2. GAIA:

Aldagai bateko funtzioak

Matematika Aplikatua,

Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboa Saila

Zientzia eta Teknologia Fakultatea

Euskal Herriko Unibertsitatea

Aurkibidea

2. gaia
Aldagai bateko funtzioak.

2.1. Aldagai errealeko funtzio erreala.

2.1.1. Aldagaia.

Magnitude fisiko batzuk neurtzean zenbakizko balioak lortzen dira. Adibidez, denbora, luzera, azalera, bolumena, masa, presioa, abiadura, eta abar.

Fenomeno batzuetan magnitude batzuk aldatzen dira, hau da, haien zenbakizko balioa aldatzen da. Beste magnitude batzuen balioa, aldiz, konstante mantentzen da. Adibidez, puntu baten higidura uniformean, denbora eta distantzia aldatzen dira, eta abiadura konstante mantentzen da.

Definizioak.

Balio desberdinak har ditzakeen magnitudeari, *magnitude aldakor* edo, hitz bakar batez esanda, *aldagai* deritzo.
Bere balioa aldatzen ez duen magnitudeari *konstante* esaten zaio.
Aldagaiak $x, y, z, u, v, \cdots$, letren bidez izendatuko ditugu, eta *magnitude konstanteak* $a, b, c, \cdots$, letren bidez.
Baina matematikan, maiz, *konstantea* balio guztiak berdinak dituen aldagaia da.

2.1.2. Funtzioa.

Naturako zenbait fenomeno aztertzean eta problema teknikoak ebaztean magnitude batek beste baten aldakuntzarekiko duen aldakuntza aztertzeko beharra sortzen da. Adibidez, higidura aztertzean, ibilbidea denboraren menpeko aldagaitzat jotzen da.

2.1. adibidea. Jakina denez, $A = \pi R^2$ formula ezagunak zirkuluaren azalera haren erradioaren funtzio bezala ematen du. R erradioak zenbakizko hainbat balio hartzen dituenean, A azalerak dagozkion balioak hartzen ditu. Beraz, A azalera R erradioaren funtzioa da.

Definizioak.

x aldagaiak eremu batean hartzen duen balio bakoitzari y aldagaiaren balio bat dagokionean, *y aldagaia x-ren funtzio* dela esaten da. Honela adieraz daiteke sinbolikoki:

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = y(x), \quad \text{eta abar.}$$

x aldagaiaren balio bakoitzari y-ren balio bat baino gehiago dagokionean, funtzioa *multiformea* dela esaten dugu. Aldiz, aurreko puntuan definitu dugun funtzioari *uniforme* edo *uniboko* deritzo. Normalean, funtzio uniformeak erabiliko ditugu, bestela, adierazi egiten da.
y balio bakoitzari x-ren balio bat badagokio, eta alderantziz, funtzioari *biuniboko* edo *injektibo* deitzen diogu.
x aldagaiari *aldagai independente* edo *argumentu* esaten zaio.
x eta y aldagaien arteko erlazioak menpekotasun funtzional izena du.
y balioak (funtzioaren balioak) $f(x)$ legearen bidez emanik daudenean, x balioen multzoari *funtzioaren definizio-eremua* deritzo eta y balioen multzoari *funtzioaren irudia edo ibiltartea.*

2.2. adibidea. $y = \sin x$ funtzioa x-ren balio guztietarako definituta dago. Beraz, haren definizio-eremua $\mathbb{R}$ da, eta irudi multzoa $[-1, 1]$ tartea.

2.3. adibidea. $y = \sqrt{x+1}$ funtzioaren definizio-eremua $[-1, \infty)$ da, eta haren irudi multzoa $\mathbb{R}^+$.

Ariketa. Aurkitu $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 5$ funtzioaren definizio-eremua eta irudi multzoa.

Funtzioak taula baten bidez edo adierazpen grafiko baten bidez eman daitezke, eta askotan, *adierazpen analitiko* baten bidez, baina ez beti.

Adibidez, egun batean zehar estazio meteorologiko batean neurturiko airearen T tenperaturaren datuak eman daitezke t denborarekiko (ordutan, adibidez); T tenperaturaren balioa (gradu zentigradutan) emango dugu. Taula horrek T t-ren funtzioan ematen du.

Bestalde, $y = f(x)$ menpekotasun funtzionalean f adierazpen analitikoa bada, x-ren funtzioa den y analitikoki emanik dagoela esango dugu. Adibidez,

$$y = x^4 - 2, \quad y = \frac{\log x - \sin x}{5x^2 + 1}, \quad y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

f funtzioari *funtzio gorakor* deitzen diogu hau betetzen bada:

$$\forall x, y \in \mathcal{S}, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y);$$

hor, S f-ren definizio-eremua da. Azken desberdintza hertsia bada —hots, $<$ —, funtzioa *hertsiki gorakorra* dela esaten da.

f funtzioari *funtzio beherakor* esaten zaio hau betetzen bada:

$$\forall x, y \in \mathcal{S}, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y).$$

Azken desberdintza hertsia bada —hau da, $>$ —, funtzioa *hertsiki beherakorra* dela esaten da.
Funtzio bat gorakorra edo beherakorra bada, *monotonoa* dela esaten da. Funtzio hertsiki monotonoak biunibokoak dira.

2.1.2.1. Funtzioen eragiketa aljebraikoak.

Eremu berbera duten funtzioak batu eta kendu ditzakegu, eta funtzio hauek sortu:

$$\begin{aligned} f+g &\quad\longrightarrow\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\ f-g &\quad\longrightarrow\quad (f-g)(x) = f(x) - g(x). \end{aligned}$$

Bi funtzioak biderka ditzakegu,

$$f \cdot g \quad\longrightarrow\quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

$g(x) \neq 0$ bada, biderketarekiko g-ren alderantzizkoa lor dezakegu:

$$\frac{1}{g} \quad\longrightarrow\quad \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$$

eta funtzio-zatiketa ere badago:

$$\frac{f}{g} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Izan bitez α eta β zenbaki errealak; eragiketa hau sor daiteke:

$$\alpha \cdot f \quad \longrightarrow \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x),$$

eta f *eta* g*-ren konbinazio lineala* era dezakegu,

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot g \quad \longrightarrow \quad (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x).$$

Ariketa. Egin aurreko eragiketak funtzio hauekin: $f(x) = x^3 + x - 1$ eta $g(x) = 3x^2 + 4$, $\alpha = 6$ eta $\beta = -5$ izanik.

2.1.2.2. Funtzio-konposizioa.

Izan bitez $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ eta $g : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko bi funtzio, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ izanik.

Suposa dezagun $f(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Kasu honetan, h funtzio berri bat honela defini dezakegu:

$$\forall x \in \mathcal{A} \quad | \quad f(x) \in \mathcal{B}, \quad h(x) = g[f(x)].$$

h funtzio berriari x-ren *funtzio konposatu* deritzogu eta sinbolikoki ondorengo era honetan adierazten da:

$$h = g \circ f.$$

Eragiketa horrek badauka elkartze-propietatea, hau da:

$$[f \circ (g \circ h)](x) = [(f \circ g) \circ h](x).$$

Ariketa. Izan bitez $f(x) = 1/x$, $g(x) = x + 2$ eta $h(x) = (x^2 + 1)^2$. Egiaztatu hiru funtzio horiek elkartze-propietatea betetzen dutela.

Bestalde, funtzio-konposizioak ez dauka trukatze-propietaterik.

2.4. adibidea. Izan bitez $g(x) = x^2$ eta $f(x) = x + 1$.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

aldiz,

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = g(x) + 1 = x^2 + 1.$$

2.1.2.3. Funtzio baten alderantzizko funtzioa.

2.1. teorema. *Izan bedi f funtzioa $\mathcal{S}$ multzoaren gainean definitua. Baldin f funtzio biunibokoa bada, $f(\mathcal{S})$-ren gainean g funtzio bat eta soilik bat existitzen da, non*

$$f[g(x)] = x \quad \forall x \in f(\mathcal{S}) \tag{2.1}$$

betetzen den.

Oharra. Alderantziz ere betetzen da, alegia:

$$g[f(x)] = x \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Definizioa.

Izan bedi f funtzio biunibokoa. Aurreko teoreman definitutako g funtzio bakar horri *f-ren alderantzizko funtzio* deitzen diogu, eta f^{-1} adierazpenarekin idazten da.

Ondorioak:

1. $f[f^{-1}(x)] = x \quad \forall x \in f(\mathcal{S})$,
   (2.1) adierazpena erabiliz lortzen da.
2. $f^{-1}[f(x)] = x \quad \forall x \in \mathcal{S}$.
   Frogatzeko, erabili $t = f(x)$, jarri x-ren ordez lehenengo ondorioan, eta gero gogoratu f funtzio biunibokoa dela.
3. Aurreko ondorioen arabera, "f^{-1} funtzioak desegiten du f-ren lana", eta alderantziz. Hau da,

$$x \quad \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \quad y$$

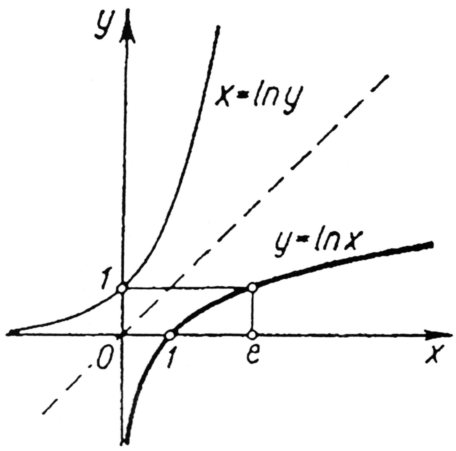
4. $y = f(x)$ eta $x = f^{-1}(y)$ funtzioek grafiko berbera dute.

5. $y = f(x)$ eta $y = f^{-1}(x)$ funtzioek grafiko simetrikoak dituzte 1. koadrantearen diagonalarekiko.

2.1.2.4. Funtzio garrantzitsu batzuen adibideak.

- *Funtzio esponentziala.*
  $y = e^x \qquad (e = 2.71828...)$
  $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
  $\mathcal{I}(f) = (0, \infty)$

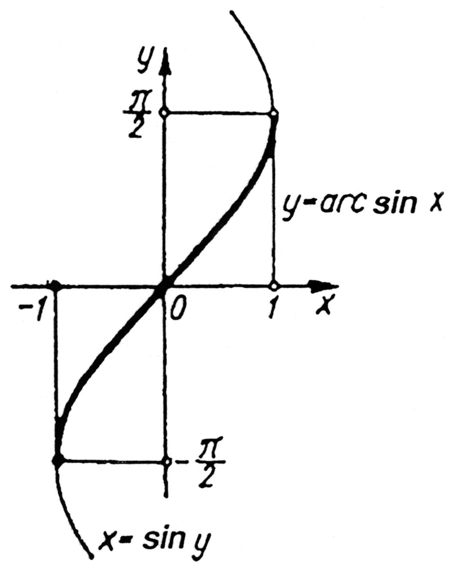
- *Funtzio logaritmikoa.*
  $y = \ln x \qquad$ (funtzio esponentzialaren alderantzizkoa)
  $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$
  $\mathcal{I}(f) = \mathbb{R}$



2.1. irudia. $y = \ln x$-ren eta $y = e^x$-ren grafikoak.

- *Funtzio trigonometrikoak.*
  $y = \sin x$
  $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
  $\mathcal{I}(f) = [-1, 1]$

- *Alderantzizko funtzio trigonometrikoak.*
  $y = \arcsin x$
  $\mathcal{D}(f) = [-1, 1]$
  $\mathcal{I}(f) = \mathbb{R}$



2.2. irudia. $x = \sin y$-ren eta $y = \arcsin x$-ren grafiko komuna.

Ariketa. Irudikatu $y = \tan x$ eta ondorio moduan lortu $y = \arctan x$ funtzioaren grafikoa.

2.2. Funtzio limiteak.

2.2.1. Funtzio baten limitea.

Demagun a puntuaren inguru batean f funtzio bat definituta dagoela (ez da beharrezkoa a-n bertan izatea).

INTUITIBOKI, ingurune horretan x-ren balioa a-rantz hurbiltzean $f(x)$ funtzioarena l balio tinko baterantz hurbiltzen bada, *$x \to a$ denean f-ren limitea l dela* esaten da; honela idazten da:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l,$$

"limite $f(x)$, x-k a-rantz jotzen duenean, l da" irakurtzen dugu.

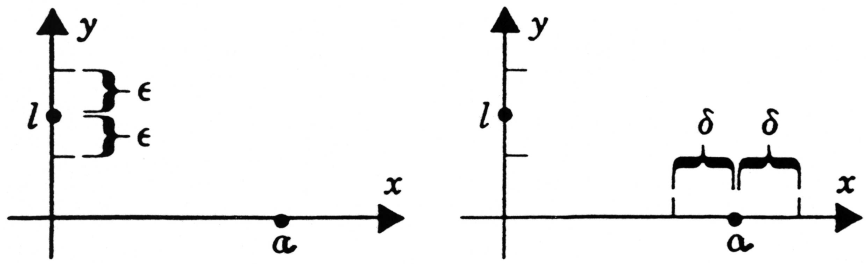
FORMALIZATUZ, definizio hau dugu.

Definizioa.

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in (l-\epsilon, l+\epsilon),$$

l zenbaki finitua delarik.

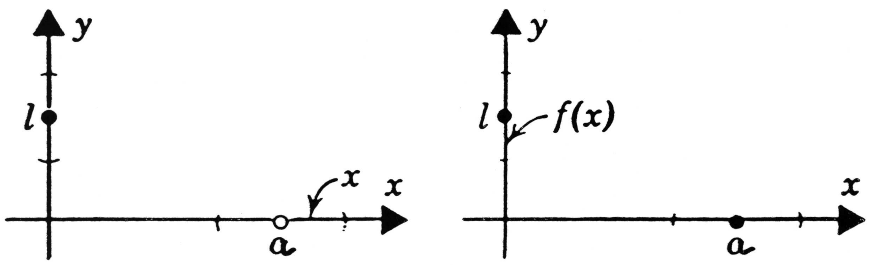
Limitearen definizioaren esanahi geometrikoa. Definizio hori honela ere esan daiteke:



2.3. irudia. Limitearen definizioaren inguruneak.

▷ l-ren $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ ingurune guztietarako

▷ a-ren $(a-\delta, a+\delta)$ ingurunea existitzen da,



2.4. irudia. Limitearen definizioa.

▷ non $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ bada,

▷ $f(x) \in (l-\epsilon, l+\epsilon)$ betetzen baita.

Oharra.

Ez da beharrezkoa f funtzioa a puntuan definituta egon dadin. Adibidez,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$$

ez dago definiturik $x = 2$ puntuan —$f(2) = 0/0$ baita—, baina ez dio axola, zeren $x \neq 2$ guztietarako baitago definituta, eta kasu horretan

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = x - 2$$

da. Beraz, x 2-tik hurbil badago, $f(x)$ funtzioak $x - 2$ balioa hartzen du. Ondorioz, zera dugu:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x - 2 = 0.$$

2.2.2. Funtzio limiteen propietateak.

2.2. teorema. Limitearen bakartasuna.

Funtzio batek puntu batean limitea badu, limite hori bakarra da.

2.2.3. Propietate aljebraikoak.

Izan bitez $\lim_{x \to a} f(x) = l$ eta $\lim_{x \to a} g(x) = m$.

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m.$

(ii) $\lim_{x \to a} [\alpha \cdot f(x)] = \alpha \cdot l.$

(iii) $P(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ bada, $\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$

(iv) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m.$

(v) $\lim_{x \to a} g(x) = m \neq 0$ bada, $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}.$

(vi) $\lim_{x \to a} g(x) = m \neq 0$ bada, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}.$

(vii) $\lim_{x\to a}[\log_b f(x)] = \log_b l \qquad (l > 0 \text{ eta } 1 \neq b > 0 \text{ direlarik}).$

(viii) $\lim_{x\to a}[f(x)^{g(x)}] = l^m \qquad (l > 0 \text{ delarik}).$

Ondorioak: (iii) eta (vi) propietateen bitartez zera dugu:
P eta Q funtzio polinomikoak badira, eta $Q(a) \neq 0$ bada haietan, hau betetzen da:

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

2.5. adibidea.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-5}{x^2+1} = \frac{6-5}{4+1} = \frac{1}{5}.$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{1-x^2} = \frac{27-27}{1-9} = 0.$$

2.3. teorema. Bitarteko funtzioaren teorema.

Izan bedi $p > 0$. Demagun $\forall x$ non $0 < |x-a| < p$ baita, eta hau betetzen dela:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x). \tag{2.2}$$

Baldin $\lim_{x\to a} h(x) = l$ eta $\lim_{x\to a} g(x) = l$ badira,
$\lim_{x\to a} f(x) = l$ izango da.

2.6. adibidea. Suposa dezagun $-x^2 \leq f(x) \leq x^2, \quad 0 < |x| \leq 1$ eta kalkula dezagun haren limitea $x \to 0$ denean.

Ebazpena:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} -x^2 = 0 \\ \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} = f(x) = 0. \quad \square$$

2.7. adibidea. Suposa dezagun $x^2 + 12x - 9 \leq f(x) \leq 5x^2, \quad \forall x \neq \frac{3}{2}$ eta kalkula dezagun haren limitea $x \to \frac{3}{2}$ denean.

Ebazpena:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} (x^2 + 12x - 9) = \dfrac{45}{4} \\ \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} 5x^2 = \dfrac{45}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = \frac{45}{4}. \quad \square$$

2.8. adibidea. Frogatu $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

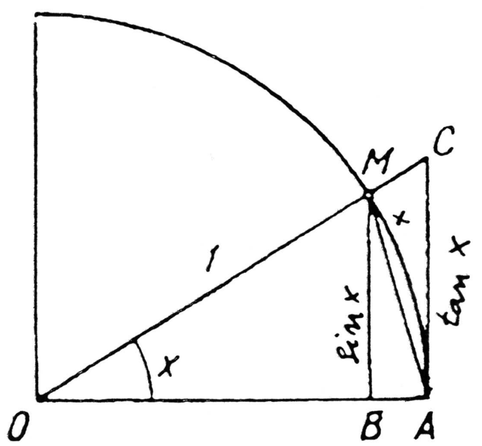
Ebazpena:

Demagun $0 < x < \frac{\pi}{2}$ dela, orduan $0 < \sin x < 1$ eta $\sin x < x < \tan x$ dira (ikusi irudia). Orain, $\sin x$ adierazpenaz zatituz hau lortzen da:

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$



eta $\lim\limits_{x \overset{x>0}{\to} 0} \cos x = 1$ denez, bitarteko funtzioaren teoremarekin hau dugu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Bestalde, egiazta dezakegu, $\frac{-\pi}{2} < x < 0$ denean emaitza berberera heltzen garela. Beraz,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \square$$

2.2.4. Funtzio bornatuak.

Definizioak.

Izan bitez f funtzioa eta $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(f)$ multzoa.
$f(\mathcal{S})$ bornatua bada, f funtzioa $\mathcal{S}$ multzoan *bornatuta* dagoela esaten da.

$\mathcal{S} = \mathcal{D}(f)$ denean f bornatua bada $\mathcal{S}$ multzoan, f *bornatua* dela esan ohi da. Adibidez:

- $y = \sin x$ bornatua da.
- $y = \tan x$ bornatua da $(-\pi/4, \pi/4)$ multzoan. Aldiz, ez da bornatua $(-\pi/2, \pi/2)$ multzoan.
- $y = 1/(x-3)$ ez da bornatua $(1, 4)$ multzoan, baina bai $(0, 2)$ multzoan.

2.4. teorema. *f funtzioak a puntuan limite finitua badu, badago f bornatu den a-ren ingurune bat.*

Frogantza.

Limitearen definizioaren bitartez,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \, x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) \in (l-\epsilon, l+\epsilon). \quad \square$$

2.5. teorema.

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l > 0$ *bada, badago* $f(x) > 0$ *mantentzen den a-ren ingurune bat.*

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l < 0$ *bada, badago* $f(x) < 0$ *mantentzen den a-ren ingurune bat.*

Frogantza.

Limitearen definizioa erabiliz.

(i) Nahikoa da hartzea edozein ϵ non $0 < \epsilon < l$.

(ii) Nahikoa da hartzea edozein ϵ non $0 < \epsilon < -l$. $\square$

2.2.5. Limite infinituak.

(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \quad \exists\delta > 0 \;\mid\; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$

2.9. adibidea. $\lim\limits_{x\to 4} 1/|x-4| = \infty.$

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x) = l \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\epsilon > 0 \quad \exists N > 0 \;\mid\; x > N \quad (-x > N)$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

2.10. adibidea. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0.$

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x) = \pm\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \quad \exists N > 0 \;\mid\; x > N \; (-x > N)$

$$\Rightarrow |f(x)| > M.$$

2.11. adibidea. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \infty.$

2.2.6. Infinitesimoak.

Definizioa.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ bada, $f(x)$ funtzioa *a puntuan infinitesimoa* dela esaten da.

2.12. adibidea.

- $\lim\limits_{x\to 3} (x-3)^2 = 0 \Rightarrow f(x) = (x-3)^2$ funtzioa 3 puntuan infinitesimoa da.

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0 \Rightarrow \sin x$ funtzioa 0 puntuan infinitesimoa da.

Ondorioak:

- $\lim_{x \to a} f(x) = l \neq 0$ bada, $g(x) = f(x) - l$ funtzioa infinitesimoa da a puntuan.

- $\lim_{x \to a} f(x) = l$ finitua bada eta $g(x)$ infinitesimoa a puntuan, $(f \cdot g)(x)$ funtzioa infinitesimoa da a puntuan.

Definizioa.

Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ infinitesimoak a puntuan.

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ bada, $f(x)$ eta $g(x)$ infinitesimoak *baliokide* deitzen dira, eta $f(x) \sim g(x)$ idazten da.

KASU INTERESGARRI BATZUK:

$$\begin{array}{cccll}
\sin f(x) & \sim & f(x), & f(x) \to 0 & \text{bada.} \\
1 - \cos f(x) & \sim & f^2(x)/2, & f(x) \to 0 & \text{bada.} \\
\tan f(x) & \sim & f(x), & f(x) \to 0 & \text{bada.} \\
a^{f(x)} - 1 & \sim & f(x) \ln a, & f(x) \to 0 & \text{bada.} \\
\text{bereziki,} & & & & \\
e^{f(x)} - 1 & \sim & f(x), & f(x) \to 0 & \text{bada.} \\
\ln(1 + f(x)) & \sim & f(x), & f(x) \to 0 & \text{bada.} \\
\text{beste era batean,} & & & & \\
\ln f(x) & \sim & f(x) - 1, & f(x) \to 1 & \text{bada.}
\end{array}$$

2.6. teorema. *Funtzio batean infinitesimo biderkatzaile edo zatitzaile baten ordez haren infinitesimo baliokide bat jartzen badugu, funtzioaren limitea ez da aldatzen.*

2.13. adibidea. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{x} = 3.$

2.7. teorema.

- *$f(x)$ funtzioak limite infinitua badu $x \to a$ denean, $\frac{1}{f(x)}$ funtzioa infinitesimoa izango da a puntuan.*

- *Alderantziz, $f(x)$ infinitesimoa bada a puntuan, $\frac{1}{f(x)}$ funtzioaren limitea infinitua izango da $x \to a$ denean.*

2.2.7. Albo-limiteak.

Definizioak.

$x \to a$ denean $f(x)$ funtzioaren *eskuin-limitea* l_1 dela esango dugu hau betetzen bada:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \mid 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon,$$

orduan, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_1$ idatziko dugu.

Oharra. $0 < x - a < \delta \Leftrightarrow a < x < a + \delta.$

$x \to a$ denean $f(x)$ funtzioaren *ezker-limitea* l_2 dela esango dugu hau betetzen bada:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \mid 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon,$$

orduan, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_2$ idatziko dugu.

Oharra. $0 < a - x < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a.$

2.8. teorema. *Puntu batean funtzio baten limitea existitzen da baldin eta soilik baldin bi albo-limiteak existitzen badira, eta biak berdinak badira. Hau da,*

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_1 \\ \exists \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_2 \end{cases} \quad \text{eta} \ \ l_1 = l_2.$$

Ariketa. Aztertu funtzio hauen limitearen existentzia $x = 0$ puntuan:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \lfloor x \rfloor,$$

non $\lfloor x \rfloor$ adierazpenak x baino txikiago edo berdina den zenbaki osorik handiena adierazten duen, *x-ren zati osoa* irakurriz .

2.3. Funtzio baten jarraitutasuna.

Normalean prozesu bat “jarraitua” dela esatean, etengabe eta aldaketa handirik gabe gertatzen dela ulertzen dugu. Matematikan, jarraitutasunaren ideia funtsezkoa da.

2.3.1. Jarraitutasuna puntu batean.

Orain arte, puntu batean funtzio baten joera aztertzean, hots, funtzio horren limitea kalkulatzean, ez zen beharrezkoa funtzioa bera puntu horretan definiturik egotea; orain, aldiz, beharrezkoa izango da.

Definizioa.

Har ditzagun (a, b) tartean definiturik dagoen $f(x)$ funtzioa eta $x_0 \in (a, b)$ puntua.

- $f(x)$ funtzioa x_0 puntuan *jarraitua* dela esango dugu hau betetzen bada:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2.3}$$

- Funtzio baten limitearen definizioa gogoratuz, eta orain $l = f(x_0)$ derrigorrean bete behar dela kontuan hartuz, jarraitutasunaren beste definizio bat eman dezakegu:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \mid x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon).$$

f funtzioa jarraitua bada $\mathcal{S}$ multzoko puntu guztietan, *$\mathcal{S}$ multzoan f jarraitua* dela esaten da.

Eta $\mathcal{S} = \mathcal{D}(f)$ multzoan f jarraitua bada, f funtzioa *jarraitua* dela esaten da.

2.3.2. Albo-jarraitutasuna.

- Izan bedi $[x_0, b)$ tartean definituriko $f(x)$ funtzioa. $f(x)$ funtzioa $x = x_0$ puntuan *eskuin-jarraitua* dela esango dugu, baldin $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ bada.

- Izan bedi $(a, x_0]$ tartean definituriko $f(x)$ funtzioa. $f(x)$ funtzioa $x = x_0$ puntuan *ezker-jarraitua* dela esango dugu, baldin $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ bada.

- f jarraitua da x_0 puntuan, baldin eta soilik baldin x_0 puntuan f eskuin- eta ezker-jarraitua bada.

- f funtzioa (a, b) tartean eta muturretan ere jarraitua bada, f funtzioa $[a, b]$ tarte itxian jarraitua dela esaten da.

2.3.3. Etenuneen sailkapena.

- $x = x_0$ puntuan f funtzioak jarraitutasunerako baldintzetariko bat betetzen ez badu, *etena* dela esaten da, eta $x = x_0$ puntuari funtzioaren *etenune* deritzo.

- Zein dira baldintza horiek? Hauek:

$$\begin{aligned} &1.\ \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l, \\ &2.\ \exists f(x_0) \quad \text{eta} \\ &3.\ l = f(x_0). \end{aligned}$$

Hona hemen etenuneen sailkapena:

(a) **Etenune gaindigarria** da 1. baldintza betetzen denean, baina 2.a edo 3.a ez. Etenune hau gainditzeko, $f(x_0) = l$ egitea nahikoa da. Adibidez, funtzio hauek $x = 0$ puntuan etenune gaindigarriak dituzte:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 10, & x = 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x}, \quad -1 < x \neq 0.$$

(b) **Lehen mailako etenunea** dugu hau gertatzen denean:

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \quad \text{eta} \quad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$$

baina,

(1) $l_1 \neq l_2$, biak finituak izanik, orduan *jauzi finitua* gertatzen dela esaten da. Adibidez,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

funtzioak jauzi finitua du $x = 0$ puntuan, $l_1 = 1$ (eskuin-limitea) eta $l_2 = -1$ (ezker-limitea) baitira.

(2) l_1 edo l_2 infinitua denean, *jauzi infinitua* gertatzen dela esaten da. Adibidez, $f(x) = 1/x$ funtzioak jauzi infinitua du $x = 0$ puntuan ($l_1 = \infty$ eta $l_2 = -\infty$).

(c) **Bigarren mailako etenunea** gutxienez albo-limiteren bat existitzen ez bada gertatzen da. Adibidez, funtzio honek ez du albo-limiterik:

$$f(x) = \begin{cases} \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Aztertu $f(x) = x \sin 1/x$ kasuan etenune mota.

- Orain arte erabili ditugun funtzio gehienak jarraituak ziren bere eremuko puntu bakoitzean. Honela gertatzen da polinomioekin,

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0);$$

funtzio arrazionalekin, hots, polinomioen zatidurekin,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad Q(x_0) \neq 0 \quad \text{bada;}$$

eta balio absolutu funtzioarekin,

$$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|.$$

2.3.4. Propietate aljebraikoak.

Izan bitez f eta g funtzio jarraituak x_0 puntuan, alegia,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{eta} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0),$$

limiteen propietate aritmetikoak kontuan hartuz, propietate hauek betetzen dira:

(i) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$.

(ii) $\lim_{x \to x_0} [\alpha \cdot f(x)] = \alpha \cdot f(x_0)$.

(iii) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = f(x_0) \cdot g(x_0)$.

(iv) $g(x_0) \neq 0$ bada, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{g(x_0)}$.

(v) $g(x_0) \neq 0$ bada, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

2.9. teorema. *Baldin f funtzioa jarraitua bada x_0 puntuan eta g funtzioa jarraitua $f(x_0)$ puntuan, $g \circ f$ funtzioa jarraitua da x_0 puntuan.*

Ideia erraza da. f jarraitua denez x_0 puntuan, hau dugu:

▷ x x_0-tik hurbil badago, $f(x)$-k $f(x_0)$-tik hurbil egon behar du;

eta g jarraitua denez $f(x_0)$ puntuan, hau dugu:

▷ $f(x)$ $f(x_0)$-tik hurbil badago, $g[f(x)]$-k $g[f(x_0)]$-tik hurbil egon behar du.

Ondorioz, x x_0-tik hurbil badago, $g[f(x)]$, $g[f(x_0)]$-tik hurbil egongo da; beraz, $g \circ f$ funtzio jarraitua izango da x_0 puntuan.

2.14. adibidea. Frogatu $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ jarraitua dela $\forall x$.

Ebazpena.

Hau ulertzeko nabarmen dezagun $F = g \circ f$ betetzen dela $f(x) = x^2 + 1$ eta $g(x) = \sqrt{x}$ baldin badira.

Har dezagun edozein zenbaki erreal x_0.
f jarraitua da x_0 puntuan (funtzio polinomikoa baita), eta $f(x_0) > 0$; beraz, g jarraitua da $f(x_0)$ puntuan.

Aurreko teorema kontuan hartuz, $F = g \circ f$ jarraitua da x_0 puntuan. Hipotesiz x_0 hautazko balioa zenez, F jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan. □

2.4. Funtzio jarraituen propietateak.

2.4.1. Bolzano-ren teorema.

2.10. teorema. *$y = f(x)$ funtzioa $[a, b]$ tarte itxian jarraitua bada eta $f(a) \cdot f(b) < 0$ betetzen bada, (a, b) tartean gutxienez c zenbaki erreal bat existitzen da non $f(c) = 0$ baita.*

2.4.2. Weierstrass-en teorema.

Lema.

$[a, b]$ tartean f funtzioa jarraitua bada, hor bornaturik dago.

2.11. teorema. *$[a, b]$ tartean f funtzioa jarraitua bada, tarte horretan gutxienez x_1 balio bat existitzen da zeinetarako*

$$f(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

betetzen baita.

Halaber, gutxienez x_2 balio bat existitzen da zeinetarako

$$f(x_2) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

betetzen baita.

(**Oharra.** $f(x_1)$ balioari $y = f(x)$ funtzioaren $[a, b]$ tarteko *balio maximo* deitzen diogu, eta $f(x_2)$ balioari funtzioaren $[a, b]$ tarteko *balio minimo* deritzo.)

2.4.3. Darboux-en teorema.

2.12. teorema. *$y = f(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua bada eta $f(a) \neq f(b)$ betetzen bada, $f(a)$ eta $f(b)$-ren arteko μ edozein zenbakitarako, beti existitzen da c balio bat (a, b) tartean non $f(c) = \mu$ baita.*

2.1. korolarioa. *$y = f(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua bada, gutxienez behin hartzen ditu bere balio maximo eta minimoaren arteko balio guztiak.*

2.5. Deribatua.

2.5.1. Deribatua puntu batean.

Definizioa.

Izan bitez $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ funtzioa eta $x_0 \in (a, b)$.
f funtzioa x_0 puntuan *deribagarria* (edo *diferentziagarria*) dela esaten dugu limite hau existitzen bada

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

eta finitua bada.

Existitzen bada, f funtzioaren *deribatu* x_0 puntuan deituko diogu, eta $f'(x_0)$ ikurraren bidez adieraziko dugu.

Oharra.

Aurreko limitea notazio hauekin ere adieraz daiteke:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0},$$

edota

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

non

$$\Delta x_0 = x - x_0$$
$$\Delta y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$$

baitira.

2.15. adibidea. Kalkula dezagun $f(x) = x^2$ funtzioaren deribatua $x = 3$ puntuan.

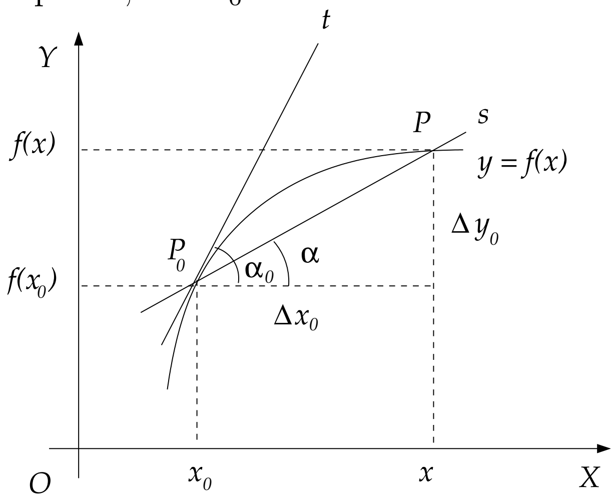
Ebazpena:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 6,$$

beraz, $f'(3) = 6$ eta funtzioa diferentziagarria da $x = 3$ puntuan. □

2.5.2. Deribatuaren esanahi geometrikoa.

Izan bitez $P_0(x_0, y_0)$ eta $P(x, y)$ puntuak $y = f(x)$ funtzio jarraituaren irudikapeneko bi puntu; hor P_0 finkoa eta P hautazkoa dira.



2.5. irudia. Deribatuaren esanahi geometrikoa.

Izan bitez

$$\Delta x_0 = x - x_0$$
$$\Delta y_0 = y - y_0.$$

Dakigunez, $\tan \alpha = \Delta y_0 / \Delta x_0$ da, eta arrazoi horrek s ebakitzailearen malda adierazten du.
Bestalde, $P \to P_0$ denean s zuzen ebakitzailearen limitea t zuzen ukitzailea da. Ondorioz,

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \tan \alpha = \tan \alpha_0,$$

gainera,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}.$$

Laburtuz, $f'(x_0) = \tan \alpha_0$ da, hots, f funtzioaren deribatua $x = x_0$ puntuan, P_0 puntuan $y = f(x)$ kurbaren zuzen ukitzailearen malda da.

2.5.3. Funtzio deribatua.

Definizioak.

1. f funtzioa deribagarria bada $\forall x \in (a, b)$, esaten da (a, b) tartean *deribagarria* dela.

2. Baldin $f(x)$ funtzioa deribagarria bada (a, b)-n, $f'(x)$ funtzio berria honela defini daiteke:

$$f' : x_0 \in (a, b) \to f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

   $f'(x)$ funtzioari $f(x)$ funtzioaren *funtzio deribatu* deritzo; eta $y = f(x)$ badugu, y' edo $\dfrac{dy}{dx}$ adierazpenez ere adierazten da.

3. Baldin

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

   existitzen bada, $f(x)$ funtzioa x_0 puntuan *ezker-deribagarria* dela esaten da, limite hori $f'(x_0^-)$ ikurrarekin adierazten da, eta f-ren *ezker-deribatu* x_0 *puntuan* deitzaio.

4. Baldin

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

   existitzen bada, $f(x)$ funtzioa x_0 puntuan *eskuin-deribagarria* dela esaten da; limite hori $f'(x_0^+)$ ikurrarekin adierazten da, eta f-ren *eskuin-deribatu* x_0 *puntuan* deitzen zaio.

2.13. teorema. *$f(x)$-ren deribatua x_0 puntuan existitzen da baldin eta soilik baldin albo-deribatuak existitzen badira, eta biak berdinak badira.*

Frogantza ariketa gisa ikusiko dugu.

2.14. teorema. *Funtzio bat deribagarria bada puntu batean, bertan jarraitua da.*

Frogantza.

Demagun $f(x)$ funtzioa x_0 puntuan deribagarria dela. Beraz, $f'(x_0)$ balio finitua existitzen da, hau da:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eta beraz

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Hori dela eta,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

dugu, eta ondorioz, $f(x)$ jarraitua da x_0 puntuan. $\square$

Oharra.

Alderantziz ez da betetzen oro har. Adibidez:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

jarraitua da, baina ez da deribagarria $x = 1$ puntuan.
Hori gertatzen da $f(x) = |x|$ funtzioarekin $x = 0$ puntuan.

2.5.4. Funtzio deribagarrien oinarrizko propietateak.

2.5.4.1. Propietate aljebraikoak.

Izan bitez f eta g funtzioak deribagarriak (a, b) tartean.

(i) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
(ii) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
(iii) $(f/g)'(x) = (f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x))/[g(x)]^2$; non $g(x) \neq 0$ baita.

2.5.4.2. Funtzio konposatuaren deribatua.

Izan bitez $y = f(x)$ eta $z = g(y)$ funtzioak.
Dakigunez, $h = g \circ f$ funtzio konposatua honela definitzen da:

$$h(x) = g(f(x)).$$

2.15. teorema. katearen erregela.

Jo dezagun $y_0 = f(x_0)$ *dela. Baldin* f *funtzioa deribagarria bada* x_0 *puntuan eta* g *deribagarria* y_0 *puntuan,* $h = g \circ f$ *funtzio konposatua deribagarria da* x_0 *puntuan, eta hau betetzen da:*

$$h'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0).$$

2.2. korolarioa. *Izan bitez* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *eta* $g : U \to \mathbb{R}$ *, eta hor* $f(a,b) \subset U$*. Orduan,* (a,b) *tarteko puntu guztietan teoremaren hipotesiak betetzen badira (ez bakarrik* x_0*-an), hau egiaztatzen da* $x \in (a,b)$ *puntu guztietarako:*

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x).$$

Oharra.

$y = g(u)$ eta $u = f(x)$ badira, $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ formularen bidez eman dezakegu korolarioaren adierazpena.

2.16. adibidea. Deriba dezagun $y = \sin x^2$.

Ebazpena:

Idatz dezagun proposaturiko funtzioa bi funtzio hauen konposizio moduan:

$$y = \sin u \quad \text{eta} \quad u = x^2.$$

Hau dugu:

$$y'_u = \cos u \quad \text{eta} \quad u'_x = 2x.$$

Beraz, aurreko formularen arabera,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2x = (\cos x^2) \cdot 2x. \quad \square$$

2.5.4.3. Alderantzizko funtzioaren deribatua.

Izan bedi $y = f(x)$ funtzio jarraitua eta monotonoa (hots, gorakorra edo beherakorra) $[a,b]$ tartean.

Aurrez ikusi genuen bezala, gorakorra (beherakorra) izateagatik funtzio hori biunibokoa da, eta ondorioz beraren alderantzizko funtzio bakar bat existitzen da —alegia, $x = f^{-1}(y)$.

Hau froga daiteke: aurreko baldintzetan $x = f^{-1}(y)$ funtzioa jarraitua dela $[f(a), f(b)]$ tartean (f beherakorra bada, $[f(b), f(a)]$ tartean).

2.16. teorema. *Izan bedi $y = f(x)$ funtzio jarraitua eta monotonoa $[a, b]$ tartean, $f(x_0) = y_0$ delarik.*

Baldintza hauetan $f'(x_0)$ existitzen bada, $f'(x_0) \neq 0$ izanik, $x = f^{-1}(y)$ deribagarria da y_0 puntuan eta hau betetzen du:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

2.5.4.4. Funtzio esponentzialaren deribatua.

Izan bitez $u = u(x)$ eta $v = v(x)$. Demagun $y = u^v$ dela; orduan logaritmo nepertarrak aplikatuz zera dugu:

$$\ln y = \ln u^v = v \ln u,$$

eta bi atalak deribatuz x-rekiko,

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u} \Rightarrow$$
$$y' = y\left[v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right] = u^v\left[v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right] = u^v v' \ln u + vu'u^{v-1}.$$

Hau da, $(u^v)' = u^v v' \ln u + vu'u^{v-1}$.

2.5.4.5. Funtzio elementalen deribatuak.

$y = K,$ $y' = 0;$
$y = x^a,$ $y' = ax^{a-1};$

$y = \sin x,$ $y' = \cos x;$
$y = \cos x,$ $y' = -\sin x;$
$y = \tan x,$ $y' = 1/\cos^2 x;$
$y = \arcsin x,$ $y' = 1/\sqrt{1-x^2};$
$y = \arccos x,$ $y' = -1/\sqrt{1-x^2};$
$y = \arctan x,$ $y' = 1/(1+x^2);$

$y = \log_a x,$ $y' = (1/x)\log_a e;$
$y = \ln x,$ $y' = (1/x);$

$y = a^x,$ $y' = a^x \ln a;$
$y = e^x,$ $y' = e^x;$
$y = u^v,$ $y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u;$

$y = \operatorname{sh} x,$ $y' = \operatorname{ch} x;$
$y = \operatorname{ch} x,$ $y' = \operatorname{sh} x;$
$y = \operatorname{th} x,$ $y' = 1/\operatorname{ch}^2 x;$

2.5.4.6. Funtzio inplizituaren deribatua.

Funtzio bat era inplizituan emanda dagoela esaten dugu $f(x,y) = 0$ funtzio baten bidez emanda badago. Adibidez, $x^2+y^2-a^2 = 0$ funtzioak inplizituki determinatzen ditu bi funtzio hauek:

$$y = \sqrt{a^2-x^2} \quad \text{edo} \quad y = -\sqrt{a^2-x^2}.$$

- Hala ere, funtzio inplizitu batetik beti ezin da bakandu forma esplizitua. Adibidez, $y^6 - y - x^2 = 0$ edo $y - x - \frac{1}{4}\sin y = 0$ funtzioak ezin dira adierazi funtzio elementalen bidez.
- Bestalde, $y = f(x)$ funtzio esplizitu oro adieraz dezakegu forma inplizituan, $y - f(x) = 0$.
- Nola kalkula dezakegu y' ?

Demagun $y = y(x)$ funtzioa $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ funtzio inplizituaren bitartez emanda dagoela. Berdintzaren bi atalak x-rekiko deribatuz, hau dugu:

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Ohartu $(y^2)' = 2yy'$ dela katearen erregelagatik.

Egiaztatu emaitza berbera lortzen dela $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ deribatuz.

2.17. adibidea. $y^6 - y - x^2 = 0$ deribatuz x-rekiko,

$$6y^5y' - y' - 2x = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x}{6y^5 - 1} \quad \square$$

2.5.5. Goi-ordenako deribatuak.

- Jo dezagun (a, b) tartean $f(x)$ deribagarria dela. Dakigunez, funtzio horretatik beste $f'(x)$ funtzio bat defini daiteke (a, b)-tik $\mathbb{R}$-ra, non $x_0 \mapsto f'(x_0)$ baita.

- Baina, f'-en funtzio deribatua *f-ren bigarren ordenako deribatua* deitzen da (edo *bigarren deribatu* soilik), eta $f''(x)$ edo y'' edo $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ idazten da.

- Berdin, $f^{(n-1)}$-en funtzio deribatua *f-ren n-garren ordenako deribatua* deitzen da (edo *n-garren deribatu* soilik), eta $f^{(n)}(x)$ edo $y^{(n)}$ edo $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ idazten da.

$y^{(n)}$ kalkulatzeko, Leibniz-en formula dugu,

$$\begin{aligned}
&y = uv \\
&y' = u'v + uv' \\
&y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'' \\
&y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \\
&\cdots \\
&y^{(n)} = \binom{n}{0}u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \ldots + \binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)} + \binom{n}{n}uv^{(n)}.
\end{aligned}$$

2.18. adibidea. Izan bedi $y = e^{ax}x^2$; aurkitu $y^{(n)}$.

Ebazpena. Kasu honetan $u = e^{ax}$ eta $v = x^2$; ondorioz:

$$u^{(n)} = a^n e^{ax} \qquad \text{eta} \qquad v^{(n)} = 0 \quad (n > 2 \text{ bada}).$$

Orain Leibniz-en formula aplikatuz,

$$y^{(n)} = a^n e^{ax}x^2 + na^{n-1}e^{ax}2x + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}e^{ax}2. \ \square$$

Ariketak.

1. Aurkitu $y^{(n)}$, $y = x^{n-1}\ln x$ bada.
2. Frogatu $y = \frac{1}{2}x^2e^x$ funtzioak $y'' - 2y' + y = e^x$ ekuazio diferentziala egiaztatzen duela.

2.5.6. Funtzio deribagarriei buruzko teoremak.

2.5.6.1. Rolle-ren teorema.

2.17. teorema. *$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua eta (a,b) tartean deribagarria bada, $f(a) = f(b)$ delarik, (a,b) tartean gutxienez $x = \xi$ puntu bat existitzen da, non $f'(\xi) = 0$ baita.*

2.5.6.2. Cauchy-ren teorema.

2.18. teorema. *$f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak $[a,b]$ tartean jarraituak eta (a,b) tartean deribagarriak badira, $g'(x) \neq 0$ delarik $\forall x \in (a,b)$, (a,b) tartean gutxienez $x = \xi$ puntu bat existitzen da, non*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

betetzen baita.

2.5.6.3. Lagrange-ren teorema.

2.19. teorema. *$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua eta (a,b) tartean deribagarria bada, (a,b) tartean gutxienez $x=\xi$ puntu bat existitzen da, non*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Frogantza. Aurreko teoremaren ondorio zuzena da $g(x)=x$ hartuz. □

Oharra. Lagrange-ren teorematik *gehikuntza finituen formula* ondorioztatzen da, eta honela adierazten da:

$$\exists \xi \in (a,b) \mid f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

2.5.6.4. L'Hôpital-en erregela.

2.20. teorema. *Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ $[a,b]$ tartean Cauchy-ren teoremaren hipotesiak betetzen dituzten bi funtzio, $f(a)=g(a)=0$ delarik. Baldintza horietan, hau dugu*

$$\exists \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x)$$

zera betetzen delarik:

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x)=\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x).$$

Oharrak.

(1.) L'Hôpital-en erregela betetzen da modu berean, nahiz eta $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak $x=a$ puntuan definituak ez izan $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)=0$ denean (nahikoa da $f(a)=g(a)=0$ definitzea).

(2.) Halaber, $a=\infty$ denean, L'Hôpital-en erregela baliozkoa da baldin

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

badugu (nahikoa da $t=1/x$ aldagai aldaketa egitea).

(3.) $f'(x)$ eta $g'(x)$ funtzioek $f(x)$ eta $g(x)$-ren baldintzak betetzen badituzte, L'Hôpital-en baldintzak egiaztatzen dira eta, beraz, hau betetzen da:

$$\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = \lim_{x\to a} f''(x)/g''(x)$$

eta horrela elkarren segidan.

2.21. teorema. *Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ funtzio jarraituak eta deribagarriak $x = a$ puntu baten ingurune batean, hor $g'(x) \neq 0$ delarik. Baldintza hauetan*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

bada, hau dugu:

$$\exists \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x)$$

eta zera betetzen da:

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x).$$

2.5.6.5. Taylor-en formula.

Izan bedi $y = f(x)$ funtzioa, $x = a$ puntuaren ingurune batean f, $(n+1)$. ordenarainoko deribagarria dena.

Orain saiatuko gara eraikitzen n baino maila handiagokoa ez den $y = P_n(x)$ polinomioa, hau betetzen duena:

$$\begin{aligned} P_n(a) &= f(a) \\ P_n'(a) &= f'(a) \\ P_n''(a) &= f''(a) \\ &\cdots\cdots \\ P_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Eraikitzen ari garen polinomioa $(x-a)$ berreturakoa izatea nahi dugu, hau da

$$P_n(x) = k_0 + k_1(x-a) + k_2(x-a)^2 + k_3(x-a)^3 + \cdots + k_n(x-a)^n$$

itxurakoa; hor k_0, k_1, k_2, $\cdots$, k_n, konstante erreal ezezagunak dira.

Beraz, polinomioa kalkulatzeko, nahikoa da koefiziente horien balioa lortzea.
Lehenengo, $P_n(x)$-ren deribatuak aurkituko ditugu:

$$\begin{aligned}
&P_n'(x) = k_1 + 2k_2(x-a) + 3k_3(x-a)^2 + \ldots + n \cdot k_n(x-a)^{n-1}\\
&P_n''(x) = 2k_2 + 3 \cdot 2k_3(x-a) + \ldots + n(n-1)k_n(x-a)^{n-2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot k_n,
\end{aligned}$$

orain (2.4) berdintzak kontuan hartuz, zera dugu:

$$\begin{aligned}
&P_n(a) = k_0 = f(a) \Rightarrow k_0 = f(a)\\
&P_n'(a) = 1! \cdot k_1 = f'(a) \Rightarrow k_1 = \frac{f'(a)}{1!}\\
&P_n''(a) = 2! \cdot k_2 = f''(a) \Rightarrow k_2 = \frac{f''(a)}{2!}\\
&\ldots\ldots\\
&P_n^{(n)}(a) = n! \cdot k_n = f^{(n)}(a) \Rightarrow k_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.
\end{aligned}$$

Beraz, bilatzen ari ginen polinomioa hau da:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

- Orain $f(x)$-ren ordez $P_n(x)$ jartzean sortzen den errorea hartuko dugu, hau da,
$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

- $R_n(x)$ gaia *gai osagarri* izenaz da ezaguna, eta
$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (2.5)$$
idazten da.

- Gai osagarria nahiko txikia den x-ren balioetan, $P_n(x)$ polinomioak $f(x)$ funtzioaren balio hurbildu bat ematen du.

- Ondorioz, $f(x)$-ren ordez $P_n(x)$-ren balioa kalkulatzean lortzen den zehaztasun-maila $R_n(x)$ da eta honela adierazten dugu:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \tag{2.6}$$

Hori da gai osagarrirako *Lagrange-ren formula.*

- Lagrange-ren formula eta $P_n(x)$ ordezkatuz (2.5) adierazpenean *Taylor-en formula* lortzen da:

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots \\ + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \end{aligned} \tag{2.7}$$

hor, $\xi \in (a, x)$ da.

- ξ balioa x eta a-ren artean dagoenez, honela idatz dezakegu:

$$\xi = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1,$$

horrela $a < x$ eta $x < a$ kasuak batera sartuta daude. Orain, gai osagarriaren formulak honelako itxura hartzen du:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

- Aurreko baldintza berdinetan, hau froga daiteke:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

- Azken formula horren arabera (2.7) adierazpena honela geratzen da:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)],$$

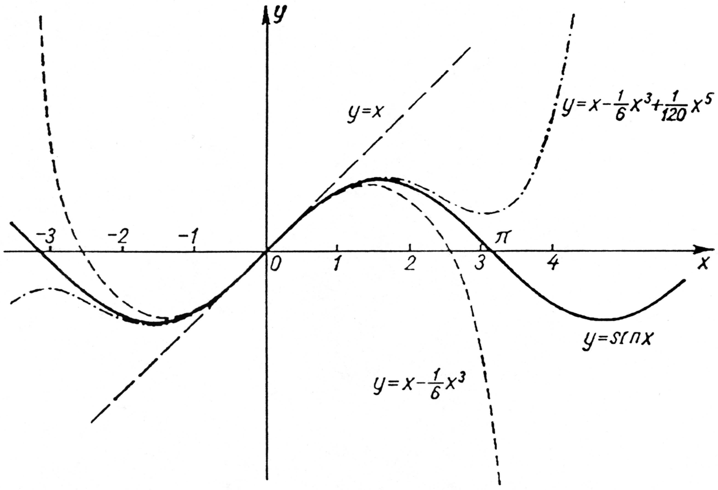
hor, $0 < \theta < 1$; adierazpen horri $f(x)$ funtzioaren *Taylor-en formula* deitzen zaio.

- $a = 0$ denean, Taylor-en formula honela idatz daiteke:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1,$$

MacLaurin-en formula deritzogu horri.

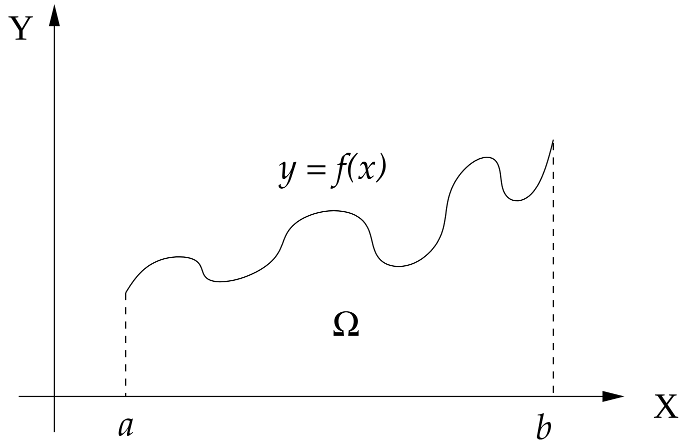


2.6. irudia. $y = \sin x$ funtzioaren hurbilpen polinomikoak $a = 0$ denean.

2.6. Integral mugatua.

Motibazioa: Azaleraren problema

Irudian, $y = f(x)$-ren grafikoak, OX ardatzak eta $x = a$ eta $x = b$ zuzenek mugatutako Ω eskualdea ikus daiteke.



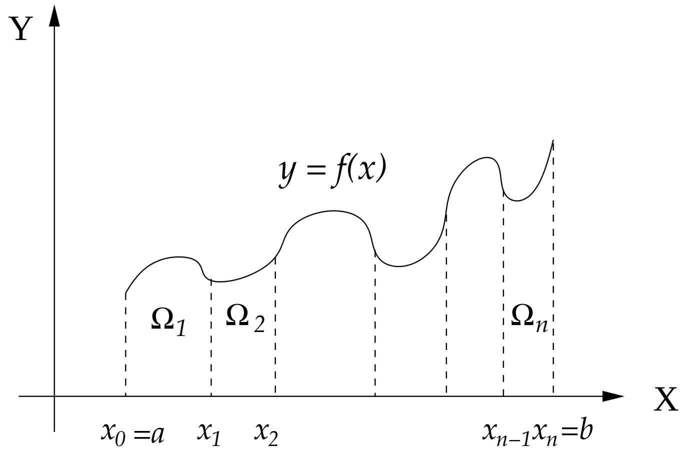
Orduan, hau da galdera:

Zenbatekoa da Ω-ren azalera?

Balioa hurbiltzeko, $[a, b]$ tartea n tartetan zatituko dugu, honela:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

hor $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ dira.



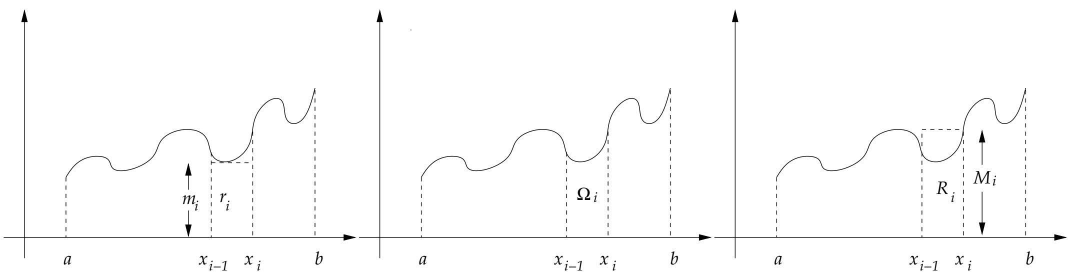
Ondorio gisa, Ω eskualdea n eskualdetan zatiturik geratzen da: $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$.
Ω_i bakoitzaren azalera balioets dezakegu, eta gero emaitzak batu.

Izan bitez

$$M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}$$

eta

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}.$$



Har ditzagun r_i eta R_i laukizuzenak. Nabaria denez,

$$r_i \subseteq \Omega_i \subseteq R_i.$$

Beraz,

$$r_i\text{-ren azalera} \leq \Omega_i\text{-ren azalera} \leq R_i\text{-ren azalera},$$

hots,

$$m_i \Delta x_i \leq \Omega_i\text{-ren azalera} \leq M_i \Delta x_i,$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ da, eta hau betetzen da $i = 1, \cdots, n$. Beraz, zera egiaztatzen da:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \Omega\text{-ren azalera} \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

non

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = m_1 \Delta x_1 + \cdots + m_n \Delta x_n$$

eta

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = M_1 \Delta x_1 + \cdots + M_n \Delta x_n.$$

Oharrak. Aurreko kontzeptuetan, ezkutaturik daude hipotesi eta definizio hauek:

- f funtzioak bornatua izan behar du $[a, b]$ tartean.
- $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ multzoari $[a, b]$ tartearen *partiketa* deritzogu.
- $\mathcal{P}$ notazioaren bidez P *partiketen multzoa* adierazten dugu.

2.6.1. Behe- eta goi-baturak.

Definizioa.

- $B(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ adierazpenari *f-ren P partiketarako behe-batura* deitzen diogu.
- $G(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ adierazpenari *f-ren P partiketarako goi-batura* esaten zaio.

Propietateak.

1. $\forall P \in \mathcal{P}, \quad B(f, P) \leq G(f, P)$.

2. $Q \supset P$ (hots, Q P baino *finagoa*) bada, hau betetzen da:

$$B(f,Q) \geq B(f,P)$$
eta
$$G(f,Q) \leq G(f,P).$$

3. Aurreko bi propietateengatik zera dugu:

$$\forall P, Q \in \mathcal{P}, \quad B(f,P) \leq G(f,Q).$$

2.6.2. Integral mugatua.

Definizioa.

Izan bitez aurreko definizioak. Orduan

$$B(f,P) \leq I \leq G(f,P), \quad \forall P \in \mathcal{P}$$

betetzen duen I zenbaki bakarrari, a-tik b-rako f-ren *integral mugatu* (edo *Riemann-en integral*) deritzogu, eta

$$\int_a^b f(x)dx$$

adierazpenaren bitartez idazten da.

Baldin I balio hori existitzen bada, $[a,b]$ tartean f *integragarria* dela esaten da,

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

eta horrela adierazten da.
a eta b zenbakiei, hurrenez hurren, integralaren *behe-muga* eta *goi-muga* deitzen zaie. $[a,b]$ tartea *integrazio-tarte* eta x *integrazio-aldagai* dira.
x aldagaiari “mutua” ere deitzen zaio; izan ere, edozein beste letraz ordezka dezakegu. Adibidez,

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b f(t)dt \quad \text{eta} \quad \int_a^b f(z)dz$$

berdinak dira. Integratzen den funtzioa *integrakizun* deitzen da.

2.6.3. Integragarritasunaren karakterizazioa.

2.22. teorema. *$[a,b]$ tartean $f(x)$ funtzioa bornatua bada, $[a,b]$ tartean integragarria da baldin eta soilik baldin hau betetzen bada:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P} \;\mid\; G(f,P) - B(f,P) < \epsilon.$$

Horrek esan nahi du $f(x)$ integragarria dela $[a,b]$ tartean baldin eta soilik baldin goi- eta behe-baturak nahi dugun beste hurbil baditzakegu, P partiketa egoki bat aurkituz.

Funtzio integragarri motak:

(a) Funtzio monotonoak $[a,b]$ tartean, integragarriak dira tarte berean.

(b) Funtzio jarraituak $[a,b]$ tartean, integragarriak dira tarte berean.

(c) $f(x)$ funtzioa bornatua bada $[a,b]$ tartean eta etenune-kopuru finitu bat badu, integragarria da tarte berean.

Ariketa.

Froga ezazu Dirichlet-en funtzioa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ez dela integragarria.

2.6.4. Integral mugatuaren propietateak.

1. Baldin $a < c < b$ bada, $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ betetzen da.
2. $b < a$ bada, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$
3. $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0.$

   Aurreko hiru propietateen ondorioz 1. propietateko $a < c < b$ baldintza ez da jadanik beharrezkoa.

Propietate linealak:

4. $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

5. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$

Bornatze-propietateak:

6. $a < b$ eta $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ badira, hau egiaztatzen da:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. $a < b$ eta $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ badira, hau egiaztatzen da:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

8. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

2.6.5. Riemann-en batura.

Segi dezagun *azaleraren problema* aztertzen. Aukera dezagun tarte hauetan ξ_i puntu bana:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

eta hor $x_0 = a \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$ dira. Puntu horietan funtzioaren balioak kalkulatuko ditugu, alegia, $f(\xi_i)$, $i = 1, \cdots, n$.

- Bestalde, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ denez (m_i eta M_i-ren definizioak gogoratuz), hau dugu:

  $$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$

  eta $\Delta x_i > 0$ denez,

  $$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M_i \Delta x_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

  betetzen da.

Ondorioz

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

- Orain $B(f,P)$ eta $G(f,P)$-ren definizioak gogoan hartuz, eta

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

ipiniz, zera dugu $\forall P \in \mathcal{P}$:

$$B(f,P) \leq R(f,P) \leq G(f,P).$$

- $R(f,P)$ baturari *Riemann-en batura* deitzen zaio, eta, P partiketaren eta ξ-ren hautaketaren menpe dago.

2.6.5.1. Integral mugatuaren beste definizio bat.

Izan bedi $\omega(P) = \max\limits_{i}\{\Delta x_i\}$, non $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ den i guztietarako. ($\omega(P)$ balioa P partiketaren diametroa deitzen da.)

- Integral mugatua Riemann-en baturen limite moduan uler daiteke ikuspegi honetan:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \omega(P) < \delta \Rightarrow |R(f,P) - \int_a^b f(x)dx| < \epsilon,$$

zeinahi ξ_i puntu hautatuta $[x_{i-1}, x_i]$ tarte bakoitzaren barnean (guzti hori frogatu egin daiteke).

- Sinbolikoki honela idatz dezakegu:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\omega(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

- $\forall\ i \quad \Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ bada, $\omega(P) = \dfrac{b-a}{n}$ da; beraz

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

2.6.6. Batez bestekoaren teorema.

2.23. teorema. *Izan bedi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funtzioa integragarria* $[a, b]$ *tartean.*

(i) *m eta M, hurrenez hurren, $f(x)$ funtzioaren balio minimoa eta maximoa badira $[a, b]$ tartean, $\mu \in [m, M]$ existitzen da, non*

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

den.

(ii) *$f(x)$ jarraitua bada $[a, b]$ tartean, $\xi \in [a, b]$ existitzen da, non*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

den.

Frogantza.

(i) Hipotesiz hau dugu:

$$m \le f(x) \le M,$$

beraz, 7. propietateagatik,

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

dugu. Baina

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \qquad \int_a^b M dx = M(b-a),$$

beraz, hau betetzen da:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Orain $(b-a)$ gaiaz zatituz, hau lortzen da:

$$m \le \mu \le M, \quad \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

egiaztatu nahi genuen bezala.

(ii) Kasu honetan, $f(x)$ jarraitua izateagatik $[a, b]$ tartean, aurreko m eta M balioak existitzen dira (Weiertrass-en teoremagatik). Beraz, $\mu \in [m, M]$ existitzen da (i) atala betetzen duena.

- Orain, Darboux-en teorema aplikatuz, $f(x)$ funtzioak $[m, M]$ tarteko balio guztiak hartzen ditu $[a, b]$ tartean; beraz, $\xi \in [a, b]$ existitzen da non $f(\xi) = \mu$ baita. $\square$

2.6.7. Kalkulu integralaren oinarrizko teorema.

2.24. teorema.

(i) *$f(x)$ funtzioa integragarria bada $[a, b]$ tartean, delako tartean funtzio hau definitzen da:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt;$$

$[a, b]$ tartean jarraitua da.

(ii) *$[a, b]$ tartean $f(x)$ funtzioa jarraitua bada, $F(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua da, (a, b) tartean deribagarria eta, gainera, $\forall x \in (a, b)$ $\quad F'(x) = f(x)$ betetzen du.*

Oharra. $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(x)\, dx\right) = g'(x) f[g(x)].$$

Definizioa.

$[a, b]$ tartean $G(x)$ funtzioari $f(x)$ funtzioaren *jatorrizko funtzio* deritzogu hau betetzen bada:

(i) $G(x)$ jarraitua izatea $[a, b]$ tartean, eta

(ii) $G'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b)$.

2.25. teorema. Barrow-en erregela.

Izan bedi $f(x)$ jarraitua $[a, b]$ tartean. $G(x)$ funtzioa $f(x)$-ren jatorrizko funtzioa bada, hau egiaztatzen da:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a). \tag{2.8}$$

Oharrak.

- $G(b) - G(a)$ adierazpena $G(x)|_a^b$ edo $[G(x)]_a^b$ sinboloez eman ohi da laburki.

- Normalean, zailtasun handiena $G(x)$ kalkulatzean datza. Gai horretaz geroago arituko gara.

- Berehalako deribatuen taulatik berehalako jatorrizkoen taula bat atera dezakegu; horretarako, taula hori alderantziz irakurtzea nahiko da. Adibidez,

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \cos x\text{-ren jatorrizkoa } \sin x \text{ da.}$$
$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad \Rightarrow \quad nx^{n-1}\text{-ren jatorrizkoa } x^n \text{ da.}$$

Beraz, x^n-ren jatorrizkoa $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ da.

2.6.8. Aldagai-aldaketazko integrazioa.

2.26. teorema. *Izan bitez $f(u)$ funtzio jarraitua $[a, b]$ tartean eta $\varphi(x)$ funtzio jarraitua eta deribagarria (α, β) tartean, $a < \varphi(x) < b \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ betetzen duelarik. Kasu honetan, baldin $\alpha_0, \beta_0 \in (\alpha, \beta)$ eta*

$$a_0 = \varphi(\alpha_0)$$
$$b_0 = \varphi(\beta_0)$$

badira, hau betetzen da:

$$\int_{a_0}^{b_0} f(u)du = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx. \tag{2.9}$$

2.19. adibidea. Kalkulatu $\displaystyle\int_1^2 \frac{10x^2}{(x^3+1)^2}dx$.

Ebazpena:

Izan bedi $u = x^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2dx$, orduan

$$\frac{10x^2}{(x^3+1)^2}dx = 10\frac{x^2dx}{(x^3+1)^2} = \frac{10}{3}\frac{du}{u^2}.$$

Bestalde,

$$x = 1 \to u = 2$$
$$x = 2 \to u = 9.$$

Beraz,

$$\int_1^2 \frac{10x^2}{(x^3+1)^2}dx = \frac{10}{3}\int_2^9 \frac{du}{u^2} = \frac{10}{3}\left[-\frac{1}{u}\right]_2^9 = \frac{35}{27}. \quad \square$$

2.7. Integrazio-teknikak.

2.7.1. Integral mugagabea.

Izan bedi F funtzioa $[a,b]$ tartean f-ren jatorrizko funtzioa (hau da, $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in [a,b]$). Beraz, Barrow-en erregelaren arabera:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

Bistan dago $F(x)$-ren ordez $F(x) + K$ idazten badugu, K edozein konstante izanik, aurreko emaitza ez dela aldatzen. Ez badugu interes berezirik $[a,b]$ tarteko integral mugatuaren kalkuluan, eta aldiz, F tarteren batean f-ren jatorrizko dela nabarmendu nahi badugu, orduan a eta b mugak ken ditzakegu, eta hau idatzi:

$$\int f(x)dx = F(x) + K.$$

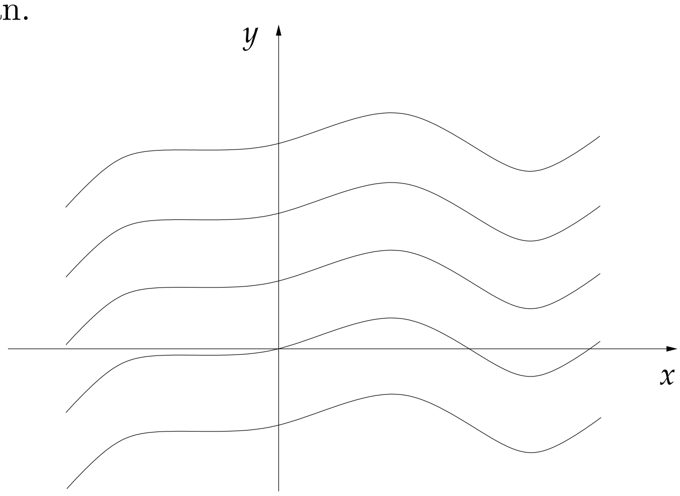
Jatorrizko funtzioen familiari (multzoari), horrela adierazita, *integral mugagabea* deitzen diogu.

2.20. adibidea.

$$\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + K; \qquad \int \sqrt{s}ds = \frac{2}{3}s^{3/2} + K;$$
$$\int \frac{4}{\sqrt{t+2}}dt = 8\sqrt{t+2} + K. \quad \square$$

2.7.2. Integral mugagabearen esanahi geometrikoa.

Integral mugagabea kurben familia bat da; horietako bakoitza lortzen da kurba bat berekiko paralelo mugituz gorantz edo beherantz, hau da, OY ardatzean.



2.7. irudia. Kurben familia bat.

- *Edozein $f(x)$-k du jatorrizko funtziorik, eta, beraz, integral mugagaberik?*

Erantzuna ezezkoa da, *edozein $f(x)$ funtziok ez du jatorrizko funtziorik.* Hala ere, funtzio mota batzuek bai, jarraian azaltzen den bezala.

2.27. teorema. *$f(x)$ funtzio jarraitu batek $[a, b]$ tartean, badu jatorrizko funtzio bat, eta beraz, integral mugagabe bat.*

Oharrak. $F'(x) = f(x)$ bada,

(1) $\underline{\left(\int f(x)dx\right)'} = (F(x) + K)' = F'(x) = \underline{f(x)}.$

(2) $\underline{d\left[\int f(x)dx\right]} = d[F(x) + k] = F'(x)dx = \underline{f(x)dx}.$

(3) $\underline{\int dF(x)} = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = \underline{F(x) + K}.$

2.7.3. Integral mugagabearen propietateak.

1. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$

   Bi atalak deribatuz,

   $$\left[\int f_1(x) + f_2(x)dx\right]' \overset{(1)}{=} f_1(x) + f_2(x),$$

   $$\left[\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right]' = \left[\int f_1(x)dx\right]' + \left[\int f_2(x)dx\right]'$$

   $$\overset{(1)}{=} f_1(x) + f_2(x).$$

   Haien deribatuak berdinak direnez, bi atalen kendura konstante bat da, haien barnean sartzen dena.

2. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$

   Bi atalak deribatuz,

   $$\left[\int \alpha f(x)dx\right]' \overset{(1)}{=} \alpha f(x),$$

   $$\left[\alpha \int f(x)dx\right]' = \alpha \left[\int f(x)dx\right]' \overset{(1)}{=} \alpha f(x).$$

   Haien deribatuak berdinak direnez, bi atalen kendura konstante bat da, eta haien barnean sartzen da.

2.21. adibidea. (Deskonposizioaren bidezko integrazioa.)

1. $$\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})dx = \int 2x^3dx - \int 3\sin x dx$$

   $$+ \int 5\sqrt{x}dx = 2\int x^3dx - 3\int \sin x dx + 5\int x^{1/2}dx$$

   $$= 2\frac{1}{4}x^4 - 3(-\cos x) + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + K$$

   $$= \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + K.$$

2. $$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx$$

$$= \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{4} \int 2\cos 2x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + K.$$

2.7.4. Oinarrizko berehalako integralak.

1) $\displaystyle\int \alpha dx = \alpha x + K.$

2) $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + K, \quad n \neq -1.$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + K.$

4) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + K.$

5) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + K, \quad a > 0.$

6) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + K.$

7) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + K.$

8) $\displaystyle\int \sec^2 x dx = \tan x + K.$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + K.$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + K.$

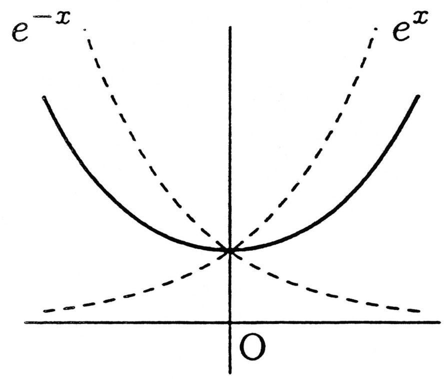
11) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + K.$

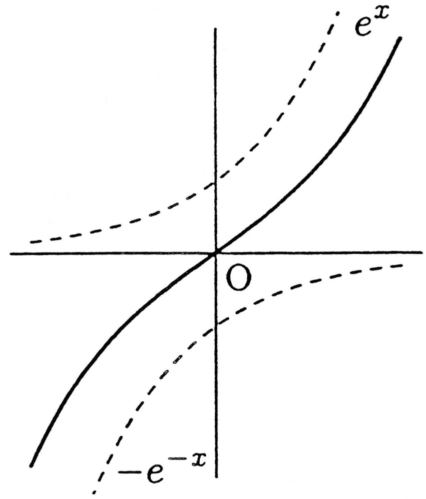
12) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + K.$

2.7.5. Funtzio hiperbolikoak.

Funtzio hiperbolikoak hiperbolaren propietateen deskribapenetik datoz. Kosinu hiperbolikoa eta sinu hiperbolikoa definitzen dira funtzio esponentzialaren bidez:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$





2.8. irudia. $y = \operatorname{ch} x$ eta $y = \operatorname{sh} x$ funtzio hiperbolikoen grafikoak.

Haien definizioetatik propietate hau ondorioztatzen da:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Funtzio horiek *hiperbolikoak* deitzen dira; izan ere, $x = a \operatorname{ch} t$ eta $y = a \operatorname{sh} t$ puntu baten koordenatuak badira, non t parametro bat baita, orduan (4) ekuazioarengatik $x^2 - y^2 = a^2$ dugu, hots, hiperbola baten ekuazioa.

Zera betetzen dute: $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ eta $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

2.7.6. Integrazio-erregela.

$$\int f(x)dx = F(x) + K \quad \text{bada,} \quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + K.$$

2.7.7. Aldagai-aldaketazko integrazioa.

Integral mugatuen ikasgaian ikusi genuenez,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

hor $x = \varphi(t)$ $(dx = \varphi'(t)dt)$ eta $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Hortaz, $u = \varphi(x)$ bada, integrazio-mugak kenduz, hau dugu:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + K = F[\varphi(x)] + K$$

2.22. adibidea. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

$$\overset{(u=x^2)}{=} \int \frac{du/2}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin u + K$$

$$\overset{(u=x^2)}{=} \frac{1}{2}\arcsin x^2 + K. \quad \square$$

2.23. adibidea. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 1}$

$$\overset{(u=\cos x)}{=} + \int \frac{du}{-u^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + K$$

$$\overset{(u=\cos x)}{=} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + K. \quad \square$$

2.7.8. Erroak kentzeko ordezkapen trigonometrikoak.

1) $\sqrt{a^2-x^2}$ kasuan:
   $x = a\sin t$ erabiltzen dugu, $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$ lortzeko. ($x = a\,\mathrm{th}\,t$ ere erabiltzen da.)
2) $\sqrt{x^2-a^2}$ kasuan:
   $x = a\sec t$ erabiltzen dugu, $\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$ lortzeko. ($x = a\,\mathrm{ch}\,t$ ere erabiltzen da.)
3) $\sqrt{x^2+a^2}$ kasuan:
   $x = a\tan t$ erabiltzen dugu, $\sqrt{x^2+a^2} = a\sec t$ lortzeko. ($x = a\,\mathrm{sh}\,t$ ere erabiltzen da.)

Oharra. Ordezkapen trigonometrikoek ez dute beti egokienak izan beharrik.

2.7.9. Zatikako integrazioa.

Izan bitez $u = u(x)$ eta $v = v(x)$ funtzio diferentziagarriak. Orduan

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow \int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$\Rightarrow uv = \int udv + \int vdu \Rightarrow \underline{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Metodo honen arrakasta u eta dv-ren definizioen menpe dago. Honek izan behar du helburua:

$\int vdu$-ren kalkulua $\int udv$-rena baino errazagoa izatea.

2.7.9.1. Aplikazioak: kasu tipikoak.

1. Logaritmoak.
2. Alderantzizko funtzio trigonometrikoak.
3. Berretura funtzio baten eta funtzio esponentzial baten biderkadurak.
4. Berretura funtzio baten eta funtzio trigonometriko baten biderkadurak.
5. Funtzio esponentzial baten eta funtzio trigonometriko baten biderkadurak.
6. Biderkadurak, oro har.

2.24. adibidea.

(1.) $$\int \ln x dx \overset{\begin{pmatrix} u = \ln x \\ dv = dx \end{pmatrix}}{=} x \ln x - \int x \frac{dx}{x}$$
$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + K. \quad \square$$

(2.) $$\int \arctan x dx \overset{\begin{pmatrix} u = \arctan x \\ dv = dx \end{pmatrix}}{=} x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{1+x^2}$$
$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K$$
$$= x \arctan x + \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + K. \quad \square$$

(3.) $\displaystyle\int xe^x dx \overset{\begin{pmatrix} u = x \\ dv = e^x dx \end{pmatrix}}{=} xe^x - \int e^x dx$
$= xe^x - e^x + K.$ $\square$

(4.) $\displaystyle\int x \sin x dx \overset{\begin{pmatrix} u = x \\ dv = \sin x dx \end{pmatrix}}{=} -x \cos x - \int -\cos x dx$
$= -x \cos x + \sin x + K.$ $\square$

(5.) (*Metodo errepikaria*)

$$I = \int e^x \sin x dx \overset{\begin{pmatrix} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{pmatrix}}{=} e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$\overset{\begin{pmatrix} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{pmatrix}}{=} e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

$= e^x \sin x - e^x \cos x - I \Rightarrow 2I = e^x \sin x - e^x \cos x$, beraz
$I = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + K.$ $\square$

($+K$ sartu behar dugu azkenean, integral mugagabeekin ari garelako.)

2.7.10. Funtzio arrazionalen integrazioa.

Demagun $\displaystyle\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$ integrala kalkulatu behar dugula, non $P_m(x)$ eta $Q_n(x)$ m eta n mailako polinomio *lehenak* diren hurrenez hurren. Lehenak izateak esan nahi du ez dutela erro komunik.

- $m < n$ bada, $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ frakzioari *frakzio propio* deitzen zaio.
- $m \geq n$ bada, *frakzio ez-propio* deitzen zaio, eta frakzioa (zatiketa) honela adieraz daiteke:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = Z(x) + \frac{H(x)}{Q_n(x)},$$

$Z(x)$ eta $H(x)$ zatidura eta hondarra dira, hurrenez hurren. Adibidez:

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x - 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

Polinomioen integrazioak ez du zailtasunik. Horregatik, funtzio arrazionalen integrazioaren zailtasun nagusia frakzio propioen integrazioan datza.

$\dfrac{A}{(x-a)^k}$ eta $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ frakzioei ($p^2-4q<0$ da eta $k=1,2,\ldots$) *frakzio sinple* deritze.

Funtzio arrazional bat integratzeko, frakzio sinpletan deskonposatzen da. Kasu hauek gerta daitezke:

1. kasua: Izendatzailearen erroak errealak eta desberdinak dira, hots,

$$Q_n(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Kasu honetan, hau idatz dezakegu:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

Beraz,

$$\begin{aligned}&\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=\int\frac{A_1}{x-a_1}dx+\int\frac{A_2}{x-a_2}dx+\ldots+\int\frac{A_n}{x-a_n}dx\\&=A_1\ln|x-a_1|+A_2\ln|x-a_2|+\ldots+A_n\ln|x-a_n|\end{aligned}$$

2.25. adibidea. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-4}dx.$

Ebazpena.

$x^2-4=(x-2)(x+2)$, beraz

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

Izendatzaile komunera laburtuz eta zenbakitzaileak berdinduz $1=A(x+2)+B(x-2)$ dugu. A eta B kalkulatzeko, x-ri zenbakizko balioak ematen dizkiogu:

- ▷ $x=2$ bada, $1=4A$ lortzen dugu $\Rightarrow A=1/4$;
- ▷ $x=-2$ bada, $1=-4B$ lortzen dugu $\Rightarrow B=-1/4$;

ondorioz,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-4}dx =& \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}\\ =&\frac{1}{4}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) + K\\ =&\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|^{1/4} + K. \quad \square\end{aligned}$$

2. kasua: Izendatzailearen erroak errealak baina anizkoitzak dira. Demagun

$$Q_n(x) = (x-a)^n.$$

Kasu honetan hau idatz dezakegu:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

Beraz,

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int \frac{A_1 dx}{x-a} + \int \frac{A_2 dx}{(x-a)^2} + \ldots + \int \frac{A_n dx}{(x-a)^n}$$

$$\begin{aligned}=&A_1 \ln|x-a|\\ &-\left[\frac{A_2}{x-a} + \frac{A_3}{2(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(n-1)(x-a)^{n-1}}\right] + K\end{aligned}$$

2.26. adibidea. $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}dx.$

Ebazpena.

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Izendatzaile komunera laburtuz eta zenbakitzaileak berdinduz $2x^2+3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$ dugu. A eta B kalkulatzeko x-ri zenbakizko balioak ematen dizkiogu:

▷ $x = 0$ bada, $\underline{3 = A}$;

▷ $x = 1$ bada, $\underline{5 = C}$;

▷ $\forall x$, adibidez $x = 2$ bada,

$2(2^2)+3 = 3(2-1)^2+B(2)(2-1)+5(2) \Rightarrow 11 = 3+2B+10 \Rightarrow \underline{B=-1}$.

Ondorioz,

$$\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}dx = 3\int \frac{dx}{x} - 1\int \frac{dx}{x-1} + 5\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + K$$

$$= \ln\left|\frac{x^3}{x-1}\right| - \frac{5}{x-1} + K. \quad \square$$

3. kasua: Izendatzaileak erro konplexu eta sinpleak ditu. Izan bedi

$$Q_2(x) = x^2 + px + q, \quad \text{non } p^2 - 4q < 0 \quad \text{baita.}$$

Kasu honetan, hau idatz dezakegu:

$$x^2 + px + q = (x-\alpha)^2 + \beta^2,$$

$\alpha \pm \beta i$ zenbaki konplexuak $x^2 + px + q = 0$ ekuazioaren erroak dira. Orduan,

$$\int \frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx \overset{(t=x-\alpha)}{=} \int \frac{C(t+\alpha)+D}{t^2+\beta^2}dt$$

$$= \int \frac{Ct}{t^2+\beta^2}dt + (C\alpha+D)\int \frac{dt}{t^2+\beta^2}$$

$$= \frac{C}{2}\ln\left|t^2+\beta^2\right| + \frac{C\alpha+D}{\beta}\arctan\frac{t}{\beta} + K$$

$$\overset{(t=x-\alpha)}{=} \frac{C}{2}\ln\left|(x-\alpha)^2+\beta^2\right| + \frac{C\alpha+D}{\beta}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + K$$

2.27. adibidea. $\displaystyle\int \frac{-2x}{(x+1)(x^2+1)}dx.$

Ebazpena.

$$\frac{-2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

$\Rightarrow -2x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$.
x-ri -1,0 eta 1 balioak emanez:
$x = -1$ bada, $2 = 2A \Rightarrow A = 1$.
$x = 0$ bada, $0 = A + C \Rightarrow C = -1$.
$x = 1$ bada, $-2 = 2A + 2B + 2C \Rightarrow B = -1$.
Beraz,

$$\int \frac{-2x}{(x+1)(x^2+1)}dx = \int \left[\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right] dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + K. \quad \square$$

2.28. adibidea. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$.

Ebazpena.

$p^2 - 4q = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$, beraz

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$\Rightarrow 1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)x$

$\Rightarrow 1 = (A+B)x^2 + (A+C)x + A$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$$

eta beraz

$$I = \int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx.$$

$\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$ integral zailena da.

$x^2+x+1=(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2$ dugu, orduan

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx \overset{(t=x+1/2)}{=} \int \frac{t-\frac{1}{2}+1}{t^2+(\sqrt{3}/2)^2}dt$$

$$= \int \frac{t}{t^2+(\sqrt{3}/2)^2}dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+\frac{3}{4}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}/2}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}/2} + K$$

$$\overset{(t=x+1/2)}{=} \frac{1}{2}\ln[(x+1/2)^2+\frac{3}{4}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2).$$

Emaitza hori eta $\int dx/x = \ln|x|$ I-n ordezkatzen dira:

$$I = \ln|x| - \ln(x^2+x+1)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)+K.\square$$

4. kasua: Izendatzaileak erro konplexu anizkoitzak ditu. Izan bedi $Q_n(x)=(x^2+px+q)^k$; orduan

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots$$
$$+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}$$

betetzen da. Hala ere, badaude beste metodo batzuk honelako funtzioen integralak kalkulatzeko.

Oro har, $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ motako integralak kalkula ditzakegu $a\tan u = x$ aldagai-aldaketa eginez. Orduan, $dx = a\sec^2 u du$.

2.29. adibidea. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx.$

Ebazpena.

$$I = \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx = \int \frac{3x+5}{[(x+1)^2+1]^2}dx$$

$$\overset{(z=x+1)}{=} \int \frac{3(z-1)+5}{(z^2+1)^2}dz = \int \frac{3z}{(z^2+1)^2}dz + \int \frac{2}{(z^2+1)^2}dz$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{z^2+1} + 2\int \frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Orain, geratzen dena kalkulatzeko, $\tan u = z$ aldagai-aldaketa erabiliko dugu ($dz = \sec^2 u du$).

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} \overset{(\tan u = z)}{=} \int \sec^2 u du / (\tan^2 u + 1)^2$$

$$= \int \cos^2 u du = \int \frac{1+\cos 2u}{2}du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + K.$$

Aldagai-aldaketa desegiteko: $z = \tan u \Rightarrow \cos u = 1/\sqrt{z^2+1} \Rightarrow \sin u = z/\sqrt{z^2+1}$ kontuan hartzen dugu. Ondorioz,
$\sin 2u = 2\sin u \cos u = 2\dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}\dfrac{1}{\sqrt{z^2+1}} = \dfrac{2z}{z^2+1}$. Beraz,

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{\arctan z}{2} + \frac{z/2}{z^2+1} + K.$$

Horrekin eta $z = x+1$ aldagai-aldaketa deseginez, hau dugu:

$$I = -\frac{3}{2[(x+1)^2+1]} + 2\left[\frac{\arctan(x+1)}{2} + \frac{(x+1)/2}{(x+1)^2+1}\right]$$

$$+K = -\frac{3}{2(x^2+2x+2)} + \arctan(x+1) + \frac{x+1}{x^2+2x+2}$$

$$+K = \arctan(x+1) + \frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + K. \quad \square$$

2.7.10.1. Hermite-ren metodoa.

Normalean, metodo hau erabiltzen da $Q_n(x)$ erro anizkoitzak dituenean.

Izan bitez

$$\begin{aligned} D(x) &= \text{zkh}(Q_n(x), Q'_n(x)) \\ Z(x) &= Q_n(x)/D(x) \end{aligned}$$

(non zkh = *zatitzaile komunetako handiena* den) orduan

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \frac{A(x)}{D(x)} + \int \frac{B(x)}{Z(x)}dx, \tag{2.10}$$

$A(x)$ eta $B(x)$ x-ren polinomioak izanik, eta $\text{gr}(A) < \text{gr}(D)$ (alegia, A-ren maila $<$ B-ren maila) eta $\text{gr}(B) < \text{gr}(Z)$ dira.

- $A(x)$ eta $B(x)$-ren koefizienteak kalkulatzeko (2.10) deribatzen da, eta hau lortzen da:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{A(x)}{D(x)}\right] + \frac{B(x)}{Z(x)}. \tag{2.11}$$

- Integral berria, $\displaystyle\int \frac{B(x)}{Z(x)}dx$, aurrekoa baino errazagoa da.

2.30. adibidea. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

Ebazpena.
$Q_n(x) = (x+1)^2(x^2+1)^2$ eta $Q'_n(x) = (x+1)(x^2+1)(6x^2+4x+2)$ ditugunez,

$$\begin{aligned} D(x) &= \text{zkh}(Q_n(x), Q'_n(x)) = (x+1)(x^2+1) \\ Z(x) &= Q_n(x)/D(x) = (x+1)(x^2+1). \end{aligned}$$

Beraz, (2.11) adierazpena erabiliz hau idatz dezakegu:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x^2+1)}\right] + \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

hor $\dfrac{B(x)}{Z(x)}$ deskonposatuta agertzen da. Hortik, koefiziente indeterminatuen metodoa erabiliz, sistema hau lortzen da:

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = -a + A + 2B + C \\ 0 = -2b + 2A + 2B + 2C \\ 0 = a - b - 3c + 2A + 2B + 2C \\ 0 = 2a - 2c + A + B + 2C \\ 1 = b - c + A + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/4 \\ b = 1/4 \\ c = 0 \\ A = 1/2 \\ B = -1/2 \\ C = 1/4. \end{cases}$$

Beraz,

$$I = \frac{-x^2 + x}{4(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}{x^2+1} dx.$$

Baina,

$$\int \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}{x^2+1} dx = -\frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= -\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\arctan x + K.$$

Azkenik,

$$I = \frac{-x^2 + x}{4(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)$$
$$+ \frac{1}{4}\arctan x + K. \quad \square$$

2.7.11. Funtzio trigonometrikoen integrazioa.

Jarraian, $\sin x$ eta $\cos x$ funtzio arrazionalen integrazio-teknikak ikusiko ditugu.

Hau da, $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$ erakoak; $R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ da, eta P eta Q (u,v)-ren polinomioak dira.

- Oro har, $\underline{t = \tan\frac{x}{2}}$ ordezkapena erabiliko dugu, hau inplikatzen dela,

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{2} = \arctan t \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}\\
&\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan x/2}{1/(\cos^2 x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}\\
&\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2 x/2}{1/(\cos^2 x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

2.31. adibidea. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} =$

$$= \ln|t| + K = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + K. \quad \square$$

2.7.11.1. Kasu bereziak.

1. $\displaystyle\int R(\sin x)\cos x dx \overset{(t=\sin x)}{=} \int R(t)dt.$

2. $\displaystyle\int R(\cos x)\sin x dx \overset{(t=\cos x)}{=} -\int R(t)dt.$

3. $\displaystyle\int R(\tan x)dx \overset{(t=\tan x)}{=} \int \frac{R(t)}{1+t^2}dt.$

Integral bat 1., 2. edo 3. eran adieraz dezakegu, eta adierazitako aldaketen bidez ebatz dezakegu.

4. $R(\sin x, \cos x)$ funtzioa $\cos x$-rekiko bakoitia bada, hau da,

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

betetzen bada, orduan $\dfrac{R}{\cos x}$, $\cos x$-ren funtzio bikoitia izango da, eta ondorioz,

$$\frac{R}{\cos x} = R_1(\sin x, \cos^2 x) \overset{(\cos^2 x = 1-\sin^2 x)}{=} R_2(\sin x),$$

beraz, kasu honetan hau egingo dugu:

$$\int Rdx = \int \frac{R}{\cos x}\cos x dx = \int R_2(\sin x)\cos x dx,$$

eta 1. kasuan gaude.

5. $R(\sin x, \cos x)$ funtzioa $\sin x$-rekiko bakoitia bada, hau da,

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

betetzen bada, orduan $\dfrac{R}{\sin x}$, $\sin x$-ren funtzio bikoitia izango da, eta ondorioz,

$$\frac{R}{\sin x} = R_1(\sin^2 x, \cos x) \overset{(\sin^2 x = 1 - \cos^2 x)}{=} R_2(\cos x),$$

beraz, kasu honetan hau egingo dugu:

$$\int R dx = \int \frac{R}{\sin x} \sin x dx = \int R_2(\cos x) \sin x dx,$$

eta 2. kasuan gaude.

6. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ betetzen bada, hau egin dezakegu:

$$R(\sin x, \cos x) = R\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cos x, \cos x\right)$$
$$= R_1(\tan x, \cos^2 x) \overset{(\cos^2 x = 1/(1+\tan^2 x))}{=} R_2(\tan x),$$

eta 3. kasuan gaude.

2.32. adibidea.

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} dx \overset{(6.)}{=} \int \frac{dx}{\frac{\sin x}{\cos x}\cos^4 x} = \int \frac{dx}{\tan x \frac{1}{(1+\tan^2 x)^2}}$$

$$= \int \frac{(1+\tan^2 x)^2}{\tan x} dx \overset{(3.)(t = \tan x)}{=} \int \frac{(1+t^2)^2}{t} \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= \int \frac{1+t^2}{t} dt = \int \frac{dt}{t} + \int t dt = \ln|t| + \frac{t^2}{2} + K$$
$$= \ln|\tan x| + \frac{\tan^2 x}{2} + K. \quad \square$$

7. $R(\sin x, \cos x)$ polinomio bat bada, orduan $\int \sin^m x \cos^n x dx$ motako integralen batura izango da. Bi kasu gerta daitezke.

- m **edo** n **bakoitia**. Demagun m bakoitia dela, hau da, $m = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$, beraz,

$$\begin{aligned}\sin^m x \cos^n x =& \sin x (\sin^2 x)^k \cos^n x \\ =& [(1-\cos^2 x)^k \cos^n x] \sin x\end{aligned}$$

eta 2. kasuan gaude.

(n bakoitia izatekotan, 1. kasura heltzen da.)

- m **eta** n **bikoitiak**. Hau da, $\begin{cases} m = 2p \\ n = 2q, \end{cases} \quad p, q \in \mathbb{Z}$ dira. Beraz,

$$\begin{aligned}\sin^m x \cos^n x =& (\sin^2 x)^p (\cos^2 x)^q \\ =& \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q\end{aligned}$$

eta horren bidez polinomioaren maila txikiagoa egiten da.

Halaber $\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$ erabil dezakegu maila txikiagoa egiteko.

2.33. adibidea.

$$\begin{aligned}I =& \int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx \\ =& \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ =& \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx \\ =& \frac{1}{8} \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx,\end{aligned}$$

gainera

$$\begin{aligned}\int \sin^2 2x \cos 2x dx \overset{(t=\sin 2x)}{=} & \int t^2 \frac{dt}{2} = \frac{t^3}{6} + K \\ \overset{(t=\sin 2x)}{=} & \frac{\sin^3 2x}{6} + K.\end{aligned}$$

Ondorioz, $I = \dfrac{x}{16} - \dfrac{\sin 4x}{64} - \dfrac{\sin^3 2x}{48} + K.$ $\square$

8. Integralak honelakoak direnean:

$$\int \sin mx \cos nx dx$$
$$\int \sin mx \sin nx dx$$
$$\int \cos mx \cos nx dx.$$

Bi kasu hauek bereizten dira:

- $m = n$ **denean**, orduan 7. kasuan gaude eta hau egiten dugu:

$$\sin mx \cos mx = \frac{\sin 2mx}{2}$$
$$\sin mx \sin mx = \frac{1 - \cos 2mx}{2}$$
$$\cos mx \cos mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2}.$$

- $m \neq n$ **denean**, maila txikiagotzeko berdintza trigonometriko batzuk erabiltzen ditugu. Adibidez:
$\sin A + \sin B = 2 \sin \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2}.$
Orduan $mx = \dfrac{A+B}{2}$ eta $nx = \dfrac{A-B}{2}$ idazten badugu, $A = mx + nx$ eta $B = mx - nx$ dira, eta, beraz, berdintza honela berridazten da:
$\sin(m+n)x + \sin(m-n)x = 2 \sin mx \cos nx$
$\Rightarrow \underline{\sin mx \cos nx} = \dfrac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x].$
Antzeko modu batean, beste kasuetan hau lortzen da:

$$\underline{\sin mx \sin nx} = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$
$$\underline{\cos mx \cos nx} = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

2.34. adibidea.

a) $\displaystyle\int \sin 15x \sin 10x dx$

$$\stackrel{(8.)}{=} \int \frac{1}{2}[-\cos(15+10)x + \cos(15-10)x]dx$$
$$= \frac{-1}{2}\int \cos 25x dx + \frac{1}{2}\int \cos 5x dx$$
$$= \frac{-\sin 25x}{50} + \frac{\sin 5x}{10} + K. \quad \square$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x + \sin x}dx$

$$\stackrel{(t=\tan x/2)}{=} \int \frac{2dt/(1+t^2)}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}}$$
$$= \int \frac{2dt}{1+t^2+1-t^2+2t} = \int \frac{dt}{1+t}$$
$$= \ln|1+t| + K \stackrel{(t=\tan x/2)}{=} \ln|1+\tan x/2| + K. \quad \square$$

c) $\displaystyle\int \cos^3 x dx \stackrel{(4.)}{=} \int \cos^2 x \cos x dx$

$$= \int (1-\sin^2 x)\cos x dx \stackrel{(t=\sin x)}{=} \int (1-t^2)dt$$
$$= t - \frac{t^3}{3} + K \stackrel{(t=\sin x)}{=} \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + K. \quad \square$$

d) $\displaystyle \mathrm{I}=\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx \stackrel{(6.)}{=}= \int \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}dx$

$$\stackrel{(t=\tan x)}{=} \int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\frac{t-1}{(t+1)(1+t^2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{1+t^2}$$
$$= \frac{(A+B)t^2+(B+C)t+(A+C)}{(t+1)(1+t^2)},$$

koefiziente indeterminatuen metodoa erabiliz:

$$\begin{cases} A + C = -1 \\ A + B = 0 \\ B + C = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -1, \quad B = 1, \quad C = 0.$$

Beraz

$$I = \int \frac{-1}{t+1} dt + \int \frac{t}{1+t^2} dt = -\ln|t+1| + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + K$$

$$= \ln \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t+1|} + K \overset{(t=\tan x)}{=} \ln \frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{|\tan x + 1|} + K$$

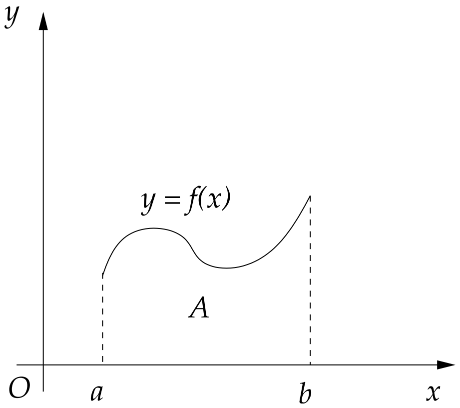
$$= \ln \frac{|1/\cos x|}{|\tan x + 1|} + K = \ln \left| \frac{1}{\sin x + \cos x} \right| + K. \quad \square$$

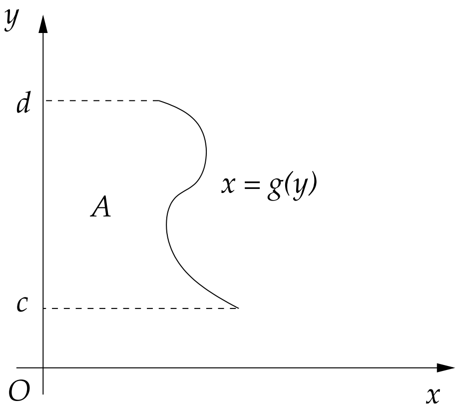
2.8. Integralen aplikazioak.

2.8.1. Azaleraren kalkulua.

Izan bedi $f(x)$ $[a, b]$ tartean definituriko funtzio erreal bat, non $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$ baita.
Dakigunez, ikusi 2.6. kapitulua, $y = f(x)$ funtzioak, $x = a$, $x = b$ eta OX ardatzak mugaturiko trapezio kurbatuaren azalera formula honen bidez adierazten da:

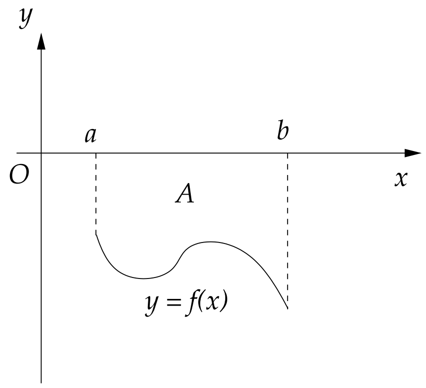
$A = \int_a^b f(x)dx$ $\qquad$ $(A = \int_c^d g(y)dy, \qquad x = g(y) > 0$ bada)



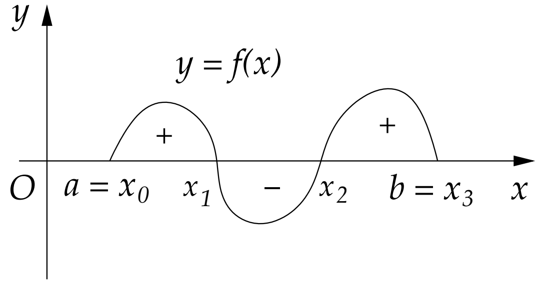


- $[a, b]$ tartean $f(x) \leq 0$ bada, orduan $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ da eta integral honen balio absolutuak, $f(x)$ funtzioari dagokion trapezio kurbatuaren azalera adierazten du. Hau da,

$$A = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = -\int_a^b f(x)dx.$$



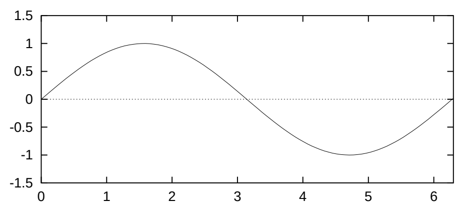
- $[a, b]$ tartean $f(x)$-ren zeinua aldi-kopuru finitu batean aldatzen bada, orduan $[a, b]$ tartea azpitarteetan zatitzen dugu, azpitarte horietan funtzioaren zeinua ez aldatzeko. Kasu honetan



$$A = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \right|,$$

$f(x)$-ren zeinua alda ez dadin $[x_{i-1}, x_i]$ tartean, $i = 1, \ldots, n$-rako, $x_0 = a$ eta $x_n = b$ delarik.

2.35. adibidea. Kalkula ezazu $y = \sin x$ *sinusoideak* eta OX ardatzak mugaturiko eremuaren azalera $0 \leq x \leq 2\pi$ denean.



Ebazpena.

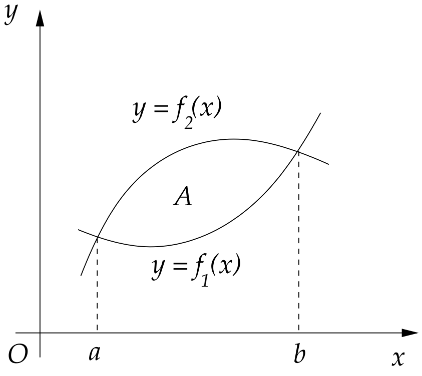
$0 \leq x \leq \pi$ denean, $\sin x \geq 0$ dugu, eta
$\pi \leq x \leq 2\pi$ denean, $\sin x \leq 0$ dugu. Beraz,

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^{\pi} \sin x dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| \\ &= \left| [-\cos x]_0^{\pi} \right| + \left| [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} \right| \\ &= \left| -(\cos \pi - \cos 0) \right| + \left| -(\cos 2\pi - \cos \pi) \right| \\ &= |2| + |-2| = 2 + 2 = 4. \quad \square \end{aligned}$$

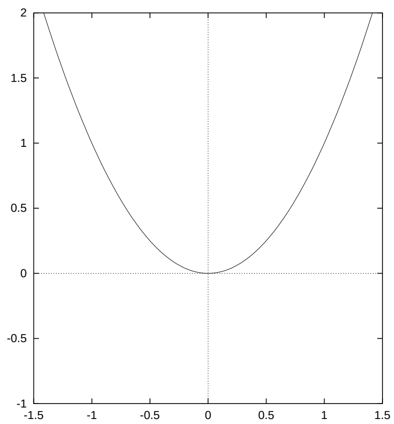
- Izan bitez $y = f_1(x)$ eta $y = f_2(x)$ kurbak, $f_1(x) \le f_2(x) \quad \forall x \in [a,b]$ betetzen dutenak. Kurba horiek eta $x = a$, $x = b$ zuzenek mugaturiko eremuaren azalera kalkulatzeko, hau egin behar dugu:

$$A = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx$$

$$= \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$



2.36. adibidea. Kalkula ezazu $y = \sqrt{x}$ eta $y = x^2$ kurbek mugaturiko eremuaren azalera.



Ebazpena.

Bila ditzagun kurba hauen ebakitze-puntuak:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Ondorioz,

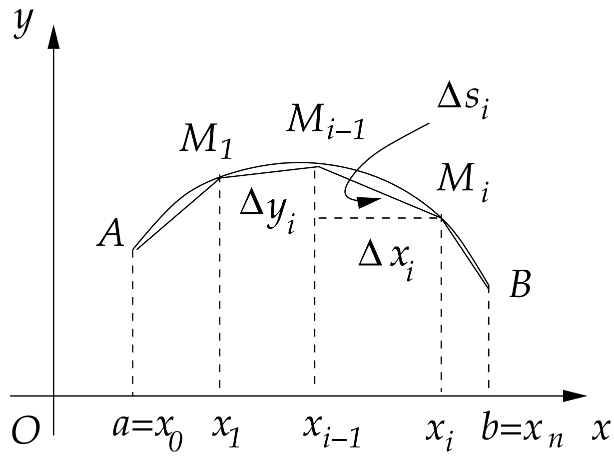
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \quad \square$$

2.8.2. Kurba-arku baten luzeraren kalkulua.

Bila dezagun $x = a$ eta $x = b$ zuzenen artean dagoen kurba baten AB arkuaren luzera. Har ditzagun AB arkuaren gainean $A, M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots, B$ puntuak; haien abzisak $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, b = x_n$ dira. Marra ditzagun $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}B$ kordak; haien luzerak

$\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ dira. Hala, AB arkuan inskribatutako $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$ lerro poligonala lortzen da. Lerro poligonal horren luzera hau da:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i.$$



Lerro poligonal horren alderik handienaren luzerak zerorantz jotzen badu, lerro poligonal inskribatuaren luzerak limite baterantz joko du. Limite hori *AB arkuaren L luzera* deitzen da. Hau da,

$$L = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i.$$

Bestalde, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$

$$\Rightarrow \Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \Delta x_i.$$

Lagrange-ren teoremaren arabera:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad \text{non } x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

Gainera $f'(x)$ jarraitua bada $[a,b]$-n, $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ ere jarraitua da tarte berean. Beraz,

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\ \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx.$$

2.37. adibidea. Izan bedi $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Kalkula ezazu arku paraboliko horren luzera.

Ebazpena.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + [2x]^2}\; dx = 2\int_0^1 \sqrt{(1/2)^2 + x^2}\; dx$$

$$= \left[x\sqrt{(1/2)^2 + x^2} + (1/2)^2 \ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}. \quad \square$$

2.8.3. Biraketa-gorputzen azalera.

Izan bedi f funtzio ez-negatibo bat $[a, b]$ tartean, eta $f'(x)$ jarraitua da tarte horretan. Orduan a-tik b-rako kurba-arkua OX ardatzaren inguruan biratzen badugu, sortzen den biraketa-gainazalaren azalera hau da:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\; dx.$$

2.38. adibidea. Kalkulatu $f(x) = \sin x$ sinusoideak OX-ren inguruan biratzean $0 \le x \le \pi/2$ tartean sortzen duen gainazalaren azalera.

Ebazpena:

$$A = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin x\sqrt{\cos^2 x + 1}\; dx = 2\pi[\frac{1}{2}\cos x\sqrt{\cos^2 x + 1} +$$

$$+\frac{1}{2}\ln(\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1})]_0^{\pi/2} = \pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})). \quad \square$$

2.39. adibidea. Kalkulatu gainazal esferiko baten azalera.

Ebazpena:

Izan bedi R haren erradioa. Beraz, polarretan, $f(\theta) = R$ zirkunferentzia OX-ren inguruan biratzean lortzen da gainazal esferiko hori. Orduan

$$\begin{aligned} A =& 2\pi \int_0^{\pi} R \sin\theta \sqrt{0^2 + R^2}\ d\theta = 2\pi R^2 [-\cos\theta]_0^{\pi} \\ =& 4\pi R^2. \quad \square \end{aligned}$$

2.8.4. Gorputz baten bolumena.

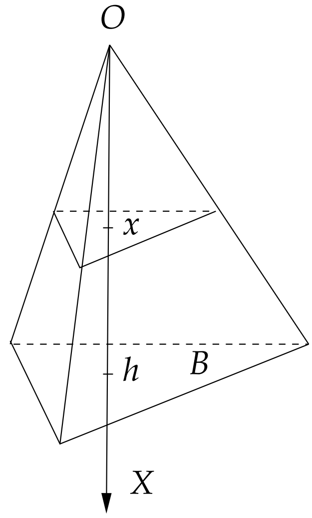
Izan bedi gorputz bat, eta demagun OX ardatzarekiko perpendikularra den plano batek ebakitako edozein sekzioren azalera ezagutzen dela. Azalera hori plano ebakitzailearen menpe dago, hau da, x-ren funtzioa da: $A = A(x)$.

Kasu honetan haren bolumena honela kalkulatzen da:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

(*Cavalieri-ren printzipioa*).

2.40. adibidea. Kalkula ezazu piramide triangeluar baten bolumena; haren oinarriaren azalera eta altuera B eta h dira, hurrenez hurren.



Ebazpena. OX ardatza O erpinetik B oinarrira doan zuzen perpendikularra da. Bi triangeluen antzekoen arrazoia x/h denez, haien azaleren arrazoia x^2/h^2 da, eta beraz, $A(x) = (x^2/h^2)B$.

Ondorioz,

$$V = \int_0^h A(x)dx = \frac{B}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3}Bh. \quad \square$$

2.8.5. Biraketa-gorputzen bolumena.

Kasu hau sortzen da $y = f(x)$ kurbak OX ardatzak eta $x = a$, $x = b$ zuzenek mugatutako eskualdea OX-ren inguruan biratzean. Beraz, haren zehar-sekzioa $f(x)$ erradioko zirkulu bat da, eta $A(x) = \pi[f(x)]^2$ haren azalera da. Orduan, gorputzaren bolumena hau da:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$