5. GAIA:

Zenbakizko analisia

Matematika Aplikatua,

Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboa Saila

Zientzia eta Teknologia Fakultatea

Euskal Herriko Unibertsitatea

Aurkibidea

5. gaia

Zenbakizko analisia.

5.1. Sarrera.

Matematikan problemak ebazteko bi metodo mota ditugu:

- **Prozesu zehatzak** edo teknika zuzenak; hau da, problemaren soluzio *zehatza* bilatzen dituzten algoritmo finituak erabiltzea, eta

- **Zenbakizko metodoak** edo iteraziozko prozesuak; hau da, lehen emandako doitasun batez sistemaren soluzio *hurbildua* kalkulatzen dituzten metodo errepikari eta konbergenteak erabiltzea. Mota honetako prozesuak makina batek egin ohi ditu eta haien ikerketa *Zenbakizko analisia* arloari dagokio.

Gai honetan matematika-problema berezi batzuk ebazteko iteraziozko prozesuak ikusiko ditugu.

5.2. Ekuazio-sistemak.

Lehenengo gaian ekuazio linealen sistemak ebazteko Gauss-en metodoa erabili dugu; metodo hura *ezabatze gaussiarra* izenez ere ezagutzen dugu, eta, jarraian ikusiko den bezala, iteraziozko prozesua da. Gai hartan ikasi genuenaren arabera, n ezezagun eta n ekuazioko sistema bat goi-triangeluarra bihurtu ondoren, honela geratzen da:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\
a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}$$

Beraz, soluzioa lortzeko, alderantzizko ordezkatze-prozesu honi jarraitu behar diogu (hots, behetik gora):

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$
$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}.$$

Eta, honela, ondoz ondo jardunez, zera dugu:

$$x_i = \frac{b_i - a_{in}x_n - a_{i,n-1}x_{n-1} - \ldots - a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{ii}} = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

non $i = n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$; hots, n iteraziozko prozesu bat da.

5.2.1. Pibotatze partziala.

Ezabatze gaussiarra zehatzago eta hobe egiteko erabiltzen da teknika hau. Ezabatze-prozesuan i-garren errenkadan bagaude, sistema triangeluarraren egiturara egokitzen joateko, a_{ii} osagaiaren azpiko terminoak 0 bihurtzen saiatuko gara eta helburu horrekin $1/a_{ii}$ motako zatiketak parte duten eragiketak egin behar ditugu. Baldin $a_{ii} = 0$ bada, orduan prozesua ezin da bete, baina nahiz eta $a_{ii} \neq 0$ izan, $|a_{ii}| << 0$ oso txikia bada, orduan eragiketa horiek ondorioztatzen dituzten borobiltze-erroreak itzelak izan daitezke. Guzti horrengatik, beti da komenigarria ahal den diagonal nagusirako a_{ii} osagairik handiena aukeratzea balio absolututz. Hautaketa hori i. urratsean i. errenkadan egingo dugu (hots, a_{ij}, non $j = i, i+1, \ldots, n$ den). Gai hori p-garrena bada, i. eta p. zutabeak trukatuko ditugu. Alegia, hau badugu:

$$\max_{j \geq i}\{|a_{ij}|\} = a_{ip}$$

i. eta p. zutabeak trukatuko ditugu, eta, beraz, x_i eta x_p ere bai.

5.2.2. Pibotatze osoa.

Teknika honetako ezabatze-prozesuan i. errenkadan eta i. zutabean bagaude, geratzen diren gaien artean (hots, a_{lm}, non $l = i, i+1, \ldots, n$ eta $m = i, i+1, \ldots, n$ baitira) balio absolutu handieneko gaia bilatu behar da. Gai hori a_{kp} bada, i. eta k. errenkadak trukatuko ditugu, eta i. eta p. zutabeak ere bai. Alegia, hau badugu:

$$\max_{l\geq i,\ m\geq i}\{|a_{lm}|\} = a_{kp}$$

i. eta k. errenkadak, alde batetik, eta i. eta p. zutabeak, bestetik, trukatuko ditugu, eta, beraz, x_i eta x_p ere bai.

5.2.3. Beste metodo batzuk.

Baldin i. urratsean i. ekuaziotik x_i aldagaia askatzen badugu beste guztien menpean eta adierazpen hau beste ekuazio guztietan ordezten badugu, orduan sistemaren heina $n\times n$-tik $(n-1)\times(n-1)$-ra murriztuko dugu. Prozesua hurrenez hurren n aldiz errepikatzen badugu, azkenean $\{x_1,\ldots,x_n\}$ aldagaien balioa $\{b_1,\ldots,b_n\}$ konstanten menpean adieraziko ditugu. Algoritmo honen izena *Gauss-Jordan metodoa* da.
$Ax = b$ ekuazio-sistemako A matrizea simetriko eta positibo definitua bada, orduan $A = R^tR$ biderkaduraren moduan deskonposa daiteke, non R matrize goi-triangeluarra den. Metodo horri *Choleski-ren deskonposaketa* deitzen zaio, eta haren bidez errazago ebatz daiteke ekuazio-sistema.
Ohartu teknika hauek matrize baten determinantea kalkulatzeko erabil ditzakegula, zeren matrize triangeluarraren edo matrize diagonalaren determinantea diagonalean dauden elementuen biderkadura baita.

5.3. Ekuazio ez-linealen ebazpena.

5.3.1. Erroak isolatzea.

Ekuazio ez-lineal gehienak zailegiak dira zehatz mehatz askatzeko. Horregatik, oso garrantzitsuak dira ekuazioaren erroen bilakuntza hurbildua eta errorearen estimazioa.
Izan bitez $[a,b]$ tartea eta $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio ondo definitua eta jarraitua tarte horretan. Funtzioaren erroak bilatzea eta $f(x) = 0$ ekuazioaren soluzioak asmatzea problema bera da. Berdintza hori betetzen duen $x = p$ soluzioari *funtzioaren erro* esango diogu.
Batzuetan, $f'(x)$ edo $f''(x)$ funtzioen existentzia funtsezkoa izango da helburua lortzeko. Suposa dezagun $f(x) = 0$ ekuazioaren erro guztiak desberdinak direla. Hortaz, erro bakoitzaren ingurune batean ez dago beste errorik. Orduan, bi urrats hauek beteko ditugu:

(a) Erroen bereizketa: erro bakoitzaren $[\alpha, \beta]$ ingurune ahalik eta txikiena aurkitzea; non tartearen barnean, ez da ekuazioaren beste errorik egon behar.

(b) Erro hurbilduen balioak egokitzea: emaitza gero eta hobeak hurbiltzea.

Jarraian, bi propietate hauek kontuan hartu beharko ditugu.

(P_1) *Izan bedi $f(x)$ jarraitua $[a, b]$ tartean, eta izan bitza f-ek $[a, b]$-ren muturretan zeinu desberdinak ditu (hots, $f(a) \cdot f(b) < 0$), orduan f funtzioak gutxienez c erro bat izango du (a, b) tartean; hots, $\exists c \in (a, b)$, non $f(c) = 0$ den.*

(P_2) *Baldin f deribagarria bada (a, b) tartean, eta f'-ek tarte horretan zeinua aldatzen ez badu (hau da, f monotonoa bada), orduan f funtzioak ez du $[a, b]$ tartean erro bat baino gehiago izango.*

Ondorioz, $f(x) = 0$ ekuazioaren erroak kalkulatzeko urrats hauei jarraituko diegu:

1. Funtzioen erroak tarte desberdinetan isolatuko ditugu (BP aplikatuz ahal bada). Lehendabizi, emandako tartearen partizio bat egiten da: $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < b$ (adibidez, f deribagarria bada, deribatuaren zeinu-aldaketak erabiliz lor dezakegu partizioa, hau da, $f'(x)$ funtzioaren erroak kalkulatuz).

2. Ondoz ondoko puntu-bikoteak bilatuko ditugu AP aplikatuz: hala, f funtzioak zeinu desberdinak hartuko ditu. Hau da, α_k, α_{k+1} izango ditugu, non $f(\alpha_k) \cdot f(\alpha_{k+1}) < 0$ den. Horrek adierazten digu tarte horretan $f(x)$-ren erro bat existitzen dela.

5.1. adibidea. Ebatzi $x^4 - 4x - 1 = 0$ ekuazioa.

Ebazpena: Izan bedi $f(x) = x^4 - 4x - 1$. Funtzio horrek, 4. mailako polinomio bat denez, gehienez 4 erro izango ditu. Funtzio horren zeinu-aldaketak finkatzeko, aski dira emandako tartearen muturrak eta funtzioaren maximo eta minimo lokalak (BP aplikatuz gero). Kasu horretan $f'(x) = 4(x^3 - 1)$ aztertzen da, eta, ondorioz, $x = 1$ da $f'(x)$-ren zeinu-aldaketa bakarra. Hain zuzen ere:

$$x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f'(x) < 0$$
$$x \in (1, \infty) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Hortaz, $(-\infty, 1)$ tartean, $f(x)$ beherakorra da, eta, $(1, \infty)$ tartean, $f(x)$ gorakorra da. Gainera, tarte horien muturretan, zera gertatzen da:

$$f(-\infty) \cdot f(1) < 0 \quad \text{eta} \quad f(1) \cdot f(\infty) < 0,$$

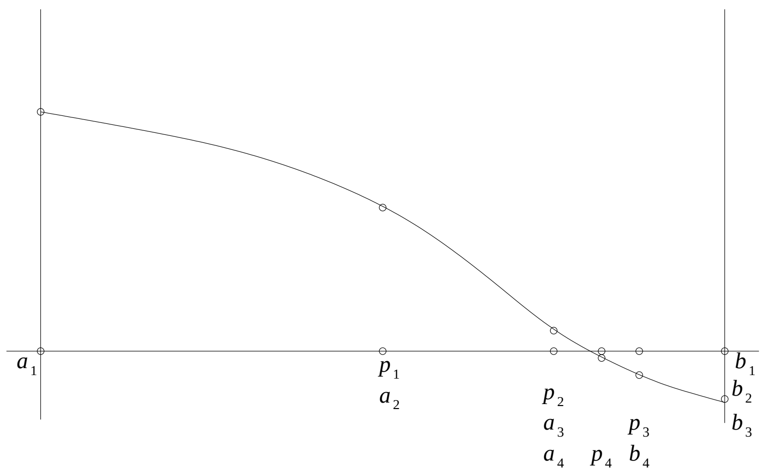
Ondorioz, bi tarte horietan $f(x)$-k 0 balioa hartzen du (AP aplikatuz). Hau da, tarte bakoitzean erro bat dago. □

Jarraian, galdera honi erantzungo diogu: erro bakoitza tarte batean isolatu eta gero, nola kalkula dezakegu erro hori?

5.3.2. Bisekzio-metodoa.

Metodo sinpleenetariko bat da.

Demagun f funtzioa jarraitua dela $[a, b]$ tartean eta $f(a) \cdot f(b) < 0$ betetzen dela; orduan AP-ren arabera p balio bat existitzen da (a, b) tartean, non $f(p) = 0$ den. Suposa dezagun, orobat, tarte horretan erro hau baino ez dagoela.



5.1. irudia. Bisekzio-metodoa.

Lehendabizi, $a = a_1$ eta $b = b_1$ izendatuko dira, eta emandako tartea bi zati berdinetan bereiziko da; $[a, b] = [a_1, p_1] \cup [p_1, b_1]$, non $p_1 = (a_1 + b_1)/2$ erdiguneko balioa den. Orain, hasierako tartearen luzera-erdiko azpitarte batean egongo da p erroa, eta zein den jakiteko, $f(a_1) \cdot f(p_1)$ balioztatzen da. Baldin azken balio hori negatiboa bada, orduan p erroa $[a_1, p_1]$ lehenengo azpitartean egongo da eta, ondorioz, prozesua $[a_2, b_2]$ tarte murriztuan errepikatu behar da, non mutur berriak $a_2 = a_1$ eta $b_2 = p_1$ diren. Bestela erroa $[p_1, b_1]$ azpitartean dago eta $[a_2, b_2]$ tartea aukeratuko dugu $a_2 = p_1$ eta $b_2 = b_1$ izendatuz. Iterazio bakoitzean dagoen tartearen luzera erdibitu egiten da, eta, $n + 1$ iterazio burutu ondoren $[a_{n+1}, b_{n+1}]$-ren luzera $(b - a)/2^n$ izango da.

Noski, $p \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ dagoenez errorea $|p_{n+l} - p| \leq (b-a)/2^n$ izango da. Beraz, n handituz, errorea gero eta txikiagoa egiten da.
Alde batetik, bisekzio-metodoak bi eragozpen nabariak ditu, eta hauxek dira: bata, metodoa astiro hurbiltzen dela soluziorantz, eta bestea, hurbildu bitartean alde batean utz ditzakeela hurbilketa onak. Beste aldetik, metodo honek beti soluziorantz konbergitzen du, eta, horregatik, erabilgarria da hasierako estimazio bat asmatzeko, eta, jarraian, beste metodo eraginkorrago bat aplikatu ahal izateko.

5.2. adibidea. Bisekzio-algoritmoa erabiliz, kalkulatu honako ekuazio honen soluzio hurbildu bat: $e^x = \sin x,\ \ x \in [-4, -3]$ izanik ($|p_n - a_n| < 5 \cdot 10^{-2}$ izan arte).

Ebazpena: Izan bedi $f(x) = e^x - \sin x$, orain ekuazioaren soluzio bat f funtzioaren erro bat izango da. Hasteko $[a_1, b_1] = [-4, -3]$, $f(a_1) = f(-4) = -0.7385 < 0$ eta $f(b_1) = f(-3) = 0.1909 > 0$ direnez, $[-4, -3]$ tartean gutxienez erro bat dago.
Jarraian, $[-4, -3]$ tartea erdibituko dugu. Erdigunea $p_1 = -3.5$ da; $[-4, -3] = [-4, -3.5] \cup [-3.5, -3]$, $f(p_1) = f(-3.5) = -0.3206 < 0$ denez, $[a_2, b_2] = [-3.5, -3]$ tartean egongo da erroa.
Orain, tartearen erdigunea $p_2 = -3.25$ da; $[-3.5, -3] = [-3.5, -3.25] \cup [-3.25, -3]$, $f(p_2) = f(-3.25) < 0$ denez, $[a_3, b_3] = [-3.25, -3]$ tartean egongo da erroa.
Eta horrela jarraituz nahi dugun bezainbeste hurbilduko gara errorantz. Ariketa mota hauetan interesgarria da urrats bakoitzean erabiltzen diren datu sortarekin taula eraikitzea. Datu ordenatuak edukitzeak metodo garapena ulertzen eta eragiketa-akatsak ikusten laguntzen du.

Taula 5.I. Bisekzio-metodoa.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$p_n - a_n$
1	-4	-3	-3.5	-0.3206	0.5
2	-3.5	-3	-3.25	-0.0694	0.25
3	-3.25	-3	-3.125	0.0605	0.125
4	-3.25	-3.125	-3.1875	-0.0046	0.0625
5	-3.1875	-3.125	-3.15625	0.02793	0.03125

Beraz, 4 iterazio egin ondoren lorturiko soluzio hurbildua $x = -3.15625$ da, eta $|p_5 - p| < |p_5 - a_5| = 0.03125 < 5 \cdot 10^{-2}$ sortzen den errorea.

5.3.3. Newton-en metodoa.

Metodo hau oso azkarra da, baina badu arazo bat: errotik nahiko hurbil egon behar du hasierako puntuak.
Oinarri analitikoa Taylor-en serie-garapenean datza. Izan bedi $f \in C^2[a,b]$ non $x = p$ balioa f-ren erroa den eta $p_0 \in [a,b]$ haren hurbilketa on bat. Orduan, $|p_0 - p|$ txikia eta $f(p_0) \neq 0$ izango dira. Funtzio honen p_0-ren inguruneko Taylor-en garapena hau da:

$$f(x) = f(p_0) + (x - p_0)f'(p_0) + \frac{1}{2}(x - p_0)^2 f''(\psi)$$

non ψ balioa p_0 eta x-ren artean dagoen. Beraz, Taylor-en garapena $x = p$ erroan idazten badugu, $f(p) = 0$ bete behar dela kontutan hartuz, hau lortuko dugu:

$$0 = f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{1}{2}(p - p_0)^2 f''(\psi) = 0 \Rightarrow$$

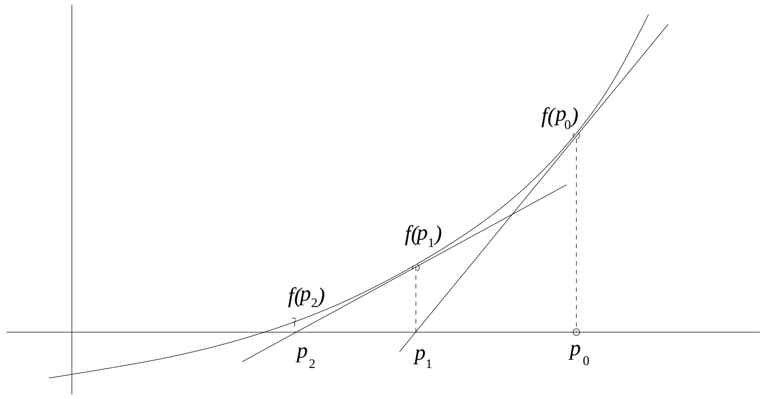
$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) \Rightarrow p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}.$$

Baina, azken ondorioa lortzeko, $(p - p_0)^2 f''(\psi)/2$ batugaia ezabatu dugu, baztergarria dela suposatzen baita; izan ere, $|p - p_0|$ tartea nahiko txikia dela jo dugu. Arrazoi horretan datza, hain zuzen ere, metodoaren konbergentziaren baldintza. Azken adierazpenak erakutsi digu zenbat balio behar duen p puntua f-ren erroa izateko. Zentzuzkoa da balio honi p_1 izena ematea, bilatutako p errotik hasierako estimazioa (p_0) baino hurbilago dagoelako. Teknika hori errepikatuz, metodoaren iterazio-formula lortuko dugu:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Gorago baztertu dugun gaiak errorea ematen digu, eta hori $(p - p_n)^2$-aren menpekoa da. Propietate hau duten metodoak koadratikoki konbergenteak direla esaten da.
Geometrikoki, hau egiten du metodoak: OX ardatza ebakitzen duen $y = f(x)$ kurbaren ordez $(p_0, f(p_0))$ puntutik pasatzen den kurbaren ukitzailea erabiltzen du. Gero, ebakidura puntuaren koordenatuak, $(p_1, 0)$, OX-rekin ($y = 0$-rekin) kalkulatzen da, eta, hala, p_1 puntua lortzen da. Teknika hori errepikatuz, $(p_n, f(p_n))$ puntutik pasatzen den $f(x)$-ren ukitzailearen ekuazioa lortzen da, hots, $y - f(p_n) = f'(p_n)(x - p_n)$. Orain, OX ardatzarekin ($y = 0$-rekin) ebakiz, x aska daiteke. Ondorioz,

$x = p_n - f(p_n)/f'(p_n)$ lortzen da. $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ segida monotono eta konbergentea lortzeko komenigarria da hasierako hurbilketatzat $f(p_0) \cdot f''(p_0) > 0$ betetzen duen puntua aukeratzea.



5.2. irudia. Newton-en metodoa.

5.3. adibidea. Newton-en metodoa erabiliz, kalkulatu $x = \cos x$ ekuazioaren soluzio hurbildu bat ($|f(p_n)| < 10^{-5}$ bete arte).

Ebazpena: Izan bedi $f(x) = \cos x - x$. Orain, $f(x)$-ren erro bat aurkitu behar dugu. Baina, lehendabizi, soluzio bat isolatu behar dugu tarte batean. Horretarako, hasierako AP propietatea (Bolzano-ren teorema) erabiliko dugu. $f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$ eta $f(0) = 1 > 0$ direnez, funtzioak gutxienez erro bat dauka $(0, \pi/2)$ tartean (erro bakarra dela erraz froga daiteke $\forall x,\ f'(x) = -\sin x - 1 \leq 0$ delako). Hona hemen Newton-en iterazioa kasu honetan:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos(p_{n-1}) - p_{n-1}}{-\sin(p_{n-1}) - 1}, \quad n \geq 1$$

p_0 geometriaren arabera hautatuko dugu. Kasu honetan $p_0 = \pi/4 = 0.785398$ egokia dela ikus daiteke $f(p_0) \cdot f''(p_0) > 0$ delako.

Taula 5.II. Newton-en iterazioak.

n	p_n	$f(p_n)$	$f'(p_n)$
0	0.785398	$-0.782911 \cdot 10^{-1}$	-1.70711
1	0.739536	$-0.754651 \cdot 10^{-3}$	-1.67395
2	0.739085	$0.22295 \cdot 10^{-6}$	-1.67361
3	0.739085	$0.22295 \cdot 10^{-6}$	-1.67361

Beraz, 4 iterazio egin ondoren, $x = 0.739085$ dugu ekuazioaren soluzio hurbildua. □

5.4. adibidea. Newton-en metodoa erabiliz eta $p_0 = -3$ hartuz, kalkulatu $e^x = \sin x$ ekuazioaren soluzio hurbildu bat ($|f(p_n)| < 10^{-3}$ bete arte).

Ebazpena: Hemen $f(x) = e^x - \sin x$ dugu eta

$$p_n = p_{n-1} - \frac{e^{p_{n-1}} - \sin(p_{n-1})}{e^{p_{n-1}} - \cos(p_{n-1})}, \quad n \geq 1$$

Taula 5.III. Newton-en iterazioak.

n	p_n	$f(p_n)$	$f'(p_n)$
0	-3.0000	0.19091	1.0398
1	-3.1836	$-0.5587 \cdot 10^{-3}$	1.0406
2	-3.1831	$-03849 \cdot 10^{-4}$	1.0406
3	-3.1831	$-03849 \cdot 10^{-4}$	1.0406

Beraz, 4 iterazio egin ondoren, $x = -3.1831$ dugu ekuazioaren soluzio hurbildua. □

5.3.4. Puntu finkoaren iterazioa.

Definizioa.

Demagun $f(x) = 0$ funtzioaren $x = p$ erro bat bilatu nahi dugula. Batzuetan komenigarria da ekuazio honen baliokidea den $x = F(x)$ berdintza idaztea. F funtzioa eraikitzeko aukera ugari daude, adibidez $f(x) = x^3 - 3x - e^x + 2 = 0$ funtzioak hiru erro ditu $x \approx 0.2$, $x \approx 3$ eta $x \approx 4$ puntuen inguruan eta $x = F(x)$ gisez idazteko zenbait aukera daude, besteak beste,

$$\begin{cases} x = (3x + e^x - 2)^{1/3} = F_1(x), \\ x = \dfrac{x^3 - e^x + 2}{3} = F_2(x), \\ x = \ln(x^3 - 3x + 2) = F_3(x). \end{cases}$$

Hasierako ekuazioaren soluzioa, $f(p) = 0$ edo F funtzioaren puntu finkoa aurkitzea, $F(p) = p$, problema baliokidea da, baina F-k bi baldintza berezi betetzen dituenean errazagoa da zenbakizkoki F-ren puntu finkoa hurbiltzea ondoko iterazioaz definitutako segidak p punturantz konbergituko baitu, $\lim_{n\to\infty} p_n = p$,

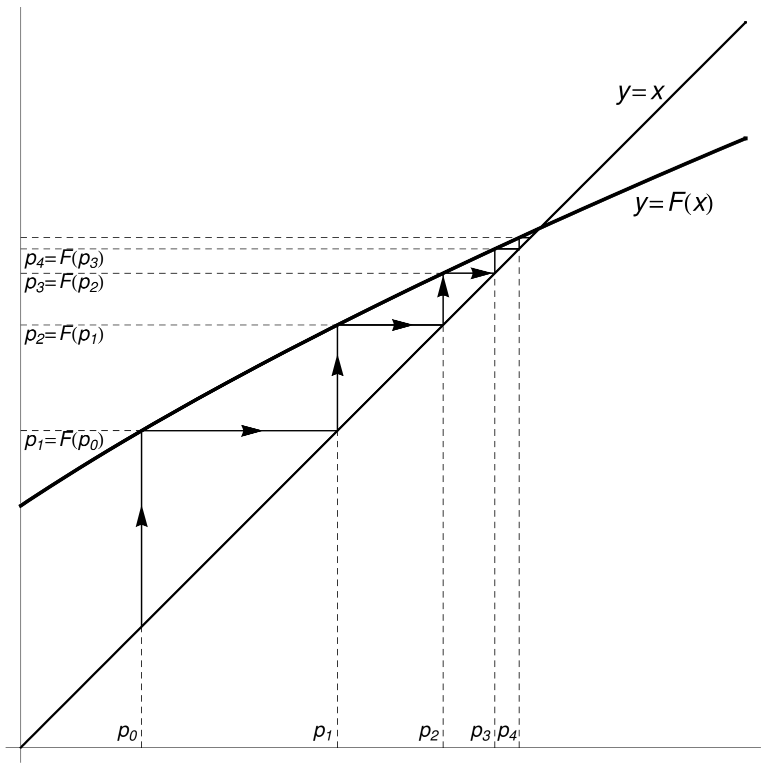
$$p_{n+1} = F(p_n).$$

Segida honen konbergentzia ziurtatzeko F-k bete behar dituen baldintzak hauek dira,

a) Existitu behar da p puntu finkoaren ingurunea, $p \in [a, b]$, non F-ren irudia berorren barruan dagoen, $F : [a, b] \longrightarrow [a, b]$.

b) $[a, b]$ tartean, F funtzioak kontraktiboa izan behar du, hau da, $|F(x_1) - F(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$, $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$.

Baldin aurreko bi baldintzak betetzen badira, orduan edozein $p_0 \in [a, b]$ hasierako balioa aukeratuz, $\{p_n\}_{n\geq 0} \to p$ konbergituko du, (5.3) irudiak erakusten duen moduan, bestela (5.4) irudiak aurkezten duen konbergentzigabeko kasua ager daiteke.
Adibidez lehenbizian ikusitako $f(x) = x^3 - 3x - e^x + 2 = 0$ funtzioaren $x = (x^3 - e^x + 2)/3 = F_2(x)$ askapena aukeratzen badugu, orduan $\forall x \in [0.1, 0.4]$, $F_2(x) \in [0.19, 0.3] \subset [0.1, 0.4]$ eta gainera $|F_2'(x)| < 0.4$. Konbergentzi baldintzak betetzen direnez, orduan $p_{n+1} = F(p_n)$ iterazioak $p = 0.2455$ puntu finkorantz konbergituko duela ziurta dezakegu.

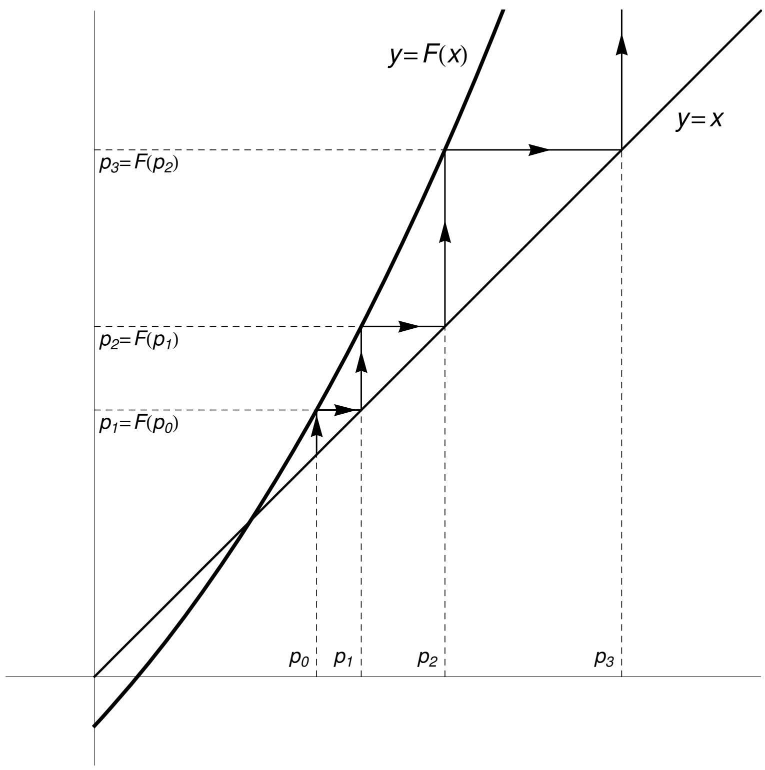


5.3. irudia. Puntu finkoaren metodoa konbergituko du funtzio kontraktibo baterako.

Baldin F funtzioa deribagarria bada (a, b) tartean, orduan erraz froga daiteke zenbakizko metodo honek eraikitzen duen segidaren p_n osagaien errorearen bornapena p puntu finkoarekiko hau betetzen duela:

$$|p_n - p| \leq k^n |b - a|$$

non $k = \sup_{x \in [a,b]} |F'(x)|$ deribatuaren baliorik handiena den. Emaitza garrantsitsu honek zera esaten digu, hainbat eta malda txikieneko F funtzioa aukeratu, orduan eta konbergentzi azkarrago lortuko dugun.



5.4. irudia. Puntu finkoaren metodoa dibergituko du funtzio ez-kontraktibo baterako.

5.5. adibidea. Puntu finkoaren metodoa erabiliz, kalkulatu $x = \cos x$ ekuazioaren soluzio hurbildu bat $p_0 = \pi/4 = 0.785398$ dela joz. Gehienez, 10 iterazio egin eta eragiketak 6 digitu esangarrietaz burutu (borobildu kalkulagailuak itzultzen dituen 6. digitua).

Ebazpena: Kasu honetan, $f(x) = x - \cos x = 0$ ekuazioa dugu eta $F(x) = \cos x$ kontraktiboa denez $[0, \pi/2]$ tartean, metodo hau erabil daiteke.

Hona hemen puntu finkoaren iterazioa:

$$p_{n+1} = F(p_n) = \cos(p_n), \quad n \geq 1$$

Taula 5.IV. Puntu finkoaren iterazioak.

n	p_n	$F(p_n)$	$f(p_n)$
0	0.785398	0.707107	0.078291
1	0.707107	0.760244	-0.053137
2	0.760244	0.724668	-0.035576
3	0.724668	0.748720	-0.024051
4	0.748720	0.732561	-0.016159
5	0.732561	0.743464	-0.010903
6	0.743464	0.736128	-0.007336
7	0.736128	0.741074	-0.004946
8	0.741074	0.733744	-0.003330
9	0.733744	0.742672	-0.008928

Beraz, 10 iterazio egin ondoren, ez dugu lortu nahi genuen soluzio hurbildua. Ikus daitekeenez, metodo honek Newton-en metodoa baino astiroago konbergitzen du. □

5.3.5. Ekuazio ez-linealen sistemak.

Demagun n ekuazio ez-linealen eta n ezezagunen sistema bat dugula:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Era matrizialean, sistema hori $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ gisaz idatz daiteke, non

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mota honetako sistemak ebazteko Newton-en metodoaren orokortzea aplikatzen dugu. Hau da:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - [\nabla \vec{f}(\vec{x}_n)]^{-1} \vec{f}(\vec{x}_n),$$

non $\nabla \vec{f}(\vec{x}_n)$ matrize jakobiarra den, alegia:

$$\nabla \vec{f}(\vec{x}_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

5.6. adibidea. Izan bedi ondoko ekuazio ez-linealen sistema eta $\vec{x}_0 = (0.5,\ 0.5,\ 0.5)^t$ hasierako puntua. Newton-en metodoaren bitartez, kalkulatu sistema honen soluzio hurbildua eragiketak bost digitu esangarriaz burutuz

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z^2 = 1 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

Ebazpena: Kasu honetan hau dugu:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z^2 - 1 \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -8z \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}.$$

Orduan, $\vec{x}_0$ puntuan:

$$\vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{pmatrix}, \quad \nabla \vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

eta

$$[\nabla \vec{f}(\vec{x}_0)]^{-1} = \frac{1}{-40} \begin{pmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Beraz, lehenengo iterazioa egin eta gero, hauxe lortzen da:

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - [\nabla \vec{f}(\vec{x}_0)]^{-1} \vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.5 \\ 0.375 \end{pmatrix}.$$

Orain, $\vec{x}_1$ puntuan:

$$\vec{f}(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 0.15625 \\ 0.21875 \\ 0.43750 \end{pmatrix}, \quad \nabla\vec{f}(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 1.75 & 1 & 0.75 \\ 3.5 & 1 & -4 \\ 5.25 & -4 & 0.75 \end{pmatrix}$$

eta

$$[\nabla\vec{f}(\vec{x}_1)]^{-1} = \frac{1}{-64.75} \begin{pmatrix} -15.25 & -3.75 & -4.75 \\ -23.625 & -2.625 & 9.625 \\ -19.25 & 12.25 & -1.75 \end{pmatrix}$$

Beraz, bigarren iterazioa egin eta gero, hauxe lortzen da:

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 - [\nabla\vec{f}(\vec{x}_1)]^{-1}\vec{f}(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 0.79464 \\ 0.50000 \\ 0.35417 \end{pmatrix}.$$

Hirugarren iterazioan:

$$\vec{x}_3 = \vec{x}_2 - [\nabla\vec{f}(\vec{x}_2)]^{-1}\vec{f}(\vec{x}_2) = \begin{pmatrix} 0.79058 \\ 0.50000 \\ 0.35355 \end{pmatrix}$$

eta $\vec{f}(\vec{x}_3) = \begin{pmatrix} 0.00001 \\ 0.00004 \\ 0.00005 \end{pmatrix}$.

Beraz, lau digitu esangarri dituen soluzio hurbildu batera heldu gara; alegia, 10^{-4} doitasuneko soluzio batera ($\|\vec{f}(\vec{x}_3)\|_\infty < 0.0001$).

Ondorioz, $x = 0.79058$, $y = 0.50000$ eta $z = 0.35355$ da eskaturiko soluzio hurbildua. □

5.4. Interpolazioa.

Izan bedi $\mathcal{P}_n(x)$ n edo n baino maila txikiagoko polinomioen multzoa. *Interpolazio polinomiala* da $f(x)$ funtzioa $p(x) \in \mathcal{P}_n(x)$ polinomioaren bidez hurbiltzea. Orduan, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinomioa $n+1$ koefiziente edo parametroren menpe dagoenez, $n+1$ baldintza aske behar dira, polinomioa erabat zehaztua izateko. Baldintza horiek izan daitezke puntu batzuetako polinomioaren balioak, edo polinomioaren deribatuaren balioak. Hainbat motako baldintzek interpolazio-polinomioak sortzen dituzte: Lagrange-rena, Taylor-ena, Hermite-rena eta Hermite-ren orokortuarena, besteak beste.

5.4.1. Lagrange-ren interpolazioa.

Definizioa.

Izan bitez $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ $\quad n+1$ puntu desberdin eta $f(x)$ funtzioa. Orduan, $p(x) \in \mathcal{P}_n(x)$ polinomioari *Lagrange-ren polinomio* deritzogu, hau betetzen denean:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Polinomio honen koefizienteak biltzearen prozesuari *Lagrange-ren interpolazioaren problema* deitzen diogu.
Polinomioa zehazteko metodo batzuk existitzen dira. Honako hau ikusiko dugu:

$$p(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \ldots + f(x_n)l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x), \qquad (5.1)$$

non

$$\begin{aligned} l_i(x) &= \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \ldots \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{x - x_n}{x_i - x_n} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \qquad (5.2) \end{aligned}$$

Argi dago $l_i(x) \in \mathcal{P}_n(x)$ dela eta $\forall i = 0, \ldots, n, \quad l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
eta ondorioz $p(x_i) = f(x_i)$ beteko du $i = 0, \ldots, n$.

Oharrak:

- x_i puntuak desberdinak direnez, Lagrange-ren interpolazioaren problemak soluzio bakarra du.
- Ez da beharrezkoa $n+1$ ekuazioen sistema lineala ebaztea.
- Izan bedi $w(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \in \mathcal{P}_{n+1}(x)$ interpolatutako funtzioa, orduan beroni dagozkion $l_i(x)$ polinomioak honela idatz daitezke:

$$l_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)}.$$

- Izan bitez $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ funtzioa (hots, $[a, b]$ tartean $f(x)$ funtzioa $n+1$ bider deribagarria da, horren deribatuak jarraituak baitira) eta $p(x) \in \mathcal{P}_n(x)$ polinomioa $x_0, x_1, \ldots, x_n$ puntuetan f interpolatzen duen Lagrange-ren polinomioa. Orduan, $\forall x \neq x_i$, $f(x) - p(x)$ erroreak zera betetzen du:

$$\forall x \in [a, b] \quad \exists c \in (a, b) \mid \; f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) w(x).$$

- Lagrange-ren interpolazio-polinomioa kalkulatzeko zein ebaluatzeko, algoritmo hauek ditugu: kendura zatituen adierazpena, Aitken-en eta Neville-ren algoritmoak, besteak beste.

5.7. adibidea. Kalkulatu $\{0, 1, 3\}$ puntuetan $f(x)$ interpolatzen duen $p(x) \in \mathcal{P}_2(x)$ Lagrange-ren polinomioa, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ eta $f(3) = 2$ izanik. Kalkulatu $p(2)$.

Ebazpena: $p(x) \in \mathcal{P}_2(x)$ polinomioak zera bete behar du:

$$\begin{aligned} p(0) &= f(0) = 1 \\ p(1) &= f(1) = 3 \\ p(3) &= f(3) = 2 \end{aligned}$$

Dakigunez, $p(x)$ polinomioaren adierazpena zera da:

$$p(x) = 1 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x)$$

non

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)}, \quad l_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}, \quad l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}.$$

Hau da:

$$p(x) = \frac{1}{3}(x-1)(x-3) - \frac{3}{2}x(x-3) + \frac{1}{3}x(x-1).$$

Zenbakizko kalkuluari dagokionez, aurreko adierazpena nahikoa da. Baina 2. mailako polinomioaren adierazpen laburtua hau da:

$$p(x) = 1 + \frac{17}{6}x - \frac{5}{6}x^2.$$

Orain, $p(2)$ kalkulatu behar da:

$$p(2) = 1 \cdot l_0(2) + 3 \cdot l_1(2) + 2 \cdot l_2(2) = 1 \cdot \frac{-1}{3} + 3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}. \quad \square$$

5.4.2. Hermite-ren interpolazioa.

Definizioa.
Izan bitez $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ $\quad n+1$ puntu desberdin eta $f(x) \in C^1[a,b]$ funtzioa. Orduan, $p(x) \in \mathcal{P}_{2n+1}$ polinomioari *Hermite-ren interpolazio polinomiko* esaten zaio, $2n+2$ baldintza hauek betetzen dituenean:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Polinomioa kalkulatzeko formula hau da:

$$p(x) = [f(x_0)H_0(x)+\ldots+f(x_n)H_n(x)]+[f'(x_0)\widehat{H}_0(x)+\ldots+f'(x_n)\widehat{H}_n(x)]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_i)H_i(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_i)\widehat{H}_i(x),$$

non $H_i(x)$, $\widehat{H}_i(x)$ funtzioek propietate hauek dituzten:

$$H_i(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{baldin } k = i \\ 0, & \text{baldin } k \neq i \end{cases}, \quad H_i'(x_k) = 0 \ \ \forall i$$

$$\widehat{H}_i(x_k) = 0 \ \ \forall i, \quad \widehat{H}_i'(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{baldin } k = i \\ 0, & \text{baldin } k \neq i \end{cases}.$$

Beraz, honako adierazpen hauek dituzte:

$$H_i(x) = [1 - 2(x - x_i)l_i'(x_i)]l_i^2(x) \quad \text{eta} \quad \widehat{H}_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x).$$

Oharrak:

- x_i puntuak desberdinak direnez, Hermite-ren interpolazioaren problemak soluzio bakarra du.
- Izan bitez $f(x) \in C^{2n+2}[a,b]$ funtzioa eta $p(x)$ Hermite-ren polinomioa ($x_0, x_1, \ldots, x_n$ puntuetan f interpolatzen duena); orduan, $\forall x \neq x_i$, $f(x) - p(x)$ erroreak hau betetzen du:

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists c \in (a,b) \mid \ f(x) - p(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c)w(x)^2.$$

Ariketa: Kalkulatu $x = 0$ eta $x = 1$ puntuetan $f(x)$ interpolatzen duen $p(x) \in \mathcal{P}_3(x)$ Hermite-ren polinomioa, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f'(0) = 0$ eta $f'(1) = 2$ izanik. *(Em.: $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + 1$)*

5.4.3. Taylor-en interpolazioa.

Izan bitez $x_0 \in [a,b]$ puntua eta $f(x) \in C^m[a,b]$ funtzioa. $p(x) \in \mathcal{P}_m(x)$ polinomioari *Taylor-en polinomioa* deritzogu honako $m+1$ baldintza hauek betetzen dituenean:

$$p(x_0) = f(x_0),\ p'(x_0) = f'(x_0), \ldots,\ p^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0),$$

hau da, $p(x)$ polinomioaren balioak eta $f(x)$-ren x_0 puntuko lehenengo m deribatuen balioak berdinak direnean.
Polinomioa kalkulatzeko adierazpena hau da:

$$p(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m.$$

Oharrak:

- Taylor-en interpolazioaren problemak soluzio bakarra du.
- Izan bitez $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ funtzioa eta $p(x)$ Taylor-en polinomioa; orduan, $\forall x \neq x_0,\quad f(x)-p(x)$ erroreak zera betetzen du:

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists c \in (a,b) \mid \quad f(x)-p(x) = \frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(c).$$

Ariketa: Kalkulatu $x = 0$ puntuan $f(x)$ interpolatzen duen $p(x) \in \mathcal{P}_3(x)$ Taylor-en polinomioa, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -10$ eta $f'''(0) = 24$ izanik. *(Em.: $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + 1$)*

5.4.4. Hermite-ren interpolazio orokortua.

Definizioa.

Izan bitez $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ $n+1$ puntu desberdin, $m_0, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ zenbaki arruntak eta

$$\sum_{i=0}^{n}(m_i+1) = \left(\sum_{i=0}^{n} m_i\right) + n + 1 = M+1,$$

eta $f(x) \in C^M[a,b]$ funtzioa. Orduan, $p(x) \in \mathcal{P}_M$ polinomioari *Hermite-ren interpolazio orokortuaren polinomio* esaten zaio, honako $M+1$ baldintza hauek $i = 0, 1, \ldots, n$ bakoitzerako betetzen dituenean:

$$p(x_i) = f(x_i),\ p'(x_i) = f'(x_i),\ p''(x_i) = f''(x_i), \ldots,\ p^{(m_i)}(x_i) = f^{(m_i)}(x_i).$$

Horrenbestez, $p(x)$ polinomioaren eta $f(x)$ funtzioaren balioak eta haien lehenengo m_i deribatuen balioak, x_i puntu bakoitzean, berdinak dira.

Oharrak:

- Baldin $m_i = 0$ bada i guztietarako, *Lagrange-ren polinomioa* izango da.
- Baldin $m_i = 1$ bada i guztietarako, *Hermite-ren polinomioa* izango da.
- Baldin $n = 0$ bada (hots, puntu bakar bat badugu), *Taylor-en polinomioa* izango da.

Ariketa: Kalkulatu Hermite-ren interpolazio orokortuaren bidez $x = -1$ eta $x = 0$ puntuetako $p(x) \in \mathcal{P}_4(x)$ polinomioa, jakinik $f(-1) = 0$, $f'(-1) = -6$, $f(0) = -1$, $f'(0) = 1$ eta $f(0) = 0$ direla. *(Em.:* $p(x) = x^4 - x^3 + x - 1$*)*

Funtzioen hurbilketak lortzeko, badaude beste metodo batzuk ere. Esate baterako, $[a, b]$ tartea azpitarteetan zatitzen da, eta, azpitarte bakoitzean, ordena txikiko interpolazio polinomioak bilatzen dira; hau da, hurbilketak zatikako funtzio polinomikoak dira. Honelako metodoekin arituko gara hurrengo atalean.

5.5. Zenbakizko integrazioa.

$f(x)$-ren integral mugatu bat Barrow-en erregelaren bidez kalkulatzeko, $f(x)$-ren jatorrizko funtzio bat, $F(x)$, aurkitu behar dugu lehenengo. Baina, kasu batzuetan, $F(x)$ ez da existitzen; adibidez: $f(x) = \sqrt{x}\sin x$ edo $f(x) = e^{-x^2}$ denean. Orduan erabilgarri bihurtuko da integral definitu horien balio hurbildua lortzen duten zenbakizko integraziorako metodoak garatzea. Orokorrean, oinarrizko aritmetika erabiltzen dute metodo hauek eta ordenagailuen bitartez inplementa daitezke.

Definizioa.

Koadratura-formula edo integral mugatuak hurbiltzeko formularen adierazpen orokorra hau da:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx Q(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i,$$

A_i koefizienteei formularen *pisuak* deritzegu.

Jarraian, $[a, b]$ integrazio-tarterako formulak daude.

5.5.1. Newton-Cotes-en koadratura-formulak.

Kasu honetan, $f(x)$ funtzioa $\{x_0, \ldots, x_n\}$, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, \ldots, n$, distantziakide diren puntuetan $p(x)$ interpolazio polinomioaren bidez hurbiltzen da, eta $f(x)$-ren integrala $p(x)$-ren integralaren bidez.
$p(x)$ polinomioa eraikitzeko 5.4.1 ataleko Lagrange-ren interpolazio (5.1-5.2) formulak erabiliko ditugu:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \right) dx$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) \left(\int_a^b l_i(x)dx \right) = \sum_{i=0}^n f(x_i) A_i,$$

hots, hemen $A_i = \int_a^b l_i(x)dx$ dugu.
Orain mota honetako formula arruntenak ikasiko ditugu, hala nola erdigunearen erregela, trapezioaren erregela eta Simpson-en erregela.

5.5.1.1. Erdigunearen erregela.

$f(x) \approx p(x) \in \mathcal{P}_0(x)$, zerogarren mailako interpolazio-polinomiotzat (konstantea) hartzen da. Izan bitez $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ puntua eta $h = \dfrac{b-a}{2}$.
Orduan:

$$p(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Ondorioz:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx Q_e = \int_a^b p(x)dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Hurbiltze-metodo hau erabiltzean sortzen den *erroreak* (hots, $|I(f) - Q_e(f)|$) honako adierazpen hau du:

$$E_e(f) = \left| \frac{h^3}{2} f''(c) \right|, \quad \text{non} \quad c \in (a, b).$$

5.5.1.2. Trapezioaren erregela.

$f(x) \approx p(x) \in \mathcal{P}_1(x)$, lehenengo mailako interpolazio-polinomiotzat hartzen da. Izan bitez $x_0 = a$ eta $x_1 = b$ puntuak. Orduan:

$$p(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}.$$

Ondorioz:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx Q_t = \int_a^b p(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)].$$

Hurbiltze-metodo hau erabiltzean sortzen den *erroreak* (hots, $|I(f) - Q_t(f)|$) honako adierazpen hau du:

$$E_t(f) = \left|\frac{h^3}{12}f''(c)\right|, \quad \text{non} \quad h = b-a \;\; \text{eta} \;\; c \in (a,b).$$

5.5.1.3. Simpson-en erregela.

$f(x) \approx p(x) \in \mathcal{P}_2(x)$, bigarren mailako interpolazio-polinomioa hartzen da. Izan bitez $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ eta $x_2 = b$ puntuak edo aldiberean $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = a+2h$, non $h = (b-a)/2$ puntuen arteko distantzia den. Hau da funtzioari dagokion Lagrange-ren interpolazio polinomioa

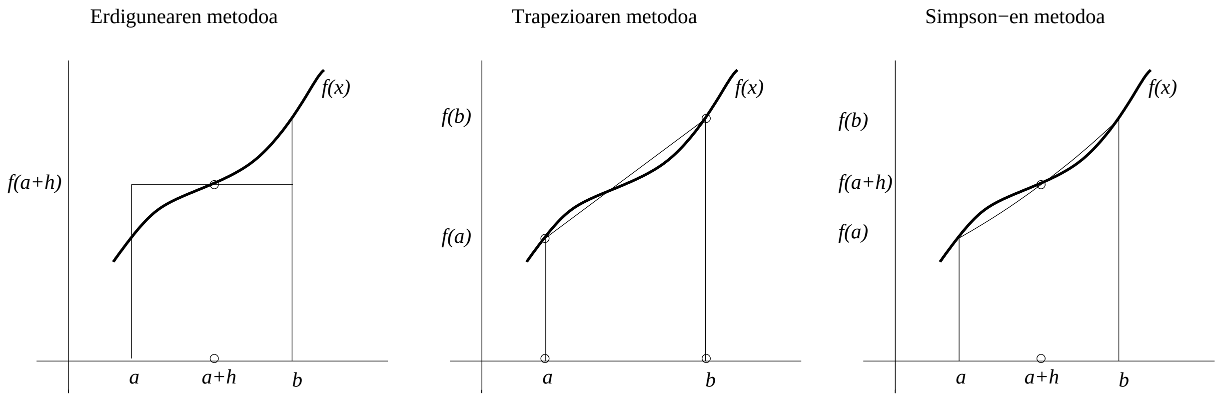
$$p(x) = f(a)\frac{(x-x_1)(x-b)}{(a-x_1)(a-b)} + f(x_1)\frac{(x-a)(x-b)}{(x_1-a)(x_1-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-x_1)}{(b-a)(b-x_1)}.$$

Ondorioz:

$$\begin{aligned} I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx Q_s = \int_a^b p(x)dx &= \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(x_1) + f(b)] \\ &= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \end{aligned}$$

Hurbiltze metodo hori erabiltzean sortzen den *erroreak* (hots, $|I(f) - Q_s(f)|$) honako adierazpen hau du:

$$E_s(f) = \left|\frac{h^5}{90}f^{iv}(c)\right|, \quad \text{non} \quad c \in (a,b).$$



5.5. irudia. Lagrange-ren interpolazio-koadraturak.

5.8. adibidea. Aplika itzazu ikusitako hiru erregelak (sei digiturekin), honako integral hauek hurbiltzeko: $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ eta $\displaystyle\int_1^2 \ln x dx$. Zein da errorea erregela mota bakoitzean? Eta espero daitekeen errore maximoa?

Ebazpena:

Taula 5.v. Koadratura-formulak.

	I	Q_e	Q_t	Q_s	R_e	R_t	R_s
f	0.333333	0.25	0.5	0.333333	0.083333	0.166667	0
g	0.386294	0.405465	0.346574	0.385835	0.019171	0.039720	0.000459

$$E_e(f) = \left| \frac{\left(\frac{1-0}{2}\right)^3}{2} 2 \right| = \frac{1}{8} = 0.125.$$

$$E_e(g) = \left| \frac{\left(\frac{2-1}{2}\right)^3}{2} \frac{-1}{c^2} \right| = \frac{1}{16c^2} < \frac{1}{16} = 0.0625 \quad \text{zeren} \quad c \in (1,2).$$

$$E_t(f) = \left| \frac{(1-0)^3}{12} 2 \right| = \frac{1}{6} \approx 0.166667.$$

$$E_t(g) = \left| \frac{(2-1)^3}{12} \frac{-1}{c^2} \right| = \frac{1}{12c^2} < 0.083333 \quad \text{zeren} \quad c \in (1,2).$$

$$E_s(f) = \left| \frac{\left(\frac{1-0}{2}\right)^5}{90} \cdot 0 \right| = 0. \text{ Zergatik?}$$

$$E_s(g) = \left| \frac{\left(\frac{2-1}{2}\right)^5}{90} \cdot \frac{-6}{c^4} \right| = \frac{1}{480c^4} < \frac{1}{480} = 0.002083 \quad \text{zeren} \quad c \in (1,2).$$

Egiazta daitekeenez, benetako errorea (R), errore teorikoa (E) baino txikiago, edo haren berdina da. □

5.5.2. Newton-Cotes-en formula konposatuak.

Ikus daitekeenez, bizpahiru punturekin eraikitako hurbilketa ez da beti oso zehatza. Zenbakizko metodoaren doitasuna hobetzeko, $[a,b]$ tartea puntu distantziakide ugarirekin zatituko dugu:

$$x_0 = a, \; x_1 = a+h, \; x_2 = a+2h, \ldots, \; x_i = a+ih, \ldots, \; x_n = a+nh = b,$$

non $h = \dfrac{b-a}{n}$ ondoz ondoko bi puntuen arteko distantzia den. Hurbilketak hobetzeko, ez dugu maila handiko polinomioekin jardungo; aitzitik, $[a,b]$ tartea aipatutako azpitarteetan zatituko dugu, eta, azpitarte bakoitzean, maila txikiko interpolazio-polinomioak kontsideratuko ditugu. Orain, aurreko azken bi koadratura-formulak aplikatuko ditugu formula konposatuak sortzeko.

5.5.2.1. Trapezioaren erregela konposatua.

Puntuak binaka hartzen baditugu zuzen baten bidez lotuz, trapezioaren formula izango dugu. Hau da, i-garren trapezioaren azaleraren formula $Q(T_i) = \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$ denez, trapeziotxo guztien azalerak batuko ditugu, eta, ondorioz, integral hurbilduaren formula konposatua eraikiko dugu. Hots:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \quad \approx \quad Q_{tk}(f) = \sum_{i=1}^{n} Q(T_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right].$$

Hurbiltze-metodo hori erabiltzean sortzen den *erroreak* (hots, $|I(f) - Q_{tk}(f)|$) honako adierazpen hau du:

$$E_{tk}(f) = \left| \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(c_i) \right| = \left| \frac{b-a}{12} f''(c) h^2 \right|, \quad \text{non} \quad c \in (a,b).$$

5.9. adibidea. Integratu aurreko f eta g funtzioak, trapezioaren erregela konposatuaren bitartez, 3, 6 eta 7 puntu erabiliz

Ebazpena:

Q_{tk}	3 ptu	6 ptu	7 ptu	R: 3 ptu	R: 6 ptu	R: 7 ptu
f	0.375	0.34	0.337963	0.041667	0.006667	0.004630
g	0.376019	0.384632	0.385139	0.010275	0.001662	0.001155

5.5.2.2. Simpson-en erregela konposatua.

Baldin $2m+1$ puntuak hirunaka hartzen baditugu parabola batez lotuz, Simpson-en formula izango dugu. Hau da, m parabola izango ditugu. Beraz, i-garren parabolaren azpiko azaleraren formula $Q(S_i) = \frac{h}{3}[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]$ denez, parabolatxoei dagozkien azalerak batuko ditugu, eta, ondorioz, integral hurbilduaren formula konposatua eraikiko dugu. Hots:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \quad \approx \quad Q_{sk}(f) = \sum_{i=1}^{m} Q(S_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{h}{3} \left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right] \\
&= \frac{h}{3} \big[(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \cdots + \\
&\quad + (f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))\big] \\
&= \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + f(x_{2m}) \right],
\end{aligned}$$

non $n = 2m$ den.

Hurbiltze-metodo hau erabiltzean sortzen den *erroreak* (hots, $|I(f) - Q_{sk}(f)|$) honako adierazpen hau du:

$$E_{sk}(f) = \left| \frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{m} f^{iv}(c_i) \right| = \left| \frac{b-a}{180} f^{iv}(c) h^4 \right|, \quad \text{non} \quad c \in (a,b).$$

5.10. adibidea. Integratu aurreko g funtzioa, Simpson-en erregela konposatuaren bitartez, 3 eta 7 puntu erabiliz.

Ebazpena:

Q_{sk}	3 ptu	7 ptu	R: 3 ptu	R: 7 ptu
g	0.385835	0.386287	0.000459	0.000007

5.11. adibidea. Integratu $f(r) = -r^2 \log(r) - 5r^2 + 3r^3 - r^4/3 + 6$ funtzioa zenbakizko metodoen bidez $[1,5]$ tartean (emaitza zehatza hau da: $\displaystyle\int_1^5 f(r)dr = 23.7845$).

Ebazpena:

Metodoa	3 ptu	5 ptu	9 ptu	15 ptu
Q_{tk}	21.3224	23.0412	23.5908	23.7207
Q_{sk}	21.0316	23.6142	23.7739	23.7834

5.6. Ekuazio diferentzialak ebazteko zenbakizko metodoak.

Atal honen helburua da 4. kapituluan aurkeztutako ekuazio diferentzialen hasierako balioen problemak ebaztea, hau da:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = \eta \end{cases} \quad \text{non} \quad \begin{array}{r} y(x) : [a,b] \to \mathbb{R} \\ f(x,y) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \eta \in \mathbb{R} \end{array} \tag{5.3}$$

Ekuazio diferentzialen sistemen kasuan, hauxe dugu:

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)) \\ \vec{y}(a) = \vec{\eta} \end{cases} \quad \text{non} \quad \begin{array}{r} \vec{y}(x) : [a,b] \to \mathbb{R}^n \\ \vec{f}(x,\vec{y}) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{5.4}$$

Definizioa.

Baldin $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ betetzen bada $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, esaten da f funtzioa *y aldagaiarekiko Lipschitz-en funtzio* bat dela.

5.1. teorema. *Izan bitez y aldagaiarekiko f Lipschitz-en funtzioa eta $\eta \in \mathbb{R}$ hasierako balioa; orduan, (5.3) problemak gutxienez soluzio bat du (a, η) puntuaren inguruan. Gainera, baldin f eta $\partial f/\partial y$ jarraituak badira (a, η)-ren inguruan, orduan soluzio hori bakarra da.*

Izan bitez $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_N = x_0 + Nh \in [a,b]$ puntuak; orduan, $y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1), \ldots, y_N = y(x_N)$ balioak, hots, $y(x)$ soluzioaren hurbilketak bilatu nahi ditugu. Horretarako, *Euler-en metodoa* dugu, sinpleenetariko bat. Metodo honetaz aparte, *Runge-Kutta-ren metodoak* eta *urrats anitzeko metodoak* ditugu.

5.6.1. Euler-en metodoa.

Metodo hau $y(x)$ soluzioaren hurbilketa linealak eraikitzean datza. Hau da, Taylor-en formula gogoratuz:

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) &= y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_0) + \ldots \\ &= y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_0) + \ldots \end{aligned}$$

$y(x_0 + h)$ hurbiltzeko $y(x_0) + hf(x_0, y(x_0))$ lehenengo mailako Taylor-en polinomioa erabiliz, Euler-en metodoa dugu:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y(x_0) = \eta. \end{cases}$$

Iteraziozko prozesu horren bidez, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ balioak lortzen dira; *Euler-en poligonala* deritzona, alegia.

Oharra: Urrats bateko errorea $\frac{h^2}{2}y''(c)$ da (Lagrange-ren hondarra). Errore globala, $O(h)$, lehenengo ordenakoa da.

5.12. adibidea. Euler-en metodoa erabiliz, kalkulatu $y(1)$, jakinik $y(x)$ funtzioak honako ekuazio diferentzial hau betetzen duela:

$$\begin{cases} y'(x) = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Erabili a) $h = 1/3$ eta b) $h = 1/10$ (bost digiturekin)

Ebazpena:

a) Izan bedi $h = 1/3$, orduan $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$ eta

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + he^0 = 1.33333 \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.33333 + he^{x_1} = 1.79854 \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.79854 + he^{x_2} = 2.44778. \end{aligned}$$

Hau da, Euler-en metodoa erabiliz eta $h = 1/3$ hartuz, $y(1) \approx 2.44778$.

b) Izan bedi $h = 1/10$; orduan, $x_0 = 0$, $x_1 = 1/10$, $x_2 = 2/10, \ldots, x_{10} = 1$ eta

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + he^0 = 1.1 \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + he^{x_1} = 1.21052 \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.21052 + he^{x_2} = 1.33266 \\ y_4 &= 1.46764 \\ y_5 &= 1.61683 \\ y_6 &= 1.71817 \\ y_7 &= 1.96391 \\ y_8 &= 2.16528 \\ y_9 &= 2.38784 \\ y_{10} &= 2.6338. \end{aligned}$$

Hau da, Euler-en metodoa erabiliz eta $h = 1/10$ hartuz, $y(1) \approx 2.6338$. Bestalde, dakigunez, ekuazio diferentzialaren emaitza $y(x) = e^x + K$ da, non $y(0) = 1$ den; beraz, $y(x) = e^x$ eta $y(1) = e^1 = 2.71828$ balio zehatza da. □

5.6.2. Runge-Kutta-ren metodoak.

Urrats bateko metodoak dira, hau da, soilik ondoz ondoko bi y_j daude erlazionatuta (y_n, y_{n+1}); errore globala $O(h^{p+1})$ da, $p \geq 1$ izanik. Metodo horren iterazio-prozesu orokorra hau da:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_0 + h\sum_{r=1}^{R} c_r k_r \\ y_0 = \eta \end{cases} \text{non } \begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_r = f(x_n + a_r h, y_n + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}k_s), \\ r = 2, 3, \ldots, R \end{cases}$$

eta $a_r = \displaystyle\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}, \quad \sum_{r=1}^{R} c_r = 1.$

Metodo partikular bat aurkitzeko, R etapa kopurua finkatu behar da eta k_r-ren Taylor-en garapenak eraiki, $f(x_n, y_n)$ eta haren deribatuen menpe.

Kasu berezi batzuk:

$R = 1$ bada, *Euler-en metodoa* hau da: $c_1 = 1 \quad (p = 1)$,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

$R = 2$ bada, *Euler-en metodo eraldatua* hau da: $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $a_2 = 1/2 \quad (p = 2)$,

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)\right).$$

Euler-en metodo hobetua: $(p = 2)$,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))].$$

$R = 3$ bada, *hirugarren ordenako Heun'-en metodoa* hau da: $c_1 = 1/4$, $c_2 = 0$, $c_3 = 3/4$, $a_2 = 1/3$, $a_3 = 2/3$, $b_{32} = 2/3 \quad (p = 3)$,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3), \quad \text{non} \quad \begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hk_2) \end{cases}$$

Errorea kontrolatzeko, h eralda daiteke; errorea estimatzeko, modu batzuk daude. h_1 eta h_2 desberdinak hartzen dira $y(x)$-ren bi hurbilketa desberdin lortzeko, eta konbinazio baten bidez estimatzen da errorea. Edo, bestela, p eta $p+1$. ordenako bi metodo konbinatzen dira p. ordenako metodoaren errorea estimatzeko, besteak beste.

5.6.3. Urrats anitzeko metodo linealak.

k urratseko metodo lineal honen adierazpen orokorra hau da:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j},$$

non $f_{n+j} = f(x_{n+j}, y_{n+j})$ den. Baldin $\beta_k = 0$ bada,metodo esplizitu bat dugu; izan ere, y_{n+k} aldagaia aska daiteke lehen kalkulaturiko balioen menpean. Baldin $\beta_k \neq 0$ bada, ostera, metodo inplizitu bat dugu eta ondorioz ekuazio ezlinealen sistema askatu beharko da.
k urratseko metodo deritzo; izan ere, $k+1$ aldiz ondoz ondo y_{n+j} gaiak erlazionatuta agertzen dira. Normalki hasierako k balioak, $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, behar dira, metodoa aplikatzen hasteko eta gainontzeko $y_k, y_{k+1}, \ldots$ balioak kalkulatu ahal izateko.
Demagun $\alpha_k = 1$ dela, (hala ez bada, konstante egoki batez biderkatuz ekuazio hori lor daiteke). Baldin iterazio bakoitzean metodo inplizitu bat badugu y_{n+k} berria kalkulatzeko, y_{n+k} aldagaian ekuazio ez lineal bat ebatzi beharko da: $y_{n+k} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + g$, hain zuzen ere g ezaguna izanik. Horretarako, puntu finkoaren metodoa erabil daiteke.
Ikus dezagun nola sortu ziren urrats anitzeko metodo lineal batzuk:

- Taylor-en garapena erabiliz:

$$y(x_{n+h}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \ldots$$

  Lehenengo ordenakoa hartuz gero, *Euler-en metodoa* dugu: $y_{n+h} = y(x_n) + hy'(x_n)$.

  Bestalde, $y(x_{n-h}) = y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \ldots$ garatuz eta lehenengo ordenakoa hartuz, *erdigunearen erregela* dugu kenketa egin ondoren: $y_{n+1} - y_{n-1} = 2hf(x_n, y_n)$.

- Zenbakizko integrazioa erabiliz:

$$y(x_{n+2}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+2}} y'(x)dx$$

eta $y'(x)$ bigarren ordenako interpolazio-polinomio baten bidez hurbilduz, non $(x_n, f_n), (x_{n+1}, f_{n+1}), (x_{n+2}, f_{n+2})$ interpolazio-balioak diren:

$$y(x_{n+2}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+2}} y'(x)dx \quad \approx \quad \int_{x_n}^{x_{n+2}} p(x)dx$$

$p(x) \in \mathcal{P}_2(x)$ da eta *Simpson-en erregela* izango dugu: $y(x_{n+2}) - y(x_n) = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$.

Baldin berdintza hau badugu:

$$y(x_{n+2}) - y(x_{n+1}) = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} y'(x)dx \quad \approx \quad \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} p(x)dx$$

bi urratseko *Adams-Moutton-en metodoa* izango dugu: $y(x_{n+2}) - y(x_{n+1}) = \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1}f_n)$.

Gehien erabiltzen diren urrats anitzeko metodo linealak hauek dira:

$$y(x_{n+k}) - y(x_{n+k-1}) = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j},$$

hots, $\alpha_k = 1$, $\alpha_{k-1} = -1$, $\alpha_j = 0 \quad \forall j \leq k-1$ betetzen dituzten metodoak. Metodo horiei *Adams-Bashford-en metodoak* deritzegu esplizituak direnean, eta *Adams-Moutton-en metodoak*, inplizituak direnean.

Metodo esplizituak errazago erabiltzen dira, baina, zenbaki-egonkortasunaren aldetik, metodo inplizituen propietateak hobeak dira. Horregatik, metodo inplizituak erabili ohi dira, baina, hasierako puntua kalkulatzen da metodo esplizituen bidez, puntu finkoaren metodoa erabili ahal izateko eta inplizitua ebazteko.

5.7. Goi-ordenako ekuazioak eta 1. ordenako sistemak.

Izan bedi m. ordenako ekuazio diferentzial bat:

$$\begin{cases} y^{(m)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(m-1)}(x)) \\ y(a) = \eta_0 \\ y'(a) = \eta_1 \\ y''(a) = \eta_2 \\ \qquad \vdots \\ y^{(m-1)}(a) = \eta_{m-1}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Ondoko aldagai-aldaketak egiten baditugu:

$$\begin{cases} z_1(x) = y(x) \\ z_2(x) = y'(x) \\ z_3(x) = y''(x) \\ \qquad \vdots \\ z_m(x) = y^{(m-1)}(x) \end{cases}$$

m. ordenako ekuazioak (5.5), lehenengo ordenako m ekuazio-sistema hau eman dezake:

$$\begin{cases} z_1'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) = z_3(x) \\ z_3'(x) = z_4(x) \\ \qquad \vdots \\ z_{m-1}'(x) = z_m(x) \\ z_m'(x) = f(x, z_1(x), z_2(x), \ldots, z_m(x)) \\ z_1(a) = \eta_0 \\ z_2(a) = \eta_1 \\ z_3(a) = \eta_2 \\ \qquad \vdots \\ z_m(a) = \eta_{m-1}. \end{cases}$$

Era bektorialean idatzita, zera dugu:

$$\begin{cases} \vec{z}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{z}(x)) \\ \vec{z}(a) = \vec{\eta} \end{cases}$$

non

$$\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{m-1} \\ z_m \end{pmatrix}, \ \vec{f}(x, \vec{z}(x)) = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_{m-1} \\ z_m \\ f(x, z_1, \ldots, z_m) \end{pmatrix}, \ \vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Azkenik, lehenengo ordenako sistema-ekuazio diferentzialak ebazteko zenbakizko metodoak eta lehenengo ordenako ekuazio diferentzialak ebazteko metodoak oso antzekoak dira. Nahikoa da y_n, f_n idatzi beharrean, $\vec{y}_n, \vec{f}_n$ idaztea aurreko metodoetan. Esate baterako, hau da sistema ebazteko Euler-en metodoa:

$$\begin{cases} \vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{f}(x_n, \vec{y}_n) \\ \vec{y}_0 = \vec{\eta}, \end{cases}$$

eta $\vec{y}_n = \begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \\ \vdots \\ y_{m,n} \end{pmatrix}$ bektorearen osagai guztiei aplikatzen zaie metodoa.