empleando la transformación de Laplace, resolver los siguientes problemas.

a) $y'' + 9y = \cos 2t$
$y(0) = 1$
$y(\pi/2) = -1$

b) $y'' - 3y' + 2y = 4\,\mathrm{e}^{2t}$
$y(0) = -3$
$y'(0) = 5$

c) $y'' + 2y + 5y = \mathrm{e}^{-t}\,\operatorname{sen} t$
$y(0) = 0$
$y'(0) = 1$

d) $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2\,\mathrm{e}^t$
$y(0) = 1$
$y'(0) = 0$
$y''(0) = -2$

4. Empleando la transformación de Laplace, encontrar la solución general de la EDO:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2\,\mathrm{e}^t$$

5. Empleando la transformación de Laplace, resolver los siguientes problemas.

a) $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \end{cases}$
$x(0) = 8,\ y(0) = 3$

b) $\begin{cases} x'' + y' + 3x = 15\,\mathrm{e}^{-t} \\ y'' - 4x' + 3y = 15\,\operatorname{sen} 2t \end{cases}$
$\begin{cases} x(0) = 35,\ x'(0) = -48 \\ y(0) = 27,\ y'(0) = -55 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' + 2z = t \\ y'' - z = e - t \end{cases}$
$y(0) = 3,\ y'(0) = -2,\ z(0) = 0$

d) $\begin{cases} x' + y' = y + z \\ y' + z' = x + z \\ x' + z' = x + y \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = -3,\ z(0) = 1$