4. GAIA:

Ekuazio diferenzialak

Matematika Aplikatua,

Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboa Saila

Zientzia eta Teknologia Fakultatea

Euskal Herriko Unibertsitatea

Aurkibidea

4. gaia

Ekuazio diferentzialak.

4.1. Sarrera.

4.1.1. Definizioak eta sailkapena.

Definizioa. Demagun x aldagaiaren menpeko $y(x)$ funtzioa dugula. Funtzio hori eta haren deribatuak $y', y", \ldots, y^{(n)}$ lotzen dituzten ekuazioei *ekuazio diferentzial* esan ohi diegu.

$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, *ekuazio diferentziala era inplizituan.*

$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, *ekuazio diferentziala era esplizituan.*

Definizioa. Ekuazioan agertzen den deribatu altuenaren maila *ekuazioaren ordena* deitzen da.

4.1. adibidea. $xy^{(4)} - 2x(y')^5 y'' = x^2$ ekuazioa 4. ordenako ekuazioa da, era inplizituan, eta $y''' = 2(y')^7 y'' + x$ ekuazioa 3. ordenako ekuazioa da, era esplizituan.

Definizioa. Baldin $y(x)$ funtzioa soilik x aldagaiaren mendekoa bada, orduan ekuazioari *ekuazio diferentzial arrunt* deituko diogu.

Definizioa. Aldagai aske bat baino gehiago dituen ekuazioari *deribatu partzialeko ekuazio* esango diogu.

4.2. adibidea. $\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ ekuazioa deribatu partzialeko ekuazioa da, y aldagaia bi aldagairen funtzio izateagatik.

Gai honetan, ekuazio arruntak besterik ez ditugu ebatziko. Ekuazioaren itxuraren arabera, mota batean edo bestean banatuko ditugu, eta bakoitzak askatzeko bide berezia izango du. Adibidez, erraz kalkula daiteke ondoko ekuazioaren soluzioa:

$$y' = 3\sin(2x) \Rightarrow y(x) = -\frac{3}{2}\cos(2x) + K,$$

non K *hautazko integrazio-konstantea* den.

n. ordenako ekuazioa askatzeko, n aldiz integratu beharko dugu; beraz, soluzioa n konstanteren menpean adierazi beharko da. Baldin konstante horien balioak zehaztu nahi baditugu, orduan hasierako n baldintza finkatu beharko ditugu. Adibidez:

$y''(x)+y(x)=0$ ekuazioaren *soluzio orokorra* $y(x)=K_1\sin x+K_2\cos x$ da, baina hasierako bi baldintzak gehitzen badizkiogu, adibidez,

$$\begin{cases} y''(x)+y(x)=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1, \end{cases}$$

orduan $y(x)=\sin x$ izango da baldintza horiek betetzen dituen *soluzio berezia.*

Hasteko, lehenengo ordenako ekuazioak aztertuko ditugu $F(x,y,y')=0$ edo $y'=f(x,y)$ gisako ekuazio diferentzial arruntak. Bi eratan idatz daitezke: bata

deribatu moduan, $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y);$

eta bestea

diferentzial moduan, $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$

Mota horretako ekuazioak ebazteko metodo batzuk ikusiko ditugu: ekuazio normala, aldagai banatuetako ekuazioak, ekuazio homogeneoak, ekuazio linealak eta ekuazio zehatzak.
Ikasgai honen bukaeran, ordena handiko ekuazio diferentzial arruntak aztertuko ditugu.

4.1.2. Aplikazioak.

Fisikan zein Kimikan zein Finantzetan zein beste arlo askotan, maiz agertzen dira ekuazio diferentzialak.
Ekuazio diferentzialen azalpena hauxe da: fenomeno fisikoak, kimikoak eta ekonomikoak adierazten dituzten funtzioak magnitude ugarien menpean daude, eta funtzio horien bilakaera edo hazkundea (deribatuak) orduko sistemaren egoeraren menpean adieraz daitezke.
Hona hemen Kimikako adibide sinple batzuk, non ekuazioak arruntak diren.

4.3. adibidea. Elementu erradiaktibo baten desintegrazioari buruzko problema. Jakina denez, elementu baten erradiazioaren desintegrazio-abiadura eta elementuaren kantitatea proportzionalak dira. Izan bitez $y(t)$ elementu erradiaktiboaren kantitatea t unean, eta y_0 hasieran dagoen kantitatea. Orduan, honako ekuazio diferentzial hau betetzen da, non k konstantea negatiboa den ($y(t)$ kantitatea beherakorra delako):

$$\begin{cases} y'(t) = k \cdot y(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Ekuazio mota hau geroago aztertuko den *aldagai banatuetako ekuazio* bat da, x aldagai askearen funtziopeko gaiak eta mendeko aldagaiaren funtziopekoak ekuazioaren bi alde ezberdinetan banandu daitezkelako. Ondorioz honela ebazten da:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k \cdot y(t) \Rightarrow \frac{dy(t)}{y(t)} = k \cdot dt \Rightarrow$$

$$\ln |y(t)| = k \cdot t + C \Rightarrow |y(t)| = e^{kt}e^C \Rightarrow y(t) = Ce^{kt}.$$

Hemen C integrazio konstantearen mendeko e^C konstantea zuzenean hautazko konstante erreala den C ikurraz ordeztu dugu idazkera sinplifikatzeko. Gainera $y(0) = y_0$ betetzen denez, $C = y_0$. Beraz, soluzio berezia hau da:

$$y(t) = y_0 e^{kt}. \ \square$$

4.4. adibidea. Dakigunez, fosil batzuetan agertzen den C^{14} elementu erradiaktiboaren desintegrazio-abiadura eta oraingo kantitatea proportzionalak dira. C^{14}-aren erdibizitza (hasieran zegoen elementu erradiaktiboaren erdia desintegratzeko denbora tartea) 5750 urtekoa da. Fosil batek C^{14}-aren %77,7 daukala jakinda, zenbat urte ditu fosilak?

Ebazpena. Izan bitez $y(t)$, t urtean dagoen C^{14}-aren kantitatea eta y_0 hasieran dagoen elementu erradiaktiboaren kantitatea. Dakigunez, C^{14}-aren kantitatea $y(t_1) = \dfrac{77.7}{100} y_0 = 0.777 y_0$ da aurten, t_1. Orduan honako ekuazio diferentzial hau betetzen da:

$$\begin{cases} y'(t) = k \cdot y(t) \\ y(t_1) = 0.777 y_0. \end{cases}$$

Ekuazioa ebaztean $y(t) = Ce^{kt}$ motakoa da, C eta k konstanteak kalkulatzeko dauzkagun baldintzak erabiliko ditugu. Alde batetik, erdibizitza 5750 urte denez, $y(5750) = \frac{1}{2}y(0) = \frac{y_0}{2}$ izango da, eta ekuazio diferentzialean ordezkatzean:

$$\frac{y_0}{2} = Ce^{k\cdot 5750}.$$

Bestalde, $t = O$ denean, $y(0) = y_0$ da, eta, ekuazioan ordezkatzean, $y_0 = Ce^{k0} = C$. Hori dela eta, goiko ekuaziotik zera dugu:

$$\frac{1}{2} = e^{5750k} \Rightarrow \ln(1/2) = 5750k \Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{5750} \approx -1.2{\cdot}10^{-4} = -0.00012.$$

Eta soluzio berezia honako hau izango da:

$$y(t) = y_0 e^{\frac{-\ln 2}{5750}t}.$$

Fosilaren aroa jakiteko, t_1 urtea kalkulatu behar dugu. Dakigunez,fosilak urte hauek izango ditu:

$$y(t_1) = 0.777y_0 = y_0 e^{\frac{-\ln 2}{5750}t_1} \Rightarrow 0.777 = e^{\frac{-\ln 2}{5750}t_1} \Rightarrow$$

$$\ln(0.777) = \frac{-\ln 2}{5750}t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\ln(0.777)}{-\ln 2}5750 = 2093.08 \approx 2093. \ \square$$

4.5. adibidea. Substantzia baten ingurunea hoztearen problema. Ingurunearekin kontaktuan dagoen substantzia baten tenperatura aldaketa une bakoitzean, eta ingurunearen eta substantziaren tenperaturen arteko kenketa proportzionalak dira. Substantziaren tenperatura t unean $T(t)$ bada, ekuazio diferentzial hau beteko da:

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - T_{ing}),$$

non T_{ing} inguruneko tenperatura den. Ekuazio hau lehendik azaldutako aldagai banatuetako bat denez, honela askatuko da,

$$\frac{dT(t)}{dt} = k \cdot (T(t) - T_{ing}) \Rightarrow \frac{dT(t)}{T(t) - T_{ing}} = k \cdot dt \Rightarrow$$

$$\ln|T(t) - T_{ing}| = kt + C \Rightarrow |T(t) - T_{ing}| = e^{kt}e^{C} \Rightarrow$$

$$T(t) - T_{ing} = Ce^{kt} \Rightarrow T(t) = T_{ing} + Ce^{kt}. \ \square$$

4.6. adibidea. Demagun felido baten gorpua aurkitzen dugula, eta une horretan 35^oC-ko tenperatura duela. Ordu bat geroago, tenperatura 34.5^oC da. Demagun inguruneko tenperatura $T_{ing} = 27^oC$ dela. Kalkulatu felidoa hiltzeko ordua, bizirik zegoenean 36.5^oC-ko tenperatura zuela jakinik.

Ebazpena. Izan bedi $T(t)$ gorpuaren tenperatura t unean. Felidoa hiltzeko unea $t = O$ da, eta gorpua topatu den unea, $t = t_1$. Datu hauek dauzkagu:

$$t = 0 \text{ denean, } T(0) = 36.5^oC$$
$$t = t_1 \text{ denean, } T(t_1) = 35^oC$$
$$t = t_1 + 1 \text{ denean, } T(t_1 + 1) = 34.5^oC$$

Alde batetik, $T'(t) = k \cdot (T(t) - 27)$ ekuazio diferentziala betetzen da, eta hau da emaitza:

$$T(t) = 27 + C \cdot e^{kt}.$$

Bestalde, hiru baldintzak erabiltzen baditugu, C, k eta t_1 ezezagunak aurkituko ditugu:

$$T(0) = 36.5^oC \Rightarrow 27 + C = 36.5 \Rightarrow C = 9.5$$
$$T(t_1) = 35^oC \Rightarrow 27 + 9.5 \cdot e^{kt_1} = 35 \Rightarrow e^{kt_1} = \frac{35 - 27}{9.5}$$
$$\Rightarrow k \cdot t_1 = \ln(8/9.5)$$
$$T(t_1 + 1) = 34.5^oC \Rightarrow 27 + 9.5 \cdot e^{k(t_1+1)} = 34.5 \Rightarrow e^{k(t_1+1)} = \frac{34.5 - 27}{9.5}$$
$$\Rightarrow k \cdot (t_1 + 1) = \ln(7.5/9.5)$$

Azken bi ekuazioak zatitzean, zera lortzen da:

$$\frac{t_1}{t_1 + 1} = \frac{\ln(8/9.5)}{\ln(7.5/9.5)} \Rightarrow t_1 \ln(7.5/9.5) = t_1 \ln(8/9.5) + \ln(8/9.5) \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{\ln(8/9.5)}{\ln(7.5/9.5) - \ln(8/9.5)} = \frac{\ln(8/9.5)}{\ln(7.5/8)} = 2.66 \text{ ordu.}$$

Beraz, felidoa hil zen orain dela $t_1 + 1 = 3.66$ ordu. □

Oharra. Kasu honetan, $k = \frac{\ln(8/9.5)}{t_1} = \ln(7.5/8) = -0.0645$ negatiboa espero genuen, tenperaturaren funtzioa beherakorra baita.

Hainbat natura-lege ekuazio diferentzial arrunten bitartez emanda daude (esate baterako, $\vec{F} = md^2\vec{x}/dt^2$, non $\vec{F}$ grabitate-indarra den) edo ekuazio diferentzial partzialen bidez (alegia, deribatu partzialak barnean dauzkaten ekuazioen bidez). Adibidez:

- BEROAREN EKUAZIOA. Joseph Fourier-ek (1768–1830) hasi zuen beroaren ikerketa. Izan bedi $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$ gorputz homogeneo bat. Izan bedi $T(x, y, z, t)$ gorputzak (x, y, z) puntuan eta t unean duen tenperatura.

  Fourier-ek frogatu zuenez, T-k honako deribatu partzialeko ekuazio hau bete behar du (baldintza zehatz batzuetan):

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \textit{(beroaren ekuazioa)},$$

non k konstante bat den; konstante horren balioa gorputzaren konduktibitatearen menpean dago.

- POTENTZIALAREN EKUAZIOA. **Grabitate-potentziala** (Newton-en potentziala) $V = -GmM/r$ ekuazioaz emanda dago, non m eta M bi gorputzen masak diren, eta r gorputz horien arteko distantzia, hots, haien grabitate-zentroak lotzen dituen (x, y, z) bektorearen luzera (beraz, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). V potentzialak ekuazio hau betetzen du edozein (x, y, z)-tarako, $(0, 0, 0)$-rako salbu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \textit{(Laplace-ren ekuazioa)}.$$

  Ekuazio hori Pierre Simon de Laplace-k (1749–1827) eman zuen.

- UHINAREN EKUAZIOA. *Espazioko uhinaren ekuazioa* honako hau da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

  Uhinaren ekuazio unidimentsionala honako hau da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

  John Bernoulli-k ondorioztatua 1.727 inguruan.

4.2. Ekuazio normalak.

Ondoko ekuazio diferentzialari *n. ordenako ekuazio normal* deitzen diogu:

$$y^{(n)} = f(x) \qquad n \geq 1,$$

Eta $n = 1$ kasuan, $y' = f(x)$ ekuazioaren soluzioa berehalakoa da:

$$y(x) = \int f(x)dx + K.$$

Goi-ordenako kasuetan, banan-banan errepikatzen da ideia berbera.

4.7. adibidea. Kalkulatu ondoko ekuazioaren soluzioa: $y''' = x^2$; hau da, kalkulatu $y = y(x)$ funtzioa, non ekuazio diferentziala betetzen den.

Ebazpena. Zera dugu: $y'' = \displaystyle\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + K_1 \quad \Rightarrow$

$$y' = \int \left(\frac{x^3}{3} + K_1 \right) dx = \frac{x^4}{12} + K_1 x + K_2 \quad \Rightarrow$$

$$y = \int \left(\frac{x^4}{12} + K_1 x + K_2 \right) dx = \frac{x^5}{60} + K_1 \frac{x^2}{2} + K_2 x + K_3.$$

Beraz, $y(x) = \dfrac{x^5}{60} + K_1 \dfrac{x^2}{2} + K_2 x + K_3$ ekuazio diferentzialaren soluzioa orokorra da; hiru konstanteren menpean dago, ekuazioa hirugarren ordenakoa izateagatik eta hasierako baldintzarik ez egoteagatik.

4.3. Aldagai banatuetako ekuazioak.

Horrela esaten zaie ondoko gisaz adieraz daitezkeen ekuazioei:

$$g(y)dy = f(x)dx,$$

non x-ren menpeko gai guztiak $f(x)$ funtzioan eta y-ren menpeko gai guztiak $g(y)$ funtzioan biltzen diren.
Aldagai bakoitzaren funtziopeko gai guztiak berdintzaren alde batean bereizita daudenez, alde bakoitzari dagokion aldagaiarekin integratuko dugu, hau da:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + K.$$

Baldin ekuazioa $\varphi_1(x)\phi_1(y)dy = \varphi_2(x)\phi_2(y)dx$ motakoa bada, orduan aurreko adierazpidera pasa dezakegu:

$$\frac{\phi_1(y)}{\phi_2(y)}dy = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}dx.$$

4.8. adibidea. Askatu $3e^x \tan y dx + (2 - e^x) \sec^2 y dy = 0$ ekuazio diferentziala.

Ebazpena. Ekuazio diferentzial hau ondoko eraldaketaren bidez aldagai banatuetako bihur daiteke:

$$\frac{3e^x}{e^x - 2}dx = \frac{\sec^2 y}{\tan y}dy.$$

Gero berdintzaren alde bakoitzari dagokion aldagaiarekin integratuko dugu,

$$3\int \frac{e^x}{e^x - 2}dx = \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} \Rightarrow 3\ln|e^x - 2| + K = \ln|\tan y| \Rightarrow$$

$$e^K|e^x - 2|^3 = |\tan y|.$$

Baldin K hautazko integrazio-konstantea bada, orduan e^K hautazko konstante positiboa izango da, eta, aurreko adierazpena bakantzeko, $\overline{K} = e^K$ idatz dezakegu. Beraz, soluzioaren adierazpena honako hau izango da:

$$y(x) = \arctan(\pm\overline{K}(e^x - 2)^3).$$

Oharra. Aurrerantzean adierazpidea ahal bezain garbia eta erraza izateko, zuzenean hautazko konstanteen $\pm e^K \rightarrow K$ aldaketa ordeztuko dugu. Ondorioz, aurreko adierazpena honela geratuko litzateke:

$$y(x) = \arctan(K(e^x - 2)^3), \qquad K \in \mathbb{R}. \ \square$$

4.9. adibidea. Aurkitu $y(\pi/2) = e$ hasierako baldintza betetzen duen $y' \sin x = y \ln y$ ekuazio diferentzialaren soluzio berezia.

Ebazpena. $\dfrac{dy}{dx}\sin x = y\ln y \Rightarrow \dfrac{dx}{\sin x} = \dfrac{dy}{y\ln y}$. Orain integratuz,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{y\ln y} \Rightarrow \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + K = \ln|\ln y| \Rightarrow$$

$$K \tan \frac{x}{2} = \ln y \ \Rightarrow \ y = e^{K \tan \frac{x}{2}}.$$

Baldin soluzio horrek $y(\pi/2) = e$ hasierako baldintza bete behar badu, orduan K hautazko konstanteari balio berezi bat esleitu beharko zaio. Ikus dezagun zein den balio hori:

$$e = y(\pi/2) = e^{K \tan \frac{\pi}{4}} = e^K \ \Rightarrow \ K \tan \pi/4 = 1 \ \Rightarrow \ K \cdot 1 = 1 \ \Rightarrow \ K = 1$$

eta soluzio zehatza $y = e^{\tan \frac{x}{2}}$ da. $\square$

4.10. adibidea. Aurkitu ondoko bi baldintzak betetzen dituen $y(x)$ kurba: a) kurba (0, -2) puntutik igarotzen da; ii) bere ukitzailearen malda, puntu guztietan, 3 gehi 2 bider funtzioaren balioa da.

Ebazpena. Baldintzak honela adieraz daitezke, $y' = 3 + 2y$ eta $y(0) = -2$. Lehenbizi ekuazio diferentzial orokorra askatuko dugu:

$$\int \frac{dy}{2y+3} = \int dx \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} \ln |2y+3| = x + K \ \Rightarrow \ 2y + 3 = Ke^{2x} \ \Rightarrow$$

$$y = Ke^{2x} - \frac{3}{2}.$$

Gero, hasierako baldintza betetzeko K-ren balio egokia ondorioztatuko dugu:

$$-2 = y(0) = K - \frac{3}{2} \ \Rightarrow \ K = -\frac{1}{2},$$

eta soluzio zehatza $y = -\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$ da. $\square$

Ariketa. Kalkulatu $x \sin y dx + (x^2+1) \cos y dy = 0$ ekuazioaren soluzioa. (*Em.:* $(x^2 + 1) \sin^2 y = K$)

Baldin ekuazioak itxura hau badu:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

orduan aldagai banatuetako adierazpidea lor daiteke $z = ax + by + c$ aldagai-aldaketaren bitartez. Gogora dezagun z aldagai berriaren diferentzialaren itxura:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}.$$

Orain, ekuazioaren egitura bakandu da eta lehenengoaren moduan askatuko dugu.

4.11. adibidea. Kalkulatu $y' = (2y+x)^2$ ekuazioaren soluzioa.

Ebazpena. Lehenik, ez da aldagai banatuetako ekuazio bat. Hala ere, bihur daiteke ondoko aldagai aldaketa eginez: $z = 2y+x$. Orain, $y' = z^2$ eta

$$z = 2y(x) + x \ \Rightarrow\ \frac{dz}{dx} = 2y'(x) + 1 \ \Rightarrow\ \frac{dz}{dx} = 2z^2 + 1.$$

Azken ekuazioa aldagai banatuetakoa da, hortaz:

$$\frac{dz}{2z^2+1} = dx \ \Rightarrow\ \int \frac{dz}{(\sqrt{2}z)^2+1} = \int dx \ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}z) = x + K_1 \ \Rightarrow\ \arctan(\sqrt{2}z) = \sqrt{2}x + \sqrt{2}K_1 \ \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}z = \tan(\sqrt{2}x + \sqrt{2}K_1) \ \Rightarrow\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan(\sqrt{2}x + \sqrt{2}K_1).$$

Aldagai-aldaketa deseginez gero $z = 2y + x \ \Rightarrow\ y = \frac{z}{2} - \frac{x}{2}$. Ondorioz, hona hemen soluzioa:

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan(\sqrt{2}x + \sqrt{2}K_1) - \frac{x}{2}. \quad \square$$

4.4. Ekuazio homogeneoak.

Definizioa. $f(x,y)$ funtzioak $f(t\cdot x, t\cdot y) = t^n \cdot f(x,y)$ ezaugarria betetzen badu, n. mailako funtzio homogeneoa izango da.

4.12. adibidea. $f(x,y) = x^2+y^2-xy$, 2. mailako funtzio homogeneoa da, zeren

$$f(t\cdot x, t\cdot y) = t^2x^2 + t^2y^2 - t^2xy = t^2(x^2+y^2-xy) = t^2 f(x,y).$$

Definizioa. $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ itxurako ekuazioari, zeina $f(x,y)$ funtzioa 0. mailako funtzio homogeneoa den, ekuazio homogeneo deritzogu.
Mota hauetakoak askatzeko, lehenbizi $f(x,y) = \varphi(y/x)$ gisaz idatziko dugu, eta, gero, aldagai-aldaketa hau aplikatuko diogu:

$$u = \frac{y}{x} \iff x\cdot u = y \quad \text{eta} \quad \text{deribatuz} \quad u + x\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} = \varphi(u).$$

Ekuazio hau lehen ikusitako aldagai banatuetakoa da, hots:

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

4.13. adibidea. Askatu $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ ekuazio diferentzial homogeneoa.

Ebazpena.

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \Rightarrow y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow f(tx, ty) = f(x, y)$$

ekuazio homogeneoa da. Beraz, ondoko aldagai aldaketa egingo dugu:

$$u = y/x, \quad y = ux, \quad y' = u + xu' \Rightarrow u + xu' = \sqrt{1 - u^2} + u$$

Orain, ekuazioa aldagai banatuetakoa bihurtu denez, hau izango dugu:

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \arcsin u = \ln|x| + K \Rightarrow u = \sin(\ln|x| + K),$$

eta $xu = y$ aldaketa deseginez, soluzio orokorra izango dugu:

$$y = x \sin(\ln|x| + K). \quad \square$$

Ariketa. Kalkulatu $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ ekuazioaren soluzioa. *(Em.: $y = \pm\sqrt{Kx^3 + x^2}$.)*

Baldin $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ motako ekuazioa badugu, orduan

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

sistema lineala askatuko dugu. Hiru aukera hauek ager daitezke:

- Sistema bateragarria indeterminatua: bi zuzenak berdinak dira, orduan $(a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2)$ eta $y' = F(\lambda) = K$, ekuazio normala da.
- Sistema bateraezina: bi zuzenak paraleloak dira, zeren $(a_1, b_1) = \lambda(a_2, b_2)$ eta $c_1 \neq \lambda c_2$. Kasu honetan, $z = a_2x + b_2y$ aldagai aldaketa eginez, ekuazioa aldagai banatuetakoa bihurtuko da.
- Sistema bateragarri determinatua: bi zuzenak puntu bakar batean gurutzatzen dira. Izan bedi (x_0, y_0) puntua sistemaren soluzioa. Orain,

ekuazioari $\overline{x} = x - x_0$, $\overline{y} = y - y_0$ aldagai-aldaketa aplikatuko diogu ekuazio homogeneo bihurtzeko.

4.14. adibidea. Askatu $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$ ekuazio diferentziala.

Ebazpena. Lehendabizi ondoko sistema ebatziko dugu:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0. \end{cases}$$

Haren soluzioa $(x_0, y_0) = (-1, 3)$ da. Jarraian $\overline{x} = x + 1$ eta $\overline{y} = y - 3$ aldagai aldaketa erabiliko dugu hurrengo ekuazio homogeneo baliokidea idazteko:

$$(\overline{x} + \overline{y})d\overline{x} + (\overline{x} - \overline{y})d\overline{y} = 0 \Rightarrow \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{\overline{x} + \overline{y}}{\overline{x} - \overline{y}} = \frac{1 + \frac{\overline{y}}{\overline{x}}}{\frac{\overline{y}}{\overline{x}} - 1} \Rightarrow$$

$$u + \overline{x}u' = \frac{1 + u}{u - 1},$$

non $u = \overline{y}/\overline{x}$ eta $u + \overline{x}u' = \overline{y}'$ baitira. Orain, ekuazioa aldagai banatuetakoa denez:

$$\frac{du}{\frac{1+u}{u-1} - u} = \frac{d\overline{x}}{\overline{x}} \Rightarrow \frac{u - 1}{-u^2 + 2u + 1}du = \frac{d\overline{x}}{\overline{x}} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\ln|-u^2 + 2u + 1| = K + \ln|\overline{x}| \Rightarrow -u^2 + 2u + 1 = K(\overline{x})^2.$$

Orain, $u = \overline{y}/\overline{x}$ eta $\overline{x} = x + 1$, $\overline{y} = y - 3$ aldagai-aldaketak deseginez, honako soluzio hau lortuko dugu era inplizitoan:

$$-\left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 + 2\left(\frac{y-3}{x+1}\right) + 1 = K(x+1)^2. \ \square$$

4.5. Ekuazio zehatzak. Faktore integratzailea.

Definizioa. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ motako ekuazioari *ekuazio zehatz* esaten zaio, baldin eta $u(x, y)$ gisako funtzio bat existitzen bada non ondoko erlazioak betetzen diren:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{eta} \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ondorioz, funtzio horretarako zera betetzen da:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow u = k.$$

Oharra. Baldin $u(x,y)$ funtzioa C^2 klasekoa bada, orduan x eta y-rekiko deribatu partzial gurutzatuen ordenak ez du emaitza aldatuko:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ondorioz, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ekuazioa zehatza da baldin eta soilik baldin $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ bada.

4.15. adibidea. Askatu $(\sin(xy) + xy\cos(xy))dx + x^2\cos(xy)dy = 0$ ekuazio zehatza.

Ebazpena.

$$\begin{aligned}
M(x,y) &= \sin(xy) + xy\cos(xy) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) \\
N(x,y) &= x^2\cos(xy) \qquad\qquad\quad \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)
\end{aligned}$$

Beraz, ekuazio zehatza izateko baldintza bete da, eta, ondorioz, $u(x,y)$ funtzio bat existitzen da, eta honela kalkula daiteke:

- Aurrenik

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int M(x,y)dx = \int (\sin(xy) + xy\cos(xy))dx \\
&= -\frac{\cos(xy)}{y} + y\int x\cos(xy)dx \\
&= -\frac{\cos(xy)}{y} + y\left(\frac{x\sin(xy)}{y} - \frac{1}{y}\int \sin(xy)dx\right) \\
&= -\frac{\cos(xy)}{y} + x\sin(xy) + \frac{\cos(xy)}{y} + h_1(y) \\
&= x\sin(xy) + h_1(y)
\end{aligned}$$

non $h_1(y)$ batugaia x-rekiko integrazio-konstantea den.

- Bigarrenez, era berean:

$$u(x,y) = \int N(x,y)dy = \int x^2 \cos(xy)dy = x\sin(xy) + h_2(x)$$

non y-rekiko integrazio-konstantea den $h_2(x)$.
Ondorioz, u-ren adierazpenak berdinak izateko, aski da $h_1(y) = h_2(x) = 0$ hartzea. Orduan, soluzioa $u(x,y) = x\sin(xy) = K$ da, edo, esplizituki adierazita:

$$y(x) = \frac{1}{x}\arcsin\frac{K}{x}. \quad \square$$

4.5.1. Faktore integratzaileak.

Batzuetan, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ekuazio diferentziala ez da zehatza, $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ direlako, baina, konponketa txiki baten bitartez, ekuazio zehatza bihur dezakegu. Horretarako trikimailu bat erabili behar dugu. Baldin $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ batuketa 0 bada eta $\mu(x,y)$ funtzioaz biderkatzen badugu, adierazpenak 0 balioko du:

$$\mu(x,y)\cdot M(x,y)dx + \mu(x,y)\cdot N(x,y)dy = 0.$$

Aurreko ekuazioa zehatza izateko, bere deribatu partzial hauek berdinak izan behar dute:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu N) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu M),$$

edo formula hori garatuz:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} \iff N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu.$$

Azken ekuazio hori betetzen duen $\mu(x,y)$ funtzioa aurkitu behar dugu. Funtzio horri *faktore integratzaile* deituko diogu, ekuazioa integratzen lagunduko baitigu. Azken ekuazio hori deribatu partzialetakoa da; beraz, hasierako ekuazio diferentzial arrunta baino zailagoa izan daiteke. Hala ere, μ-ri buruzko aztarnaren bat daukagu eta prozesua asko erraztuko da. Adibidez, baldin badakigu faktore integratzailea soilik x-ren menpekoa dela, $\mu = \mu(x)$, orduan asko laburtuko da goiko ekuazioa:

$$\mu = \mu(x) \Rightarrow \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0 \Rightarrow N\frac{\partial\mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

Azken adierazpen hori soilik x-ren menpekoa bada, orduan ebatzi egin daiteke. Adibide batzuetan $\mu(y)$, $\mu(x^n y^m)$ eta antzeko menpekotasunak ager daitezke.

4.16. adibidea. Askatu $(x+y^2)dx - 2xydy = 0$ ekuazio diferentziala $\mu = \mu(x)$ faktore integratzaile baten laguntzaz.

Ebazpena. Kasu honetan, $M = x + y^2$ eta $N = -2xy$ ditugunez, zera lortuko dugu:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y+2y}{-2xy} = -\frac{2}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{d\mu}{\mu} = -2\int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow$$

$$\ln|\mu| = -2\ln|x| \;\Rightarrow\; \mu(x) = x^{-2},$$

integrazioaren konstantea 0 dela kontsideratuz (faktore integratzaile sinpleena erabiltzeko). Orain, emandako ekuazio diferentziala faktore integratzaileaz biderkatuz, ondorengo ekuazio zehatza izango dugu:

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx - \frac{2y}{x}dy = 0 \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} u(x,y) = \displaystyle\int \frac{x+y^2}{x^2}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx = \ln|x| - \frac{y^2}{x} + h_1(y) \\ u(x,y) = \displaystyle\int -\frac{2y}{x}dy = -\frac{y^2}{x} + h_2(x), \end{cases}$$

$u(x,y)$-ren bi adierazpenak berdinak izateko $h_1(y) = 0$ eta $h_2(x) = \ln|x|$ bete behar dira. Ondorioz

$$u(x,y) = \ln|x| - \frac{y^2}{x} = K \;\Rightarrow\; y(x) = \pm\sqrt{(\ln|x| - K)x}. \quad \square$$

4.6. Lehenengo ordenako ekuazio linealak.

Baldin ekuazio diferentziala y eta y' funtzioekiko lineala bada, orduan lehenengo mailako ekuazio diferentzial lineala dela esango dugu. Nolabait esateko, ekuazio hauetan ez da y^2, yy', $y(y')^2$ ... motako gairik agertzen.

Definizioa. Lehenengo mailako ekuazio diferentzial lineala honela idatz daiteke:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

non $p(x)$ eta $q(x)$ funtzio jarraituak diren $y(x)$-ren definizio eremuan. Hona hemen ekuazio horiek ebazteko metodoa. Goiko ekuazio lineala ondoko eran ere idatz daiteke:

$$(p(x)y - q(x))dx + dy = 0.$$

Ekuazio hori zehatza izateko, zera bete behar da:

$$M(x,y) = p(x)y - q(x) \;\Rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y} = p(x)$$
$$N(x,y) = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Orduan, bi kasu gerta daitezke. Bata, $p(x) = 0$ izatea. Kasu honetan, ekuazioa zehatza izango litzateke bai eta normala ere; beraz, integratu baino ez genuke egin beharko. Bestea, $p(x) \neq 0$ izatea; kasu honetan, $\mu = \mu(x)$ faktore integratzaile bat bilatuko dugu, ekuazio lineala zehatz bihurtzeko. Beraz:

$$\mu(x)(p(x)y - q(x))dx + \mu(x)dy = 0,$$

Ekuazio hori zehatza izateko, honako hau bete behar da:

$$M(x,y) = \mu(x)(p(x)y - q(x)) \;\Rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y} = \mu(x)p(x)$$
$$N(x,y) = \mu(x) \;\Rightarrow\; \frac{\partial N}{\partial x} = \mu'(x),$$

$\mu'(x) = \mu(x)p(x)$ izanik. Hau da:

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x) \;\Rightarrow\; \frac{d\mu}{\mu} = p(x)dx \Rightarrow\; \ln|\mu| = \int p(x)dx \Rightarrow$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

faktore integratzailea izango da. Behin faktorea kalkulatuta, ekuazio zehatzeko $y = y(x)$ emaitza kalkulatuko dugu. Orokorrean ere egin dezakegu:

$$e^{\int p(x)dx}(p(x)y - q(x))dx + e^{\int p(x)dx}dy = 0 \iff$$

$$e^{\int p(x)dx}(p(x)y - q(x)) + e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} = 0 \iff$$

$$e^{\int p(x)dx}p(x)y + e^{\int p(x)dx}y' = e^{\int p(x)dx}q(x) \iff$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right) = e^{\int p(x)dx}q(x).$$

Eta, integratuz, zera lortuko dugu:

$$e^{\int p(x)dx}y = \int e^{\int p(s)ds}q(x)dx + K \iff$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(s)ds}q(x)dx + K\right) \tag{4.1}$$

Beraz, ekuazio lineal bat ebatzi behar dugunean ondoko urratsei jarraitu behar diegu:

(1) $\mu = \mu(x)$ faktore integratzailea bilatzea.

(2) Lortutako ekuazio zehatza ebaztea.

Edonola ere, (4.1) formula zuzena ere erabil dezakegu $y = y(x)$ kalkulatzeko.

4.17. adibidea. Askatu $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ ekuazio lineala.

Ebazpena. (1) $p(x) = 2x \Rightarrow \int p(x)dx = x^2 \Rightarrow \mu(x) = e^{x^2}$.

(2) Emandako ekuazioa faktore integratzaileaz biderkatzen dugu eta, gero, lorturiko ekuazio zehatza ebazten dugu:

$$e^{x^2}y' + e^{x^2}2xy = e^{x^2}2xe^{-x^2} \iff$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}y\right) = 2x$$

Eta, integratuz, zera lortzen dugu:

$$e^{x^2}y = \int 2xdx = x^2 + K \iff$$

$$y = y(x) = e^{-x^2}(x^2 + K). \quad \square$$

Egiaztatu (4.1) formula zuzenean erabiliz ere, emaitza berbera ondorioztatzen dela.

Ariketa. Kalkulatu $y' + \frac{1}{x}y = 3x$ ekuazioaren soluzioa. $\left(\textit{Em.: } y = x^2 + \frac{K}{x}.\right)$

4.6.1. Bernoulli-ren ekuazioa.

Ekuazio diferentziala honelakoa bada:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n,$$

—non $p(x)$ eta $q(x)$ funtzio jarraituak diren $y = y(x)$ funtzioaren definizio-eremuan eta $n \neq 0$, $n \neq 1$ (bestela lineala da)—, orduan *Bernoulli-ren ekuazio* deitzen da.
Baina ekuazio hori lehenengo ordenako ekuazio lineal bihur daiteke, $z = y^{1-n}$ aldagai-aldaketa eginez.

4.18. adibidea. Askatu $xy' + y = y^2 \ln x$ ekuazio diferentziala.

Ebazpena. x-rekin zatituz, zera dugu:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2, \tag{4.2}$$

beraz, Bernoulli-ren ekuazio diferentziala da, $n = 2$ izanik. Izan bedi $z = y^{1-2} = y^{-1}$, orduan $y = 1/z$, eta x-rekiko deribatuz gero, $y' = -z'/z^2$ dugu. Hori (4.2) ekuazioan ordeztuz, zera lortzen da:

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{xz} = \frac{\ln x}{xz^2} \;\Rightarrow\; z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x},$$

zeina ekuazio lineala baita. Ondorioz, $p(x) = -1/x$, $q(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$ dira; beraz:

$$\int p(x)dx = \int -\frac{dx}{x} = -\ln x \;\Rightarrow\; e^{\int p(x)dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Eta

$$\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx = \int \frac{1}{x}(-\frac{\ln x}{x})dx = \int -\frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{\ln x + 1}{x} + K$$

Gainera, $e^{-\int p(x)dx} = e^{\ln x} = x$. Orain, (4.1) formula aplikatuz, ondokoa dugu:

$$z = x\left(\frac{\ln x + 1}{x} + K\right) = \ln x + 1 + Kx \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{\ln x + 1 + Kx}. \quad \square$$

Ariketa. Kalkulatu $y' + y = xy^3$ ekuazioaren soluzioa. $\left(\textit{Em.: } y^{-2} = x + \frac{1}{2} + Ke^{2x}, \textit{ hau da, } y = \dfrac{1}{\pm\sqrt{x + \frac{1}{2} + Ke^{2x}}} \right)$

4.7. Bigarren ordenako ekuazioak. Ordena-murrizketa.

Ordena handiko ekuazioetan, $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, ekuazioaren ordena txikiagotu egin daiteke F funtzioaren egituraren arabera.
Atal honetan, eredu fisikoetan askoetan agertzen den $n = 2$ kasua aztertuko dugu batez ere, hau da, $F(x, y, y', y") = 0$ ekuazio diferentzialak; baina ikusiko dugun guztia $n > 2$ den kasuetan ere aplika daiteke.
Bi kasu aztertuko ditugu: bata, y mendeko aldagaia agertzen ez denekoa, eta bestea, x aldagai askea agertzen ez denekoa.

4.7.1. F funtzioa soilik x, y', y'' aldagaien mendekoa denean.

Kasu honetan, $F(x, y', y'') = 0$ ekuazio bat dugu. Egoera honetan, $y'(x) = p(x)$ aldagai-aldaketa erraza burutuko dugu ekuazioa bigarren ordenatik lehenengo ordenara murrizteko, izan ere, $y''(x) = p'(x)$.
Ondorioz, ekuazioa honako gisa honetan idatz daiteke p funtzio ezezagunaren funtzioan:

$$F(x, p, p') = 0.$$

Orain, ekuazioa lehenengo ordenako ekuazio diferentziala da; horren soluzioa $p(x)$ funtzioa izango da, eta, $y'(x) = p(x)$ denez, $p(x)$ integratu baino ez dugu egin behar, benetako $y(x)$-ren adierazpena lortzeko.

4.19. adibidea. Askatu $xy^{iv} - y''' = 0$.

Ebazpena. $n > 2$ motako kasu bat da, baina teknika antzekoa da. $F(x, y''', y^{iv}) = 0$ ekuazioan y, y' eta y''-ek parte hartzen ez dutenez, aurreko metodoa erabil daiteke. Egoera honetan $y'''(x) = p(x)$ aldagai aldaketa erraza burutuko dugu ekuazioa laugarren ordenatik lehenengo ordenara murrizteko. Aldagai aldaketa hori erabiliko dugu honako aldagai banatuetako ekuazio baliokide hau lortzeko:

$$xp' - p = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|p| = \ln|x| + K_1$$

$$\Rightarrow \; p(x) = K_1 x.$$

Jarraian, $p(x)$ funtzioa hiru aldiz integratuko dugu, $y(x)$ soluzioa lortzeko:

$$\begin{aligned} y'' &= \int K_1 x \; dx = \frac{K_1}{2}x^2 + K_2, \\ y' &= \int \left(\frac{K_1}{2}x^2 + K_2 \right) \; dx = \frac{K_1}{6}x^3 + K_2 x + K_3, \\ y &= \int \left(\frac{K_1}{6}x^3 + K_2 x + K_3 \right) \; dx = \frac{K_1}{24}x^4 + \frac{K_2}{2}x^2 + K_3 x + K_4 \end{aligned}$$

Konstanteak bilduz, $y(x) = K_1 x^4 + K_2 x^2 + K_3 x + K_4$ dugu. □

Ariketa. Kalkulatu $xy'' - y' = 3x^2$ ekuazioaren soluzioa. $\big($*Em.:* $y(x) = x^3 + \frac{K_1}{2}x^2 + K_2\big)$

4.7.2. F funtzioan x aldagai askea agertzen ez denean.

Kasu honetan, $F(y, y', y'') = 0$ ekuazio bat dugu. Mota honetako ekuazioak askatzeko, lehenengoz $y' = p$ ordezkapena burutuko dugu, eta, gero y aldagai asketzat hartuko dugu. Orain, $p = p(y)$, y-ren menpeko funtziotzat har dezakegu, x ez baita ekuazioan agertzen. Orain, x-rekiko deribatuak y eta p-ren bidez adieraziko dira:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = p(y) \\ y'' &= \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'(y) \cdot p(y) \end{aligned}$$

$F(y, p, p'p) = 0$ lehenengo ordenako ekuazioa askatuko dugu, eta $p(y)$-ren adierazpena lorturko dugu, eta, bukatzeko, $y' = p(y)$ lehenengo ordenako ekuazioa askatuko dugu.

4.20. adibidea. Askatu $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

Ebazpena. Ekuazioan x ez dagoenez $y' = p(y)$, $y'' = p(y) \cdot p'(y)$ aldagai aldaketa erabiliko dugu,

$$y'' + (y')^2 = 2e^{-y} \iff pp' + p^2 = 2e^{-y} \iff p' + p = 2e^{-y}p^{-1}$$

Hala, Bernoulli-ren ekuazioa lortuko dugu. Beraz, $z = p^{1-(-1)} = p^2$ aldagai-aldaketa eginez edo baliokideki $p = z^{1/2}$, ondorioz $p' =$

$z^{-1/2}z'/2$, orduan $p' + p = 2e^{-y}p^{-1}$ ekuazioa $\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y}$ ekuazio lineala bihurtzen da, non $\mu(y)$ faktore integratzailea honako hau den:

$$\mu(y) = e^{\int 2dy} = e^{2y}.$$

Orain, ekuazio lineala $\mu(y)$-rekin biderkatuz, zehatza bihurtzen da, eta, ondorioz, zera lortzen da:

$$\frac{d}{dy}(e^{2y}z) = 4e^{y} \ \Rightarrow \ e^{2y}z = \int 4e^{y}dy = 4e^{y} + K_1.$$

Hortaz, ekuazio linealaren soluzioa $z = 4e^{-y} + K_1e^{-2y}$ da.
Baina, $z = p^2$ denez gero, Bernoulli-ren ekuazioaren soluzioa $y' = p(y) = \pm\sqrt{4e^{-y} + K_1e^{-2y}}$ da.
Amaitzeko, $p(y) = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + K_1e^{-2y}}$ dugunez, zera ondorioztatzen da:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4e^{-y} + K_1e^{-2y}}} = \int \pm 1dx \ \Rightarrow \ \frac{\sqrt{4e^{y} + K_1}}{2} = \pm x + K_2.$$

Azkenik, $y = \ln((\pm x + K_2)^2 + K_1)$ dugu. $\square$

Ariketa. Kalkulatu $y'' + a^2y = 0$ ekuazioaren soluzioa. $\Big($*Em.:* $y(x) = \dfrac{\sqrt{2K_1}}{a}\sin(\pm ax + aK_2).\Big)$

4.8. n. ordenako ekuazio linealak.

4.8.1. Funtzio linealki askeak, eta wronskiarra.

Izan bitez $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funtzioak (a,b) tartean definituak. Baldin eta $x \in (a,b)$ puntu guztietan honako berdintza hau bete dadin:

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + \ldots + \alpha_ny_n(x) = 0$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ izan behar badute, orduan funtzio horiei *linealki askeak (linealki independenteak)* esaten zaie; beste era batera esanda, $y_i(x)$ funtzio bakoitza ezin da besteen konbinazio linealaz adierazi.
Jakina denez, aurreko berdintzan $\alpha_i \neq 0$ existituko balitz (adibidez $\alpha_1 \neq 0$), orduan $-y_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2(x) + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}y_n(x)$ genuke, hau da, $y_1(x)$ funtzioa besteen konbinazio linealaren bidez eraiki ahal izango genuke.
Adibidez, honako 3 funtzio multzo hauek linealki askeak dira:
$B_1 = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$;

$B_2 = \{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, \ldots, e^{mx}\}$; eta
$B_3 = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin px, \cos px\}$.
Izan bedi $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ funtzio multzoa $C^{n-1}(a,b)$ klaseko funtzio multzo bat (hots, y_i guztiak $n-1$ bider deribagarriak dira (a,b) definizio-eremuan, deribatuak jarraituak izanik). Funtzioak eta horien deribatuek osatzen duten ondorengo determinanteari *wronskiar* deritzo, eta haren balioak funtzio multzoaren askatasun linealari buruzko informazio zehatza emango digu.

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

4.21. adibidea. $\{e^{K_1x}, e^{K_2x}, e^{K_3x}\}$ funtzio multzoaren wronskiarra honako hau da:

$$W(e^{K_1x}, e^{K_2x}, e^{K_3x}) = \begin{vmatrix} e^{K_1x} & e^{K_2x} & e^{K_3x} \\ K_1e^{K_1x} & K_2e^{K_2x} & K_3e^{K_3x} \\ K_1^2e^{K_1x} & K_2^2e^{K_2x} & K_3^2e^{K_3x} \end{vmatrix} =$$

$$(K_2 - K_1)(K_3 - K_1)(K_3 - K_2)e^{(K_1+K_2+K_3)x}$$

4.1. teorema. *Baldin $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ funtzio sistemaren wronskiarra nulua ez bada ($W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ bada), orduan funtzio-sistema linealki askea izango da.*

Adibidez, $\{e^x, e^{2x}, e^{-x}\}$ funtzio multzoa linealki askea da, baina $\{x, x^2, 3x - x^2\}$ ez da linealki askea (egiaztatu).

4.8.2. Koefiziente konstantedun ekuazio lineal homogeneoak.

Definizioa. Demagun honako ekuazio diferentzial lineal homogeneo hau dugula:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$$

non $a_0, \ldots, a_n$ konstante errealak diren, ekuazio horri *koefiziente konstantedun ekuazio lineal homogeneo* deitzen zaio.

Horren soluzioa bilatzeko, $y(x) = e^{\lambda x}$ motako funtzioen artean bilatuko dugu, λ parametro ezezaguna izanik. Hautaketa horren ondorioz, zera dugu:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots, \quad y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

eta, ordezkatu ondoren ekuazioak honako itxura hau izango du:

$$a_0\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_n e^{\lambda x} = (a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n)e^{\lambda x} = 0.$$

$e^{\lambda x}$ beti hertsiki positiboa denez, λ konstanteak honako baldintza hau bete behar du:

$$R(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Azken berdintza horri *ekuazio karakteristiko* deritzogu, eta haren erroek $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ekuazio linealaren soluzioa eraikitzeko balioko digute. Ekuazio karakteristikoaren erroen sailkapena egin behar dugu orain:

(a) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ **errealak eta desberdinak dira.**

Orduan $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ soluzio-multzoa funtzio-sistema askea izango da; ondorioz, ekuazio lineal homogenoaren soluzio orokorra $K_1, K_2, \ldots, K_n$ hautazko konstanteez osatutako honako funtzio hau izango da:

$$y_h(x) = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + K_n e^{\lambda_n x}.$$

4.22. adibidea. Askatu $y''' - y'' - 2y' = 0$.

Ebazpena. Lehendabizi ekuazio karakteristikoa idatziko dugu:

$$R(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Haren erroak $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ eta $\lambda_3 = -1$ dira. Erro guztiak errealak eta desberdinak direnez, soluzioa hautazko hiru konstanteen funtziopean idatz dezakegu:

$$y(x) = K_1 e^{0x} + K_2 e^{2x} + K_3 e^{-x} = K_1 + K_2 e^{2x} + K_3 e^{-x}. \quad \square$$

Ariketa. Kalkulatu $y'' - 3y' + 2y = 0$ ekuazioaren soluzioa. (*Em.:* $y(x) = K_1 e^x + K_2 e^{2x}$.)

(b) **Erro errealak dira, baina batzuk errepikatuta daude.** Hau da:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_j = \lambda.$$

Orduan, $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{j-1}e^{\lambda x}, e^{\lambda_{j+1}x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ soluzio multzoa funtzio-sistema askea izango da; ondorioz, ekuazio lineal homogeneoaren soluzio orokorra $K_1, K_2, \ldots, K_n$ hautazko konstanteez osatutako funtzio hau izango da:

$$y_h(x) = K_1e^{\lambda x}+K_2xe^{\lambda x}+\ldots+K_jx^{j-1}e^{\lambda x}+K_{j+1}e^{\lambda_{j+1}x}+\ldots+K_ne^{\lambda_n x}.$$

4.23. adibidea. Askatu $y^{iv} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$.

Ebazpena. Lehendabizi ekuazio karakteristikoa idatziko dugu:

$$R(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Horren erro bakuna $\lambda_1 = -2$ da, baina beste erroa, $\lambda_2 = 1$, anizkoitza da (anizkoiztasuna=3). Orduan, atal honi dagokion ekuazio motakoa da; beraz, honela eraikiko dugu soluzioa:

$$y(x) = K_1e^{-2x} + K_2e^x + K_3xe^x + K_4x^2e^x. \quad \square$$

Ariketa. Kalkulatu $y''' - 4y'' - 3y' + 18y = 0$ ekuazio diferentzialaren soluzioa. (*Em.:* $y(x) = K_1e^{-2x} + K_2e^{3x} + K_3xe^{3x}$.)

(c) **Erro konplexu desberdinak.** Hau da:

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, & \lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1, \\
\lambda_3 = \alpha_2 + i\beta_1, & \lambda_4 = \alpha_2 - i\beta_2, \\
\vdots & \vdots \\
\lambda_{2n-1} = \alpha_n + i\beta_n, & \lambda_{2n} = \alpha_n - i\beta_n.
\end{array}$$

Baldin $\alpha_1+i\beta_1$ ekuazio karakteristikoaren erroa bada, orduan haren konjokatua ere, $\alpha_1 - i\beta_1$, erroa izango da; beraz, $e^{(\alpha_1+i\beta_1)x}$ eta $e^{(\alpha_1-i\beta_1)x}$ soluzioak linealki askeak izango dira, eta, zenbaki konplexuen ezaugarrien ondorioz[1] funtzio horien honako bi konbinazio lineal hauek ekuazio diferentzial linealaren soluzio linealki

[1] **Euler-en formula:** $e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$. Beraz:

$$e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha e^{i\beta} = e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta).$$

askeak izango dira (wronskiarraren bidez froga daiteke):

$$\frac{1}{2}\left(e^{(\alpha_1+i\beta_1)x}+e^{(\alpha_1-i\beta_1)x}\right)=e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x$$

eta

$$\frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha_1+i\beta_1)x}-e^{(\alpha_1-i\beta_1)x}\right)=e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x.$$

Ondorioz, hona hemen soluzio linealki askeen multzoa:
$\{e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x\ ,\ e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x\ ,\ e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x\ ,\ e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x\ ,\ \dots\ ,$
$e^{\alpha_n x}\sin\beta_n x\ ,\ e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x\}.$
Ekuazio lineal homogeneoaren soluzio orokorra, hortaz, $K_1, K_2, \dots, K_{2n}$ hautazko konstanteez osatutako honako funtzio hau izango da:
$y_h(x) = K_1 e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x + K_2 e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + \dots + K_{2n-1}e^{\alpha_n x}\sin\beta_n x +$
$+K_{2n}e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x.$

4.24. adibidea. Askatu $y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0$.

Ebazpena. Lehendabizi ekuazio karakteristikoa idatziko dugu:

$$R(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0.$$

$\lambda_1 = 2$ ekuazioaren erro erreala da, baina beste erroak konplexuak eta bakunak dira; izan ere, $\lambda_2 = 1 + i$ eta $\lambda_3 = 1 - i$. Orduan, atal honetako baldintzapean gaude, eta soluzioa honako batugai hauetaz osatuta dago:

$$y(x) = K_1 e^{2x} + K_2 e^x \sin x + K_3 e^x \cos x. \quad \square$$

Ariketa. Kalkulatu $y'' - 6y' + 25y = 0$ ekuazioaren soluzioa. (*Em.:* $y(x) = K_1 e^{3x}\sin 4x + K_2 e^{3x}\cos 4x$.)

(d) Erro konplexuak dira, baina batzuk j bider errepikatuak. Hau da:

$$\alpha_1 \pm i\beta_1 = \alpha_2 \pm i\beta_2 = \dots = \alpha_j \pm i\beta_j = \alpha \pm i\beta,$$

$$\alpha_{j+1} \pm i\beta_{j+1}, \dots, \alpha_n \pm i\beta_n$$

$\alpha \pm i\beta$ erro konjokatuek j anizkoiztasuna dute polinomio karakteristikoan. Ondorioz, soluzio askeen multzoa honako hau da:

$\Big\{e^{(\alpha+i\beta)x},\ e^{(\alpha-i\beta)x},\ xe^{(\alpha+i\beta)x},\ xe^{(\alpha-i\beta)x}, \ldots,\ x^{j-1}e^{(\alpha+i\beta)x},$
$x^{j-1}e^{(\alpha-i\beta)x},\ e^{(\alpha_{j+1}+i\beta_{j+1})x},\ e^{(\alpha_{j+1}-i\beta_{j+1})x}, \ldots,\ e^{(\alpha_n+i\beta_n)x},$
$e^{(\alpha_n-i\beta_n)x}\Big\}$

Aurreko (c) ataleko zenbaki konplexuen konbinazio linealak erabiliz, honako soluzio multzo hau eraikiko dugu:

$\Big\{e^{\alpha x}\sin\beta x,\ e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ x^{j-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$
$x^{j-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha_{j+1}x}\sin\beta_{j+1}x,\ e^{\alpha_{j+1}x}\cos\beta_{j+1}x, \ldots,\ e^{\alpha_n x}\sin\beta_n x,$
$e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x\Big\}$

Ekuazio lineal homogeneoaren soluzio orokorra $K_1, K_2, \ldots, K_{2n}$ hautazko konstanteez osatutako honako funtzio hau izango da:

$$\begin{aligned}y_h(x) =& K_1e^{\alpha x}\sin\beta x + K_2e^{\alpha x}\cos\beta x +\\ & K_3xe^{\alpha x}\sin\beta x + K_4xe^{\alpha x}\cos\beta x +\\ & \ldots +\\ & K_{2j-1}x^{j-1}e^{\alpha x}\sin\beta x + K_{2j}x^{j-1}e^{\alpha x}\cos\beta x +\\ & K_{2j+1}e^{\alpha_{j+1}x}\sin\beta_{j+1}x + K_{2j+2}e^{\alpha_{j+1}x}\cos\beta_{j+1}x +\\ & \ldots +\\ & K_{2n-1}e^{\alpha_n x}\sin\beta_n x + K_{2n}e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x.\end{aligned}$$

4.25. adibidea. Askatu $y^{iv} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$.

Ebazpena. Lehendabizi ekuazio karakteristikoa idatziko dugu:

$$R(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0.$$

Horren erroak konplexuak eta anizkoitzak dira, $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$ eta anizkoiztasuna=2. Beraz, soluzioa sail honi dagokio, eta lau hautazko konstanteen menpekoa da:

$$y(x) = K_1e^x\sin x + K_2e^x\cos x + K_3xe^x\sin x + K_4xe^x\cos x. \quad \square$$

4.8.3. Koefiziente konstantedun ekuazio lineal osoak.

Orain aurreko ekuazioen orokorpena aztertuko dugu, hots, berdintzaren eskuineko gaia desberdin zero den kasua.

Definizioa. Izan bitez $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstanteak eta $f(x) \neq 0$. Honako adierazpen honi *koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial lineal oso* deritzogu:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x).$$

Baldin $y_h(x)$ *ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra* bada, eta $y_p(x)$ *ekuazio osoaren soluzio partikular bat*, hau da:

$$a_0 y_h^{(n)} + a_1 y_h^{(n-1)} + \ldots + a_n y_h = 0$$

eta

$$a_0 y_p^{(n)} + a_1 y_p^{(n-1)} + \ldots + a_n y_p = f(x),$$

orduan $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ *ekuazio osoaren soluzioa* izango da. Hona hemen egiaztapena:

$$a_0(y_h^{(n)} + y_p^{(n)}) + a_1(y_h^{(n-1)} + y_p^{(n-1)}) + \ldots + a_n(y_h + y_p) =$$
$$(a_0 y_h^{(n)} + a_1 y_h^{(n-1)} + \ldots + a_n y_h) + (a_0 y_p^{(n)} + a_1 y_p^{(n-1)} + \ldots + a_n y_p) =$$
$$0 + f(x) = f(x).$$

Hortaz, ekuazio osoaren soluzio orokorra honela bilatuko dugu. Lehenengoz, 4.8.2 atalean ikusi dugun moduan, ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra, $y_h(x)$, aurkituko dugu, eta, gero, ekuazio osoaren soluzio partikular bat: $y_p(x)$. Bi adierazpen horien baturarekin ekuazio osoaren soluzio orokorra lortuko dugu, hots, $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.
Ekuazio osoaren soluzio partikularra $f(x)$ gai ez-homogeneoaren menpean dago. Funtzio horren egiturak honako eredu honen antza badu, orduan soluzioa bilatzeko bide sistematikoari jarraitu diezaiokegu.
Baldin funtzioa $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ motakoa bada (non $P_n(x)$ eta $Q_m(x)$, hurrenez hurren, n. eta m. mailako polinomioak diren), orduan soluzioaren egitura honako hau izango da:

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}(\overline{P}_k(x)\cos\beta x + \overline{Q}_k(x)\sin\beta x),$$

non $\overline{P}_k(x)$ eta $\overline{Q}_k(x)$ osagaiak k. mailako polinomio ezezagunak diren ($k = \max\{n, m\}$) eta s berretzailea $\lambda = \alpha + i\beta$ erroaren anizkoiztasuna $R(\lambda)$ polinomioan. $R(\lambda)$-ren erroa $\lambda = \alpha + i\beta$ ez bada, $s = 0$ izango da.
Hona hemen gerta daitezkeen kasu guztiak:

(1) $\underline{f(x) = P_n(x)}$ denean, $\alpha = 0$ eta $\beta = 0$. Beraz, $\lambda = 0 + 0i = 0$. Ondorioz,

   (a) $R(0) \neq 0$ bada, $s = 0$ izango da, eta $y_p = \overline{P}_n(x)$ izango dugu.

(b) $R(0) = 0$ bada, $s \neq 0$ izango da, eta $y_p = x^s \overline{P}_n(x)$ izango dugu.

(2) $\underline{f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)}$ denean, $\alpha \neq 0$ eta $\beta = 0$. Beraz, $\lambda = \alpha + 0i = \alpha$. Ondorioz,

(a) $R(\alpha) \neq 0$ bada, $s = 0$ izango da, eta $y_p = e^{\alpha x} \overline{P}_n(x)$ izango dugu.

(b) $R(\alpha) = 0$ bada, $s \neq 0$ izango da, eta $y_p = x^s e^{\alpha x} \overline{P}_n(x)$ izango dugu.

(3) $\underline{f(x) = P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x}$ denean, $\alpha = 0$ eta $\beta \neq 0$. Beraz, $\lambda = 0 + \beta i = \beta i$. Ondorioz,

(a) $R(\beta i) \neq 0$ bada, $s = 0$ izango da, eta $y_p = \overline{P}_k(x) \cos \beta x + \overline{Q}_k(x) \sin \beta x$ izango dugu, non $k = \max\{n, m\}$ den.

(b) $R(\beta i) = 0$ bada, $s \neq 0$ izango da, eta $y_p = x^s (\overline{P}_k(x) \cos \beta x + \overline{Q}_k(x) \sin \beta x)$ izango dugu, non $k = \max\{n, m\}$ den.

(4) $\underline{f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)}$ denean, $\alpha \neq 0$ eta $\beta \neq 0$. Beraz, $\lambda = \alpha + \beta i$. Ondorioz,

(a) $R(\alpha+\beta i) \neq 0$ bada, $s = 0$ izango da, eta $y_p = e^{\alpha x}(\overline{P}_k(x) \cos \beta x + \overline{Q}_k(x) \sin \beta x)$ izango dugu, non $k = \max\{n, m\}$ den.

(b) $R(\alpha+\beta i) = 0$ bada, $s \neq 0$ izango da, eta $y_p = x^s e^{\alpha x}(\overline{P}_k(x) \cos \beta x + \overline{Q}_k(x) \sin \beta x)$ izango dugu, non $k = \max\{n, m\}$ den.

4.26. adibidea. Aurkitu $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$ ekuazioaren soluzio orokorra.

Ebazpena.

(i) $\underline{y_h(x)}$ kalkulatuko dugu (ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra). Kasu honetan zera dugu:

$$R(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Ekuazio karakteristiko horrek $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ erro anizkoitz bakarra du, eta anizkoiztasuna=2 da. Beraz:

$$y_h(x) = K_1 e^{3x} + K_2 x e^{3x}.$$

(ii) Orain, $\underline{y_p(x)}$ kalkulatuko dugu (ekuazio osoaren soluzio partikular bat). Kasu honetan $f(x) = 25e^x \sin x$ denez, (4) kasuan gaude:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad P_n(x) = 0, \quad Q_m(x) = 25.$$

Baina, $R(1+i) \neq 0$, hau da, $1+i$ ez da ekuazio karakteristikoaren erroa; beraz, $s = 0$ da. Gainera, $k = \max\{0,0\} = 0$. Ondorioz, soluzio partikularra gisako honetakoa izango da:

$$y_p(x) = e^x(A\cos x + B\sin x).$$

A eta B-ren balioak kalkulatzeko, $y_p(x)$ eta bere deribatuak hartuko ditugu:

$$y_p'(x) = e^x\big((A+B)\cos x + (B-A)\sin x\big)$$
$$y_p''(x) = e^x(2B\cos x - 2A\sin x),$$

eta ekuazio osoan ordezkatuko ditugu:

$$25e^x \sin x = y'' - 6y' + 9y = e^x((3A-4B)\cos x + (4A+3B)\sin x).$$

Honako sistema hau bete behar denez:

$$\begin{cases} 3A - 4B = 0 \\ 4A + 3B = 25, \end{cases}$$

$A = 4$, $B = 3$ balioak lortzen dira. Hortaz, hona hemen soluzio partikular bat:

$$y_p(x) = e^x(4\cos x + 3\sin x)$$

(iii) Orduan, ekuazio osoaren soluzio orokorra zera da:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K_1e^{3x} + K_2xe^{3x} + e^x(4\cos x + 3\sin x). \quad \square$$

Oharra. Baldin eta $f(x)$ gai ez-homogeneoaren egitura funtzio batzuen batura bada:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_l(x),$$

orduan ekuazio osoaren soluzio partikularra $f_i(x)$ funtzioei dagozkien soluzio partikularren batura izango da, hau da,

$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) + \ldots + y_{p,l}(x),$$

non $a_0y_{p,i}^{(n)} + a_1y_{p,i}^{(n-1)} + \ldots + a_ny_{p,i} = f_i(x)$ betetzen den, $i = 1, 2, \ldots, l$.