Capítulo 1

Problemas de complejos

1.1. Vectores

1. Demostrar que son ciertas las siguientes afirmaciones:

   a) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

   b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (Desigualdad triangular)

   ¿ Cuándo se cumple la igualdad?

2. Utilizando la fórmula de Herón $\left(A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right)$, calcular el área del triángulo cuyos vértices son los afijos de los complejos raíces de la ecuación $z^3 - (5+2\mathrm{i})z^2 + (3+9\mathrm{i})z + (4-4\mathrm{i}) = 0$. (Nota: i es una de las raíces).

3. Indicar el significado geométrico de las operaciones:

   a) Conjugado de un vector.

   b) Opuesto de un vector.

   c) Opuesto del conjugado de un vector.

   d) Conjugado del opuesto de un vector.

   e) Multiplicación de un complejo por su conjugado.

1.2. Operaciones

4. Demostrar que en $\mathbb{C}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

a) $e^0 = 1$

b) $e^z \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

c) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

d) $|e^z| = e^{Re(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

e) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i \qquad k \in \mathbb{Z}$

f) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i \qquad k \in \mathbb{Z}$

5. ¿Qué condiciones deben de cumplir los argumentos de dos números complejos para que el producto de dichos números sea un número real?.

6. ¿Qué condiciones deben de cumplir los argumentos de dos números complejos para que su cociente sea un número complejo imaginario puro?.

7. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el número complejo $z = \dfrac{3-2a\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}$ Determinar a para que se cumpla, en cada caso, que

   a) Sea un número imaginario puro

   b) Sea un número real

   c) Esté sobre la bisectriz del primer cuadrante

8. Calcular el valor de a que cumple:

   a) $\dfrac{a+\mathrm{i}}{a-\mathrm{i}}$ es real

   b) $\dfrac{a+\mathrm{i}}{a-\mathrm{i}}$ es imaginario puro

9. Calcular A y B siendo

$$A = 1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

$$B = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

   (Sugerencia: $A + B\mathrm{i} = \sum_{k=0}^{n-1} r_k$ donde $r_k = \sqrt[n]{1}$)

10. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad n \geq 2$ y $\forall z \in \mathbb{C}$, la suma de las raíces enésimas de z es cero. ¿Qué puede decirse del producto de las raíces?

11. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

   a) $|e^z| = e^{|z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

   b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

   c) $|z_1 - z_2|$ es la distancia que hay entre los afijos de los complejos z_1 y z_2

d) $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$.

e) $z = \ln \mathrm{e}^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

f) $\ln \dfrac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

12. Analizar el siguiente razonamiento:
$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2\ln(-z) = 2\ln z \Rightarrow \ln(-z) = \ln z \Rightarrow -z = z$ (conocida como paradoja de J. Bernouilli).

1.3. Aplicaciones: giros, traslaciones y homotecias

13. Indicar el significado geométrico de las operaciones:

a) Multiplicar un complejo por un número real positivo. Ver los casos en los que el número es mayor que la unidad o menor que ella.

b) Multiplicar un complejo por un número real negativo.

c) Multiplicar un complejo por el número 1_α.

d) Multiplicar un complejo por el número r_α. (Ayuda: $r_\alpha = r \cdot 1_\alpha$)

Aplicarlo a los extremos de un segmento y a un polígono.

14. Los puntos $(2, 3)$ y $(2, 5)$ son vértices opuestos de un octógono regular. Calcular los restantes vértices.

15. Un triángulo equilátero tiene el centro en $(1, 1)$ y un vértice en $(1, 3)$, Hallar los otros dos vértices.

1.4. Otras aplicaciones

16. Se considera un circuito de corriente alterna, de frecuencia ω, formado por una resistencia, una bobina y un condensador. Se define la impedancia de dicho circuito como el número complejo

$$Z = R + (L\omega - \frac{1}{C\omega})\mathrm{i}$$

donde R es la resistencia medida en ohmios, L es la inducción de la bobina medida en henrios y C es la capacidad del condensador medida en faradios.

Si $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$ es la fuerza electromotriz e $I = \frac{E}{Z}$ la intensidad del circuito, se pide:

a) Hallar el ángulo que forman los vectores I y E (ángulo de desfase).

b) Para un valor fijo de R, hallar la relación entre L y C para que I sea máxima (circuito resonante)

1.5. Funciones circulares e hiperbólicas

17. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

a) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 + \operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2 \quad \forall z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 \in \mathbb{C}^*$

b) $\operatorname{ch}(z_1+z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2 \quad \forall z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 \in \mathbb{C}^*$

c) $\operatorname{ctg}(\mathrm{i}z) = \mathrm{i} \cdot \operatorname{cth} z$

d) $\operatorname{sen}(\mathrm{i}z) = \mathrm{i} \cdot \operatorname{sh} z$

e) $\cos z = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2z}{2}}$

18. Resolver las ecuaciones y representar gráficamente las soluciones, de las ecuaciones :

a) $\operatorname{sen} z = 3$

b) $\operatorname{sen}(\mathrm{i}z) + 2\,\mathrm{i}\operatorname{ch}(z) = -1$

c) $\operatorname{cotg} z = 1+\mathrm{i}$

d) $\operatorname{sen} z + \cos z = 1$

1.6. Lugares geométricos

19. Identificar, en cada caso, y representar geométricamente el lugar geométrico de los afijos de los complejos z que verifican:

a) $\overline{z} = \frac{1}{z}$

b) $|z-1+\mathrm{i}| < 2$

c) $Arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$

d) $\dfrac{z}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{z}$