Capítulo 1

Números complejos

1.1. Concepto de números complejos

Veamos unos ejemplos que nos ayudarán a intuir la necesidad de los números complejos.

Ejemplo 1.1 *Queremos obtener la intersección de la curva* $y_1 = x^2$ *con la recta* $y_2 = 3x - 2$ *(ver la figura 1.1) Resolviendo el sistema*

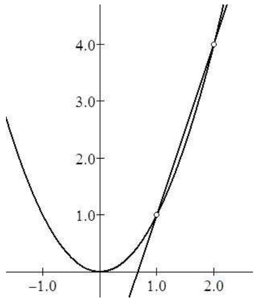

Figura 1.1: Ejemplo 1.1

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3x - 2 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Obtenemos una respuesta con significado físico y con solución en $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

Ejemplo 1.2 *Dada la gráfica Espacio/tiempo definida por* $E = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ t^2 & si \quad t \geq 0 \end{cases}$ *(ver la figura 1.2), ¿en qué instante* t_1 *hemos recorrido* 2 *metros? También la pregunta y la respuesta*

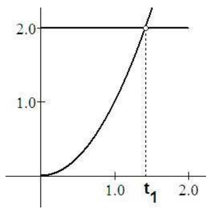

Figura 1.2: Ejemplo 1.2

tienen significado físico, estando la solución en $\mathbb{R}$*:*

$$t_1^2 = 2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

¿y si $E = 0.25$ *metros?*

$$t_2^2 = 0.25 \Rightarrow t_2 = 0.5 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.3 *Lanzamos una pelota hacia arriba, con velocidad inicial v_0. Si $h(t)$ es la altura alcanzada en el instante t, podremos escribir (según la figura 1.3)*

$$h = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t = t\left(v_0 - \frac{g}{2}\,t\right)$$

Podemos plantear algunos problemas con significado físico:

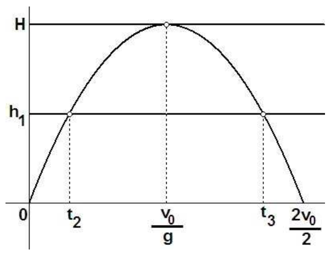

Figura 1.3: Ejemplo 1.3

- *¿En qué instante se alcanza la máxima altura H?*
  En $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$, $H = h(t_1)$
- *¿En qué instantes alcanza cierta altura h_1 $(0 \leq h_1 \leq H)$?.*

  $$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}}{g} = \begin{cases} t_2 \\ t_3 \end{cases}$$

  Además:

  $$t_2 = t_3 \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{v_0^2}{2g}$$

  Por ejemplo: Si $h_1 = 0.2\,m$, $v_0 = 3\,m/s$

  $$t_2 = 0.072 \quad , \quad t_3 = 0.53$$

  $$t_1 = \frac{v_0}{g} = 0.31 \ , \ H = \frac{v_0^2}{2g} = 0.46$$

Somos capaces de representar en $\mathbb{R}$ las soluciones de este problema (ver la figura 1.4):

Veamos ahora estas otras situaciones, similares a las anteriores:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 = x - 1 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad \text{(ver la figura 1.5):}$$

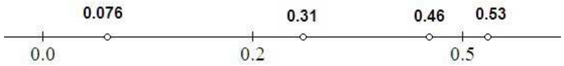

Figura 1.4: Hay solución

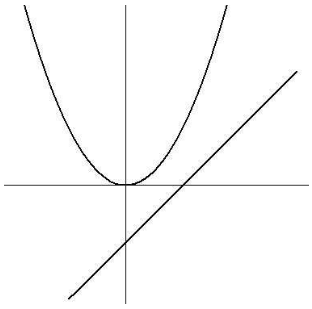

Figura 1.5: No hay corte

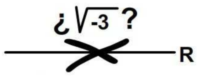

Figura 1.6: ¿Cuál es el corte?

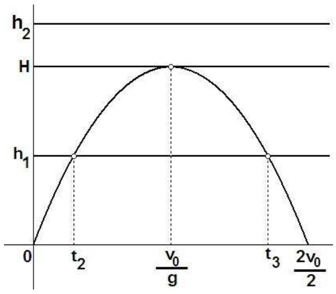

Figura 1.7: Si h_2 es mayor que H

¿$\sqrt{-3}$? ¿Qué es?. ¿Donde está en la recta real? (ver la figura 1.6):

$$z = \sqrt{-3} \Leftrightarrow z^2 = 3 \quad z \notin \mathbb{R}$$

En el caso de la pelota:
¿En qué instante alcanza h_2? (ver la figura 1.7):

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}, \quad H = \frac{v_0^2}{2g}$$

Si $\quad h_2 > H \Rightarrow h_2 > \dfrac{v_0^2}{2g} \Leftrightarrow 2gh_2 > v_0$

Es decir $\quad v_0^2 - 2gh_2 < 0 \qquad$ ¡¡ otra vez raíz de un número negativo !!

¿dónde está $\sqrt{v_0^2 - 2gh_2}$?

Por ejemplo: $\quad h_2 = 5 \quad v_0 = 3\ , \quad \sqrt{v_0^2 - 2gh_2} = \sqrt{-84}$

¿Cómo puedo representar ese número?.¿Para qué me sirve?

En el ejemplo de la intersección:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)(3)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-1}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-1}$$

Donde vemos que sólo da problemas $\sqrt{-1}$ ya que los demás números son reales.

Si denotamos $\quad \sqrt{-1} = \mathrm{i} \quad (\mathrm{i}^2 = -1)$:

¿Cómo represento, por ejemplo, $\quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-1}$? (ver la figura 1.8)

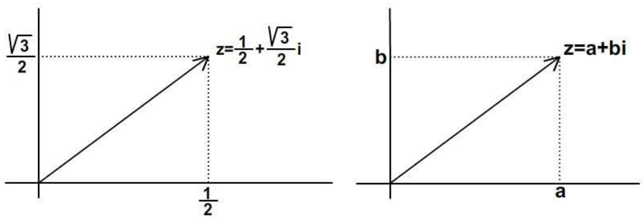

Figura 1.8: Representación vectorial de un complejo

$$z = a + b\,\mathrm{i} \ \text{ donde } \begin{cases} a = Re(z) = \text{parte real de } z \\ b = Im(z) = \text{parte imaginaria de } z \end{cases}$$

Definición 1.1 *Definiremos el conjunto $\mathbb{C}$ de números complejos de la forma:*

$$\mathbb{C} = \{z = a + b\,\mathrm{i} \ \mid \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

siendo

$$\mathbb{R} = \{z = a + b\,\mathrm{i} \ \mid \ a \in \mathbb{R}\,,\, b = 0\}$$

Así pues, los números reales son los complejos con la componente imaginaria nula.

1.2. Forma polar de $z \in \mathbb{C}$

Si z es un número complejo, lo podemos expresar, ya que es un vector, de la forma (ver la figura 1.9):

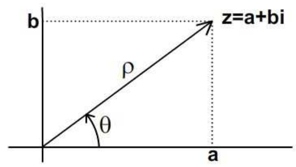

Figura 1.9: Forma binomial

Si $a = 0$ y $b > 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$
Por ejemplo :

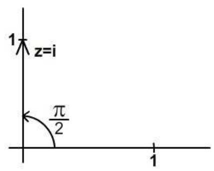

Figura 1.10: Ejemplo

$$z = 0 + \mathrm{i} = 1_{\frac{\pi}{2}}$$

$$z = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}_{-\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}_{\frac{7\pi}{2}}$$

En general:

$$\rho_\theta = \rho_{\theta+2k\pi} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

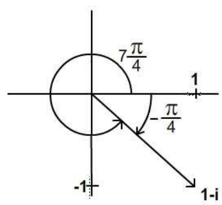

Figura 1.11: Expresión polar multiforme

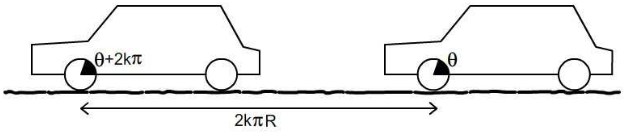

Figura 1.12: Efecto físico

Representan el mismo punto sobre el plano. Sin embargo, el efecto físico de aplicar θ ó $\theta + 2k\pi$ puede ser muy diferente. Ver la figura 1.12.

Definición 1.2 *Si $0 \leq \theta < 2\pi$, llamaremos a θ argumento principal.*

Por ejemplo,

$$z = 2_{\frac{31}{5}\cdot\pi} = 2_{\frac{6\cdot 5+1}{5}\cdot\pi} = 2_{6\pi+\frac{\pi}{5}} = 2_{\frac{\pi}{5}} \Rightarrow \frac{\pi}{5} = \text{ argumento principal de } z$$

1.3. Forma exponencial de $z \in \mathbb{C}$

Sea $z = a+b\,\mathrm{i} = \rho_\theta$ siendo $\begin{cases} a = \rho\cdot\cos\theta \\ b = \rho\cdot\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow z = \rho\cdot\cos\theta + \mathrm{i}\cdot\rho\cdot\operatorname{sen}\theta = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)$

Ahora vamos a emplear un resultado que veremos en detalle en los temas 3 y 4:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{e}^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

La igualdad se da con la suma de infinitos términos, pero podemos conseguir aproximaciones cada vez mejores tomando más y más sumandos.

Por ejemplo: $\mathrm{e}^x \approx 1$, $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$, $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, etcétera (ver la figura 1.13)

Por otra parte, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$, $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$ y se repiten

Vamos a emplear estos resultados:

$$z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta) = \rho\left(\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + \mathrm{i}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)\right) =$$

$$= \rho\left(1 + \frac{(\mathrm{i}\theta)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^6}{6!} + \cdots + \mathrm{i}\theta + \frac{(\mathrm{i}\theta)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^5}{5!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^7}{7!} + \cdots\right) \overset{\text{ordenamos}}{=}$$

$$= \rho\left(1 + \mathrm{i}\theta + \frac{(\mathrm{i}\theta)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^5}{5!} + \cdots\right) = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \textit{Forma exponencial de } z$$

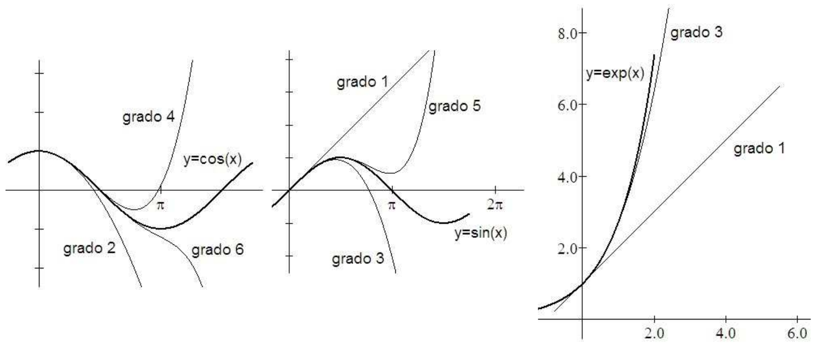

Figura 1.13: Aproximación mediante series

Por ejemplo:

$$z = 0 + \mathrm{i} = 1_{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 1\,(\cos\pi + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\pi) = -1 < 0$$

Esto no ocurre jamás en $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Pero sí es posible $\mathrm{e}^z = -1$ si $z \in \mathbb{C}$.

En particular, si $\rho = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\theta$ que es la llamada **Fórmula de Euler**

Veremos enseguida las operaciones aritméticas entre complejos, pero podemos adelantar que el producto se calcula muy fácilmente empleando la forma exponencial de los complejos:

$$\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot \rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \rho\rho'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta+\mathrm{i}\theta'} = \rho\rho'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$$

por tanto $\rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} = \rho\rho'_{\theta+\theta'}$

Y en cuanto al cociente:

$$\frac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} = \frac{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta-\mathrm{i}\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\theta-\theta'}$$

Como caso particular

$$\rho_\theta \cdot 1_{\theta'} = \rho_{\theta+\theta'}$$

El producto por $1_{\theta'}$ representa un giro de ángulo θ' y centro el origen de coordenadas. (ver la figura 1.14)

Veamos un ejemplo. Aplicar a la figura un giro $\theta' = \dfrac{\pi}{3}$ y un escalado $\rho' = 0.5$ (ver las figuras 1.15 y 1.16):

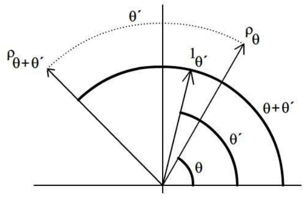

Figura 1.14: Giro de ángulo θ

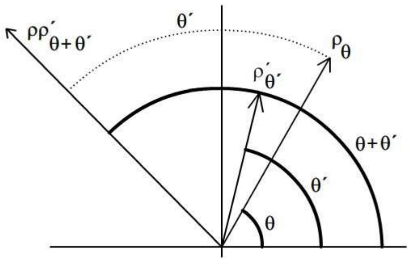

Figura 1.15: Giro + cambio de escala

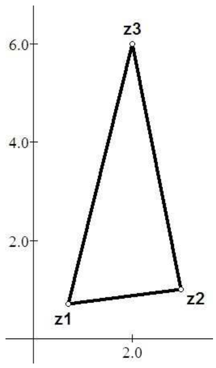

Figura 1.16: Ejemplo

$z_1 = 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$; $\quad z_2 = 3+\mathrm{i} = \sqrt{10}_{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}} \approx 3.16_{0.32}$; $\quad z_3 = 2+6\,\mathrm{i} = \sqrt{40}_{\operatorname{arc\,tg}\frac{6}{2}} \approx 6.32_{1.25}$

$z_1' = z_1 \cdot 0.5_{\frac{\pi}{3}} \approx 1.41_{0.78} \cdot 0.5_{1.05} = 0.7_{1.83} \equiv 0.7(\cos 1.83 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 1.83) \approx 0.7(-0.26+0.97\,\mathrm{i}) = -0.18+0.68\,\mathrm{i}$

$z_2' = z_2 \cdot 0.5_{\frac{\pi}{3}} \approx 3.16_{0.32} \cdot 0.5_{1.05} = 1.58_{1.37} \equiv 1.58(\cos 1.37 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 1.37) \approx 1.58(0.2+0.98\,\mathrm{i}) = 0.31+1.55\,\mathrm{i}$

$z_3' = z_3 \cdot 0.5_{\frac{\pi}{3}} \approx 6.32_{1.25} \cdot 0.5_{1.05} = 3.17_{2.3} \equiv 3.17(\cos 2.3 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 2.3) \approx 3.17(-0.67+0.74\,\mathrm{i}) = -2.12+2.35\,\mathrm{i}$

(ver la figura 1.17)

Veamos otro ejemplo: Aplicar un giro y escalado $\rho_\theta = 2_{\frac{\pi}{2}}$, a la figura: (ver la figura 1.18)

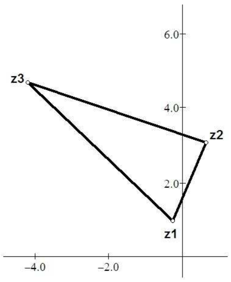

Figura 1.17: Resultado del ejemplo

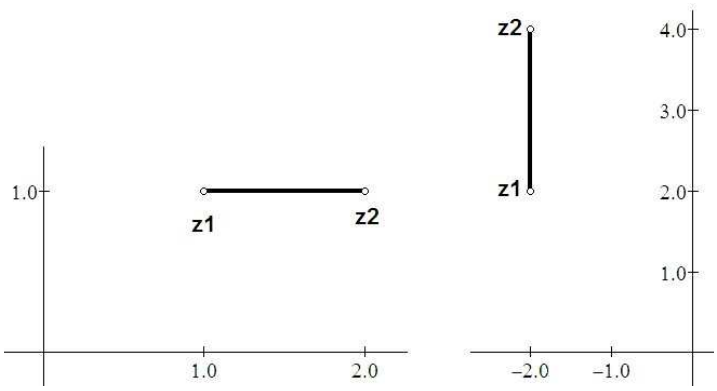

Figura 1.18: Otro ejemplo

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}, \qquad z_2 = 2 + \mathrm{i} = \sqrt{5}_{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}}$$

$$z_1' = z_1 \cdot 2_{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}_{\frac{5\pi}{4}} \approx 2{,}83_{\frac{5\pi}{4}}$$

$$z_2' = z_2 \cdot 2_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{5}_{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}} \cdot 2_{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{5}_{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}} \approx 4.48_{2.03}$$

Definición 1.3 *Siendo el complejo $z = \rho_\theta$, llamaremos* conjugado de $z = \overline{z}$ *al complejo:* $\overline{z} = \rho_{-\theta}$

(ver la figura 1.19)

Propiedad: $z \cdot \overline{z} = \rho_0^2 = \rho^2 \in \mathbb{R}$

Ejercicio 1.1 *Expresar las condiciones que se deben cumplir para que dos números complejos sean iguales.*

1.3.1. Operaciones en $\mathbb{C}$

- Suma: $(a + b\mathrm{i}) + (a' + b'\mathrm{i}) = (a + a') + (b + b')\mathrm{i}$

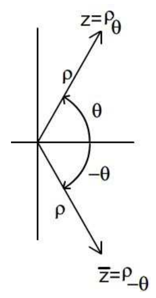

Figura 1.19: Conjugado de z

- Producto: $\rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot \rho'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \rho\rho'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \rho\rho'_{\theta+\theta'}$

  Si los números complejos están expresados en forma binómica:
  $z_1 = \rho_\theta = a + b\mathrm{i}, \quad z_2 = \rho'_{\theta'} = a' + b'\mathrm{i}$
  $z_1 \cdot z_2 = A + B\mathrm{i}$ ¿Cuánto valen A y B para que sea compatible con la definición?

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 =& \rho\rho'_{\theta+\theta'} \equiv \rho\rho'\left(\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta+\theta')\right) = \\ =& \rho\rho'\left(\cos\theta\cos\theta' - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' + \mathrm{i}(\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta' + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta')\right) = \\ =& \rho\cos\theta\rho'\cos\theta' - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\rho'\,\mathrm{sen}\,\theta' + \mathrm{i}(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\rho'\cos\theta' + \rho\cos\theta\rho'\,\mathrm{sen}\,\theta') = \\ =& aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + ba') \end{aligned}$$

  Por tanto $(a + b\mathrm{i}) \cdot (a' + b'\mathrm{i}) = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba')$
  Se multiplican igual que los binomios reales, teniendo en cuenta que $\mathrm{i}^2 = -1$

- División: $\dfrac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} = r_\alpha$ Buscamos r_α que sea compatible con la definición.

$$\rho_\theta = \rho'_{\theta'} \cdot r_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \rho' r_{\theta'+\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho' r \Rightarrow r = \dfrac{\rho}{\rho'} \\ \theta + 2k\pi = \theta' + \alpha \Rightarrow \alpha = \theta - \theta' + 2k\pi \end{cases}$$

  de otro modo, empleando la forma exponencial:

$$\frac{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\rho'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \Rightarrow \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho' r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\theta')} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho' r \Rightarrow r = \dfrac{\rho}{\rho'} \\ \theta = \alpha + \theta' + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \theta - \theta' \end{cases}$$

  Ejercicio 1.2 *Dividir dos complejos expresados en forma binomial.*

$$\frac{a + b\mathrm{i}}{a' + b'\mathrm{i}} = \frac{(a + b\mathrm{i})(a' - b'\mathrm{i})}{(a' + b'\mathrm{i})(a' - b'\mathrm{i})} = \frac{aa' + bb' + \mathrm{i}(-ab' + a'b)}{a'^2 + b'^2}$$

  Ejercicio 1.3 *Calcular* $\mathrm{i}^n \quad n = 1, 2, 3, \cdots$

Una primera forma de hacerlo:

$n = 1 \rightarrow \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$
$n = 2 \rightarrow \mathrm{i}^2 = -1$
$n = 3 \rightarrow \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$
$n = 4 \rightarrow \mathrm{i}^4 = 1$
$\vdots$

$n > 4 \Rightarrow n = 4k + r \quad k \in \mathbb{N}, \quad r = 0, 1, 2, 3$

$$\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k+r} = \left(\mathrm{i}^4\right)^k \cdot \mathrm{i}^r = \mathrm{i}^r \quad \text{(conocido)}$$

Veamos una segunda forma:

$$\mathrm{i}^n = \left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)^n = 1_{n\frac{\pi}{2}} \equiv \cos n\tfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, n\tfrac{\pi}{2} =$$
$$= \begin{cases} \text{Si } n \text{ es par: } n = 2k & \Rightarrow \cos k\pi = (-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots \\ \text{Si } n \text{ es impar: } n = 2k+1 & \Rightarrow \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k \cdot \mathrm{i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

- Potencias enteras de z:

$$(\rho_\theta)^n = \rho^n_{n\theta} \equiv (\rho \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \rho^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, n\theta)$$

igualdad conocida como **Fórmula de Moivre**

- Raíces:

$$\sqrt[n]{\rho_\theta} = \rho'_{\theta'} \Leftrightarrow \rho_\theta = \rho'^n_{n\theta'} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho'^n \\ \theta = n\theta' + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho' = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta' = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{¿infinitas raíces?}$$

Por ejemplo: $\sqrt{\mathrm{i}} = \sqrt{1_{\frac{\pi}{2}}} \overset{\mathrm{n=2}}{=} 1_{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}} = 1_{\frac{\pi}{4}+k\pi}$

$k = 0 \Rightarrow z_0 = 1_{\frac{\pi}{4}}$
$k = 1 \Rightarrow z_1 = 1_{\frac{\pi}{4}+\pi} = 1_{\frac{5\pi}{4}}$
$k = 2 \Rightarrow z_2 = 1_{\frac{\pi}{4}+2\pi} = 1_{\frac{\pi}{4}} = z_0$ Se repite
$k = 3 \Rightarrow z_3 = 1_{\frac{\pi}{4}+3\pi} = 1_{\frac{\pi}{4}+\pi} = z_1$ Se repite
$k = 4 \Rightarrow z_4 = 1_{\frac{\pi}{4}+4\pi} = 1_{\frac{\pi}{4}+4\pi} = z_0$ Se repite
Es decir, para $k \geq 2$, aparecen los mismos valores z_0, z_1.

y para k negativos:

$k = -1 \Rightarrow z_{-1} = 1_{\frac{\pi}{4}-\pi} = 1_{\frac{\pi}{4}+\pi} = z_1$
$k = -2 \Rightarrow z_{-2} = 1_{\frac{\pi}{4}-2\pi} = 1_{\frac{\pi}{4}} = z_0$
$k = -3 \Rightarrow z_{-3} = 1_{\frac{\pi}{4}-3\pi} = 1_{-\frac{3\pi}{4}} = z_1$

$k = -4 \Rightarrow z_{-4} = 1_{\frac{\pi}{4} - 4\pi} = 1_{\frac{\pi}{4}} = z_0$

Es decir, de nuevo aparecen las mismas raíces z_0, z_1

Así pues sólo hay *dos* raíces diferentes.

En general:

$$\sqrt[n]{\rho}_{\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \begin{cases} k = 0 \rightarrow \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\theta}{n}} = z_0 \\ k = 1 \rightarrow \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\theta+2\pi}{n}} = z_1 \\ \vdots \\ k = n-1 \rightarrow \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}} = z_{n-1} \end{cases}$$

pero si $k = n \rightarrow \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\theta+2n\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho}_{\theta+2\pi} = z_0$

Luego: $\sqrt[n]{\rho_\theta} = \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

Sólo hay n raíces distintas. (Ver la figura 1.20)

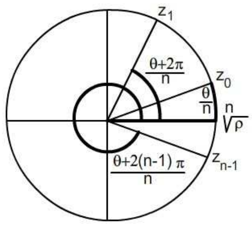

Figura 1.20: Raíces n-ésimas de z

Podemos, además, interpretar gráficamente estas n raíces del número complejo z: Las n raíces dividen a la circunferencia de radio $\sqrt[n]{\rho}$ en n partes iguales.

La diferencia de argumentos entre dos raíces consecutivas es constante:

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} - \frac{\theta + 2(k-1)\pi}{n} = \frac{2k\pi - 2k\pi + 2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

Como ejercicio, vamos a construir un pentágono regular arbitrario (ver la figura 1.21):

Empezamos por calcular un pentágono (ver la figura 1.22) calculando las raíces quintas del complejo $z = 1$ (número real positivo)

$$\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1_0} = 1_{\frac{0+2k\pi}{5}} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$z_0 = 1_0, \quad z_1 = 1_{\frac{2\pi}{5}}, \quad z_2 = 1_{\frac{4\pi}{5}}, \quad z_3 = 1_{\frac{6\pi}{5}}, \quad z_4 = 1_{\frac{8\pi}{5}}$$

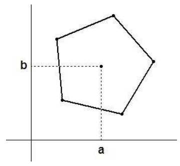

Figura 1.21: Pentágono

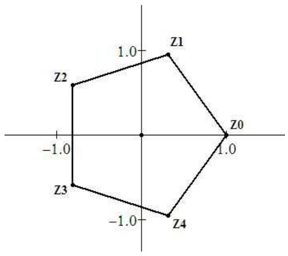

Figura 1.22: Pentágono centrado en el origen

Ahora podemos conseguir cualquier pentágono regular mediante las transformaciones: giro, escala y traslación:

Si el centro no es el origen, haremos una traslación:

$$z'_k = z_k \ + (\, a + b\,\mathrm{i})$$

¿Cuánto mide cada lado?

$$|z_0 - z_1| = |1_0 - 1_{\frac{2\pi}{5}}| = |1 - \cos\frac{2\pi}{5} - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5}| = \sqrt{\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \mathrm{sen}^2\,\frac{2\pi}{5}} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}} \approx 1{,}17$$

Para variar el lado, haremos un cambio de escala. ¿Cuánto vale el lado si $|z| = r^5$?.

En general

$$z'_k = z_k \cdot \rho_\theta \ + \ a + b\,\mathrm{i}$$

Ahora vamos a generalizar esta solución. Calculemos el lado de un polígono de n lados inscrito en una circunferencia de radio R

$$|z_0 - z_1| = |R_0 - R_{\frac{2\pi}{n}}| = \left| R - R\cos\frac{2\pi}{n} - R\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n} \right| = R\sqrt{\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \mathrm{sen}^2\,\frac{2\pi}{n}} = R\sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}}$$

¿Qué crees qué ocurre si n aumenta?. ¿Hacia qué valor se acerca?. ¿Se esperaba este resultado?.

Calculemos el perímetro:

$$L = Rn\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{n}} = Rn\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)} = Rn\sqrt{2\cdot 2\,\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}} = Rn\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

¿Hacia donde tenderá esa sucesión?

Si tomamos n como variable real, $n \to \infty$ y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} 2Rn\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} 2R\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{n\to\infty} 2R\,\frac{\cos\frac{\pi}{n}\cdot\dfrac{-\pi}{n^2}}{\dfrac{-1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 2\pi R\,\cos\frac{\pi}{n} = 2\pi R$$

¿Esperábamos éste resultado?

Calculemos el apotema a:

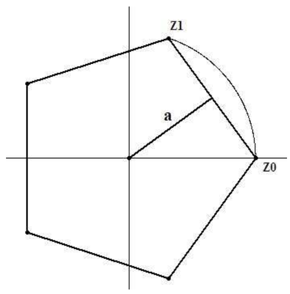

Figura 1.23: Apotema

$$\left|\frac{z_0-z_1}{2}\right| = \ldots = \frac{R}{2}\sqrt{2+2\cos\frac{2\pi}{n}} = \frac{R}{2}\sqrt{2\left(1+\cos\frac{2\pi}{n}\right)} = \frac{R}{2}\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{n}} = R\,\cos\frac{\pi}{n}$$

Si $n\to\infty$, $a \to R$ ¿Esperábamos éste resultado?.

Calcular el área:

$$A = \frac{\text{Perímetro x Apotema}}{2} = \frac{1}{2}\,Rn{\cdot}2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\,{\cdot}R\,\cos\frac{\pi}{n} \to \frac{1}{2}\,2\pi R\,R = \pi R^2 \quad \text{¿Esperábamos éste resultado?}$$

- Exponenciación de $z\in\mathbb{C}$

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \ \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\operatorname{sen} y) = \mathrm{e}^x_y \quad (\text{módulo } \mathrm{e}^x,\ \text{argumento } y)$$

Ejemplo: $\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^2_{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

Ejercicio 1.4 *Obtener los complejos z tales que:* $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^z) = 0$ *ó* $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z) = 0$

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z) = 0 \Leftrightarrow \cos y = 0 \Leftrightarrow y = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

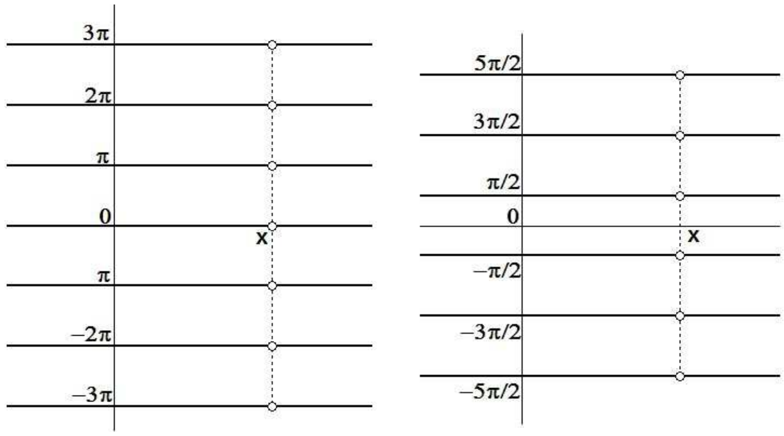

Figura 1.24: Ejercicio 1.4

- Logaritmo neperiano de z:

  Dado $z \in \mathbb{C}$, se trata de despejar z' de la expresión $\mathrm{e}^{z'} = z$, compatible con la exponencial:

  Dados: $\begin{cases} z = \rho_\theta & \text{(conocido)} \\ z' = x + \mathrm{i}y & \text{(desconocido)} \end{cases}$

$$\mathrm{e}^{z'} = z \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \rho_\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^x = \rho \Leftrightarrow x = \ln \rho \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

  por lo tanto

$$\ln(\rho_\theta) \;=\; \ln \rho \;+\; \mathrm{i}(\theta + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

  Existen infinitos valores. Al número complejo que se obtiene tomando $k = 0$, se le llama *valor principal.*

  Ejemplo: $\ln(-3) = \ln(3_\pi) = \ln 3 + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi)$
  (En $\mathbb{R}$ no existe $\ln(-3)$ por eso ningún valor de estos es real).
  $\ln(3) = \ln(3_0) = \ln 3 + \mathrm{i}(2k\pi)$. Si $k = 0$, la solución es real, es el logaritmo neperiano real.

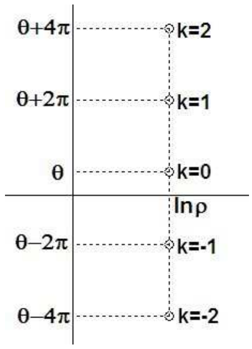

Figura 1.25: Logaritmo de z: infinitos valores

Ejercicio 1.5 *¿Cuánto vale* $\ln z$ *si* $z \in \mathbb{R}$*?*

Sea $z = x$

$$\ln(x+0\mathrm{i}) = \ln|x|+\mathrm{i}(\arg\, z+2k\pi) = \begin{cases} \text{Si } x>0 & \Rightarrow \arg\, z = 0 \Rightarrow \ln z = \ln x + \mathrm{i}(2k\pi) \\ & \text{Si } k=0 \Rightarrow \text{ neperiano real usual} \\ \text{Si } x<0 & \Rightarrow \arg\, z = \pi \Rightarrow \ln z = \ln(-x) + \mathrm{i}(\pi+2k\pi) \\ & \text{nunca real} \end{cases}$$

Ejercicio 1.6 *¿Para qué valores de* $z \in \mathbb{C}$, $\ln z \in \mathbb{R}$*?*

- Exponenciación general: Si $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$.
  Del mismo modo, en $\mathbb{C}$:

  $$z_1^{z_2} = \mathrm{e}^{z_2 \ln z_1}$$

Ejercicio 1.7 *Para* $z_1 = \rho_\theta,\ z_2 = \rho'_{\theta'}$*, obtener las partes real e imaginaria de* $z_1^{z_2}$*. ¿Cuándo es real?*

Ejemplo: $\mathrm{i}^{2\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\ln \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\left(\ln 1+\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\right)} = \mathrm{e}^{-2\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

- Funciones trigonométricas complejas:
  Sea la función $h(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$ ¿qué ocurre si $z \in \mathbb{R}$, es decir, si $z = x + 0\mathrm{i}$?:

  $$h(x+0\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \frac{\cos x + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, x - \cos x + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, x}{2\mathrm{i}} = \mathrm{sen}\, x$$

  Por eso definiremos:

  $$\mathrm{sen}\, z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Ejemplo: $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\mathrm{i})}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{ie}^{-1}+\mathrm{ie}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2}$

$$\cos z = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 z} = \sqrt{1+\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{4}} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}+2}}{2} = \frac{\sqrt{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})^2}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

y por tanto:

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Ejercicio 1.8 *Demostrar que* $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sqrt{z^2} = \pm z$

$$z = \rho_\theta \Rightarrow \sqrt{z^2} = \sqrt{\rho^2_{2\theta}} = \rho_{\frac{2\theta+2k\pi}{2}} = \begin{cases} (k=0) & \rho_\theta = z \\ (k=1) & \rho_{\theta+\pi} = -z \end{cases}$$

Ejercicio 1.9 *Averiguar cuáles de las siguientes propiedades de* $\operatorname{sen} x, \cos x \quad x \in \mathbb{R}$, *se cumplen también para* $z \in \mathbb{C}$*:*

1. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
2. $\cos(-x) = \cos x$
3. $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$
4. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
5. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
6. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
7. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
8. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
9. $|\operatorname{sen} x| \leq 1$
10. $|\cos x| \leq 1$
11. $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$
12. $\cos(x+2\pi) = \cos x$
13. $\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$
14. $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} x$

- Funciones hiperbólicas complejas:

$$\operatorname{senh} z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

Ejercicio 1.10 *Calcular:* $\operatorname{senh}(-z)$, $\quad \cosh(-z)$, $\quad \cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z)$