1. GAIA:

Aljebra lineala eta Geometria

Matematika Aplikatua,

Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboa Saila

Zientzia eta Teknologia Fakultatea

Euskal Herriko Unibertsitatea

Aurkibidea

1. gaia

Aljebra lineala eta Geometria.

1.1. Espazio bektoriala.

Definizioa: $\mathcal{E}$ multzoa $\mathbb{R}$ multzoarekiko *espazio bektoriala* da, baldin $\mathcal{E}$ multzoak propietate hauek betetzen baditu:

(A) Batuketarekiko honako hauek:
0. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}, \quad \vec{a} + \vec{b} \in \mathcal{E}.$
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}.$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{E}.$
3. Gai neutroa, $\vec{0}$, existitzen da, non $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a} \in \mathcal{E}.$
4. Alderantzizko gaia, $-\vec{a}$, existitzen da, non $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \forall \vec{a} \in \mathcal{E}.$

(B) Zenbaki erreal batezko biderketarekiko honako hauek:
0. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ eta $\forall \vec{a} \in \mathcal{E}, \quad \lambda \vec{a} \in \mathcal{E}.$
1. $1\vec{a} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a} \in \mathcal{E}.$
2. $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a} \in \mathcal{E}.$
3. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a} \in \mathcal{E}.$
4. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}.$

Bestalde, $\mathcal{E}$-ko gaiei *bektore* deritzegu.

1.1. adibidea. (a) $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ multzoa espazio bektoriala da $\mathbb{R}$-rekiko, non horren bektoreak $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-kote ordenatuak baitira.
(b) $\mathcal{P}_n(x) = \{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \ldots + a_0 \mid m \leq n, \ m \in \mathbb{N}\}$; hau da, n baino txikiago diren edo n-ren maila berdineko diren polinomioen multzoa ere espazio bektoriala da $\mathbb{R}$-rekiko.

Definizioa: Izan bedi $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$, $\mathcal{E}$ espazioko bektoreen azpimultzoa (edo sistema), $\mathcal{E}$-ko $\vec{v}$ bektorea $\mathcal{B}$-ko bektoreen *konbinazio lineala* dela esaten da, baldin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ zenbaki errealak existitzen badira, non $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$ baita.

1.2. adibidea. (a) $\vec{a} = (-5, 2, -6) \in \mathcal{E} = \mathrm{I\!R}^3$ bektorea, $\vec{a}_1 = (2, 1, -6)$ eta $\vec{a}_2 = (-3, 0, 2)$ bektoreen konbinazio lineala da. Izan ere, $\vec{a} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$. (b) $\vec{a} = 2x^2 + x - 5 \in \mathcal{E} = \mathcal{P}_2$ bektorea, $\vec{a}_1 = x^2 + x$ eta $\vec{a}_2 = x + 5$ bektoreen konbinazio lineala da. Izan ere, $\vec{a} = 2\vec{a}_1 + (-1)\vec{a}_2$.

Definizioa: Izan bedi $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$, $\mathcal{E}$ espazioko bektoreen sistema bat, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *linealki askeak* dira, baldin ez bada existitzen $\vec{0}$ bektorea sortzen duen konbinazio linealik, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ salbu. Hori betetzen ez bada, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *linealki menpekoak* dira.

1.3. adibidea. $\vec{a}_1 = (2, 3, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 4, 2)$, $\vec{a}_3 = (3, -5, 4)$, $\vec{a}_4 = (1, 0, -2)$ linealki menpekoak dira. Izan ere, $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \lambda_4\vec{a}_4 = \vec{0}$ garatuz gero, ekuazio-sistema hau dugu:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 4\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0, \end{cases}$$

eta horrek infinitu soluzio dauka. Aldiz, $\vec{a}_1 = (2, 3, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 4, 2)$ linealki askeak dira, zeren $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 = \vec{0}$ berdintzak sortzen duen sistemaren soluzio bakarra $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ baita.

Definizioa: Izan bedi $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$, $\mathcal{E}$ espazioko bektoreen sistema. Baldin $\forall \vec{v} \in \mathcal{E}$ $\mathcal{B}$-ren konbinazio lineal bat existitzen bada $\vec{v}$ bektorea sortzen duena, $\mathcal{B}$ *sistema sortzaile* deitzen zaio.

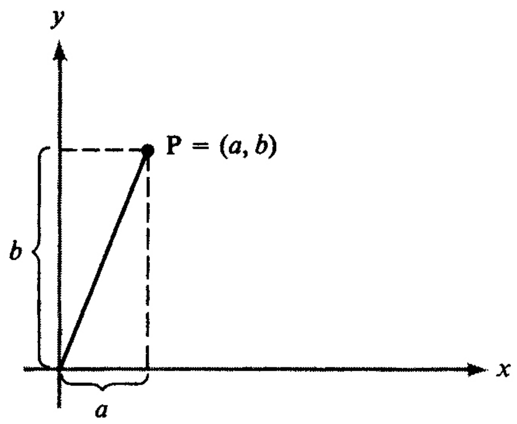
1.4. adibidea. $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ bektoreen sistemak $\mathrm{I\!R}^3$ espazio bektoriala sortzen duenez gero, $\mathcal{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ $\mathrm{I\!R}^3$-ren sistema sortzailea da.

Definizioa: $\mathcal{B}$ bektoreen sistema bat $\mathcal{E}$-ren sortzailea eta linealki askea bada, $\mathcal{B}$-ri $\mathcal{E}$-ren *oinarria* deritzogu.

1.5. adibidea. $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ $\mathrm{I\!R}^3$-ren sistema sortzailea da, baina ez da oinarri bat, zeren konbinazio lineal bat existitzen baita $\vec{0}$ ematen duena, eta, ondorioz, ez da linealki askea. Aldiz, 1.4. adibideko $\mathcal{B}$ sistema bada $\mathrm{I\!R}^3$-ren oinarri bat; *oinarri kanoniko* deitzen zaio, hain zuzen ere.

1.2. Espazio tridimentsionaleko bektoreak.

Marratu ditzagun bi zuzen perpendikular: x eta y ardatzak. Planoko P puntuak (a, b) bikote ordenatuen bidez adierazten dira. a eta b zenbakiei P-ren koordenatu kartesiar deitzen zaie.



1.1. irudia. Planoko koordenatu kartesiarrak.

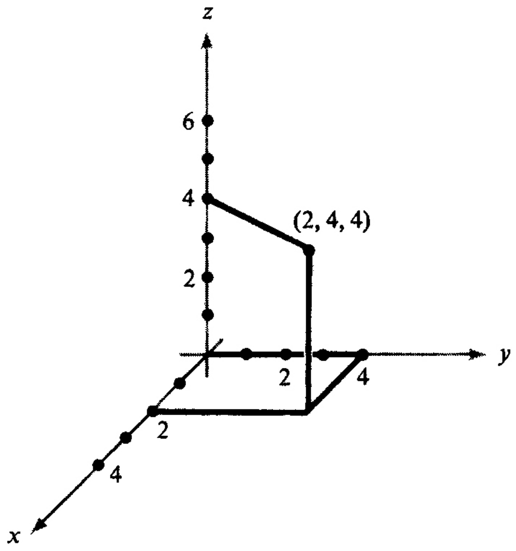
$\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ *bektorea* zuzenki zuzendua da. O koordenatu-jatorrian bere jatorria dauka, eta P puntuan bere muturra. Hots, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$.

Beraz, planoko $P(a, b)$ puntu bakoitzari $\vec{v}$ bektore bat dagokio; eta, alderantziz, $\vec{v}$ bektore bakoitzari planoko $P(a, b)$ puntu bat dagokio.

Horrela, $\vec{v}$ bektorea (a, b)-rekin identifikatzen dugu, eta $\vec{v} = (a, b)$ idazten. Horregatik, $\mathbb{R}^2$-ko gaiak zenbaki erreal bikoteak direnez, bektoreak $\mathbb{R}^2$-ko gaiak ere badira. a eta b $\vec{v}$-ren *osagaiak* dira.

$\mathbb{R}^3$ espazioko puntuak era antzeko batean adierazten dira. Marratu ditzagun hiru zuzen perpendikular. Espazioko P puntuak (a, b, c) hirukote ordenatuen bidez adierazten dira. Kasu horretan, $\vec{v} = (a, b, c)$ bektorea dugu, eta a, b eta c $\vec{v}$-ren osagaiak dira. Askotan (a, b, c)-ren ordez (x, y, z) notazioa erabiltzen da.

$\mathbb{R}$ zuzen erreala $\mathbb{R}^1$-en bidez adieraz dezakegu. (x, y) bikote ordenatu guztien multzoa $\mathbb{R}^2$-k adierazten du, eta (x, y, z) hirukote ordenatu guztien multzoa, $\mathbb{R}^3$-k. Oro har mintzatzen denean $\mathbb{R}^n$ esaten da, $n = 1, 2$ edo 3 izanik.



1.2. irudia. Espazioko koordenatu kartesiarrak.

$\mathbb{R}$-ko *batuketa* $\mathbb{R}^2$-ra eta $\mathbb{R}^3$-ra zabaltzen da. $\mathbb{R}^3$-rako honako hau dugu. Izan bitez (x_1, y_1, z_1) eta (x_2, y_2, z_2) hirukoteak, batuketa honela definitzen da:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

1.6. adibidea.

$$\begin{aligned}
&(1, 1, 1) + (2, -3, 4) = (3, -2, 5),\\
&(x, y, z) + (0, 0, 0) = (x, y, z),\\
&(1, 7, 3) + (2, 0, 6) = (3, 7, 9). \quad \square
\end{aligned}$$

- $(0, 0, 0)$ gaiari $\mathbb{R}^3$-ko *zero gaia* deritzogu.
- $(-x, -y, -z)$ gaiari (x, y, z) *gaiaren aurkako* deitzen diogu, eta

$$(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)$$

idazten da, $(x_1, y_1, z_1) + (-x_2, -y_2, -z_2)$ idatzi ordez.

Nola adierazten da $\vec{b} - \vec{a}$ bektorea geometrikoki?
$\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}$ denez, $\vec{b} - \vec{a}$ bektoreak $\vec{a}$-ren muturrean du jatorria eta b-ren muturrean, muturra.

Definizioa: Eskalar batezko biderketa: Izan bitez α zenbaki erreala eta (x, y, z) hirukotea, eragiketa honela definitzen da:

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

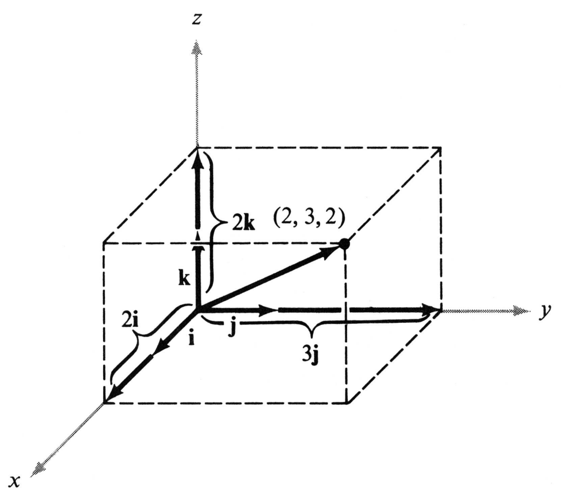
1.7. adibidea.

$$\begin{aligned}
&2(4, e, 1) = (2 \cdot 4, 2 \cdot e, 2 \cdot 1) = (8, 2e, 2)\\
&6(1, 1, 1) = (6, 6, 6)\\
&1(x, y, z) = (x, y, z)\\
&0(x, y, z) = (0, 0, 0)\\
&(\alpha + \beta)(x, y, z) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y, (\alpha + \beta)z) =\\
&\quad (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y, \alpha z + \beta z) = \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z). \quad \square
\end{aligned}$$

1.4. adibidean esan dugun bezala, $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ bektoreen sistema $\mathbb{R}^3$-ko oinarri kanonikoa da. Beraz, $\mathbb{R}^3$-ko $\vec{v} = (x, y, z)$ bada, honako hau dugu:

$$\vec{v} = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

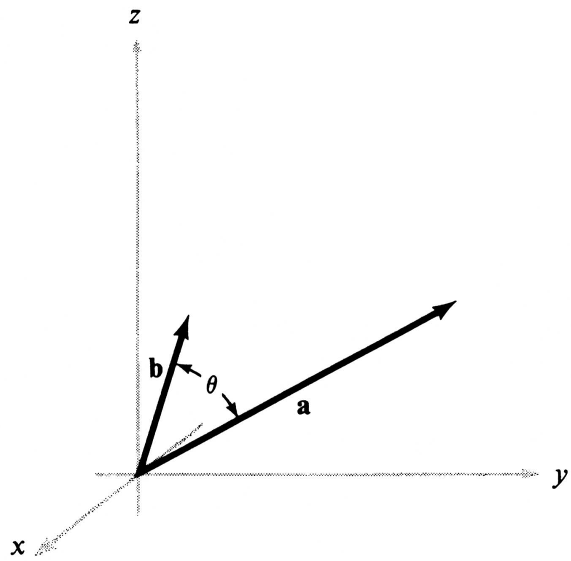
Adibidez, (2,3,2) puntuan bukatzen den bektorea $2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ da.



1.3. irudia. (2,3,2)-ren adierazpena oinarri kanonikoaren bidez.

1.3. Biderkadura eskalarra.

Biderkadura horren bidez bi bektorek sortutako planoan eratzen duten angelua (txikiena) kalkula dezakegu.
Izan bitez $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$ eta $\vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$.



1.4. irudia. $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ bektoreen arteko θ angelua.

Definizioa: $\vec{a}$-ren eta $\vec{b}$-ren biderkadura eskalarra, zeina $\vec{a} \cdot \vec{b}$ idazten baita, eta zenbaki erreal honen bidez definitzen da:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Propietateak: Definizio horretatik propietate batzuk ondorioztatzen dira. Izan bitez $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ eta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(i) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$;
$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$.

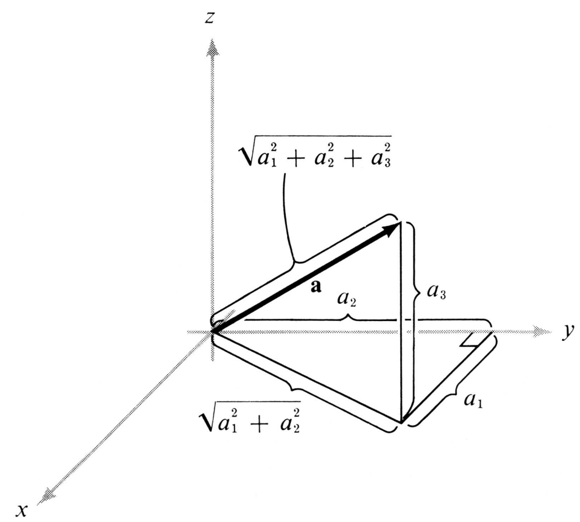
(ii) $\alpha\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ eta $\vec{a} \cdot \beta\vec{b} = \beta(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

(iii) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ eta
$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

(iv) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Lehenengo propietatea frogatzeko, kontsidera dezagun $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$. Orduan, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ direnez, $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0$ bete behar da. Gainera, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ da, baldin eta soilik baldin $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ bada, alegia, $\vec{a} = \vec{0}$.
Beste propietateen frogantzak ere erraz egiten dira. □

Bektoreen luzera: Pitagoras-en teorematik $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$ bektorearen luzera $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ dela ateratzen da.
$\vec{a}$ bektore baten luzerari *norma* deitzen zaio, eta $\|\vec{a}\|$ idazten.



1.5. irudia. Bektore baten luzera.

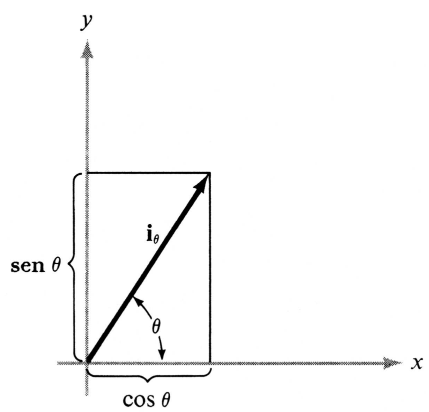
- Ondorioz, $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ denez honako hau dugu:

$$\|\vec{a}\| = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{1/2}.$$

- 1 normadun bektoreari *unitario* deitzen diogu. Adibidez, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ eta $\vec{k}$ bektore unitarioak dira. Aipa dezagun zeroren desberdina den edozein $\vec{a}$ bektorerekiko $\vec{a}/\|\vec{a}\|$ bektore unitarioa dela.

- $\vec{a}$ bektorea $\|\vec{a}\|$ eskalarraz zatitzen dugunean $\vec{a}$ bektorea *normalizatu* egin dugula esaten da.

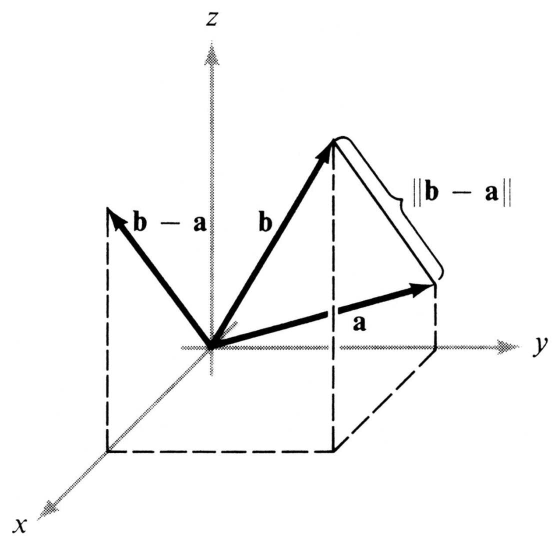
- Planoan $\vec{\imath}_\theta = (\cos\theta)\vec{\imath} + (\sin\theta)\vec{\jmath}$ bektore unitarioa definitzen da, zeina x ardatzarekin θ angelua eratzen baitu.



1.6. irudia. $\vec{\imath}_\theta$-ren koordenatuak.

Bistan denez, $\|\vec{\imath}_\theta\| = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^{1/2} = 1$.

- Izan bitez $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ bektoreak.
  $\vec{b} - \vec{a}$ bektorearen definizioa kontuan hartuz honako hau dugu: $\vec{a}$-ren muturretik $\vec{b}$-ren muturrerako distantzia $\|\vec{b} - \vec{a}\|$ dela.



1.7. irudia. $\vec{a}$-ren eta $\vec{b}$-ren muturren arteko distantzia.

1.8. adibidea. Aurkitu $\vec{\imath}$-ren muturretik $\vec{\jmath}$-ren muturrera dagoen distantzia.

Ebazpena: $\|\vec{\jmath} - \vec{\imath}\| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$. □

1.1. teorema. *Izan bitez $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ bektoreak, eta izan bedi θ, $0 \le \theta \le \pi$, haiek sortutako angelua. Orduan:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta.$$

Beraz $\vec{a}$-ren eta $\vec{b}$-ren arteko angelua honela adieraz dezakegu:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\right)$$

$\vec{a}$ eta $\vec{b}$ bektoreak ez badira zero.

Formula hori askotan erabiltzen da problema geometrikoetan.

1.1. korolarioa. Cauchy-Schwarz-en desberdintza

Edozein $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ bektoretarako honako hau betetzen da:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|,$$

non berdintza baitugu $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ kolinealak direnean, edo bietariko bat zero denean.

Frogantza: $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ ez badira kolinealak, $|\cos\theta| < 1$ dugu eta desberdintza hertsia betetzen da. Bi bektoreak kolinealak badira, $\theta = 0$ edo $\theta = \pi$ eta $|\cos\theta| = 1$. □

1.9. adibidea. Aurkitu $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ eta $\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}$ bektoreen arteko angelua.

Ebazpena: 1. teorema erabiliz, honako hau dugu:

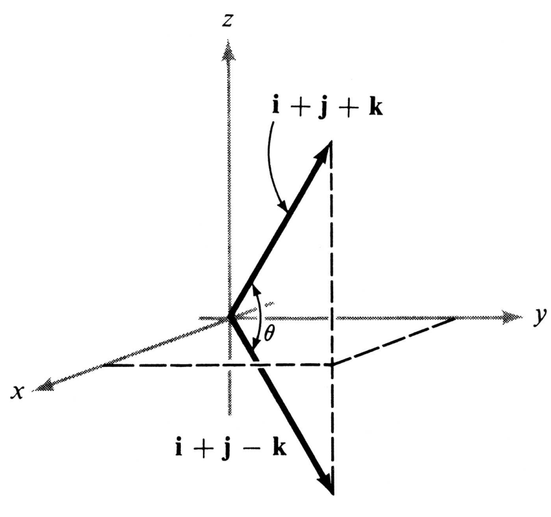
$$(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}) \cdot (\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}) = \|\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}\| \|\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}\| \cos\theta.$$

Hortaz:

$$1 + 1 - 1 = (\sqrt{3})(\sqrt{3}) \cos\theta.$$

Hortik:

$$\cos\theta = 1/3 \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}(1/3) = 1.23 \text{ radian. } \square$$



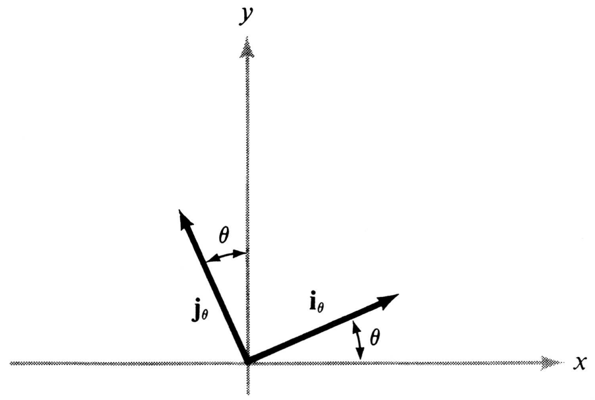
1.8. irudia. Bi bektoreren arteko angeluaren kalkulua.

- $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ ez badira zero eta haien arteko angelua θ bada, hau dugu:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\theta = 0.$$

Beraz, *bi bektore ez-nuluren arteko biderkadura eskalarra zero da, baldin eta soilik baldin bi bektoreak perpendikularrak badira.* Bektore perpendikularrak *ortogonalak* direla esaten da.

- Oinarri kanonikoaren bektoreak, hots, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ eta $\vec{k}$, elkarrekiko ortogonalak direnez eta haien luzera 1 denez, *ortonormal* deitzen zaie. Horrelako ezaugarriak betetzen dituen edozein sistemari **ortonormal** esaten zaio. Zero bektorea bektore guztiekiko ortogonala dela joko dugu.



1.9. irudia. $\vec{\imath}_\theta$ eta $\vec{\jmath}_\theta$ bektore ortogonalak.

1.10. adibidea. $\vec{\imath}_\theta = (\cos\theta)\vec{\imath} + (\sin\theta)\vec{\jmath}$ eta $\vec{\jmath}_\theta = -(\sin\theta)\vec{\imath} + (\cos\theta)\vec{\jmath}$ bektoreak ortogonalak dira. Izan ere:

$$\vec{\imath}_\theta \cdot \vec{\jmath}_\theta = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0. \quad \square$$

1.11. adibidea. Izan bitez $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ bi bektore ortogonal ez-nulu. $\vec{c}$ bektorea $\vec{a}$-k eta $\vec{b}$-k sortutako planoan badago, orduan badaude α eta β eskalarrak, non $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ betetzen baita. Kalkulatu α eta β.

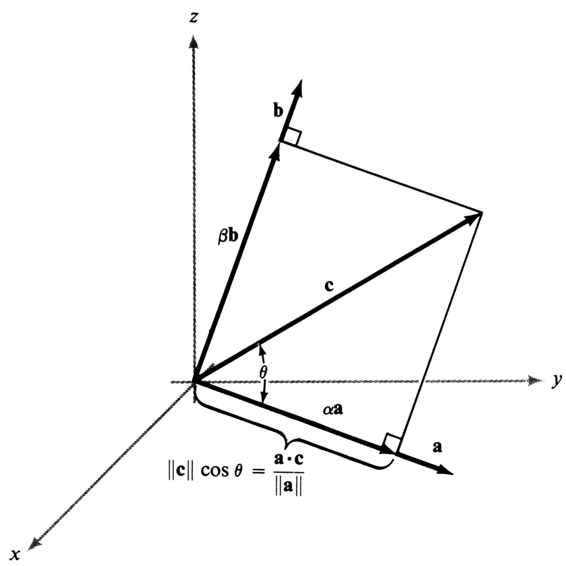
Ebazpena: $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\vec{a}\cdot\vec{a} + \beta\vec{a}\cdot\vec{b}$ dugu.

$\vec{a}$ eta $\vec{b}$ ortogonalak direnez, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{0}$. Beraz:

$$\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\|\vec{a}\|^2}.$$

Era antzeko batean:

$$\beta = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\|\vec{b}\|^2}. \quad \square$$



1.10. irudia. α-ren eta β-ren kalkulurako geometria.

- Adibide horretako $\alpha\vec{a}$ bektoreari $\vec{a}$ *bektorean zeharko* $\vec{c}$*-ren proiekzio* deitzen zaio, eta $\beta\vec{b}$ da haren *proiekzioa* $\vec{b}$*-n zehar*.

1.4. Biderkadura bektoriala.

Izan bitez $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$ eta $\vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$ $\mathbb{R}^3$-ko bektoreak. $\vec{a}$-ren eta $\vec{b}$-ren biderkadura bektoriala, zeina $\vec{a}\times\vec{b}$-ren bidez adierazten baitugu, bektore honen bidez definitzen da:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - b_2a_3)\vec{\imath} + (b_1a_3 - a_1b_3)\vec{\jmath} + (a_1b_2 - b_1a_2)\vec{k},$$

edo, sinbolikoki,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

- Gogoratu bi bektoreren biderkadura bektoriala beste bektore bat dela.

1.12. adibidea. Aurkitu $(3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}) \times (\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k})$.

Ebazpena:

$$(3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}) \times (\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 7\vec{k}. \quad \square$$

1.4.1. Propietateak.

Izan bitez $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ eta $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Orduan:

(i) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

(ii) $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$

(iii) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} = \vec{0}$ edo $\vec{b} = \vec{0}$ edo, $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ paraleloak dira

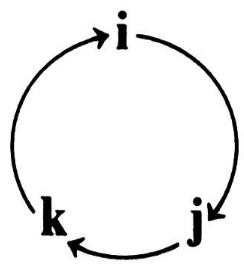
(iv) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Propietate horiek biderkadura bektorialaren definiziotik ondorioztatzen dira.

- Ohartu $\vec{a} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{a})$ betetzen dela (i) propietateagatik. Beraz, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

- Zehazki,
$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{0}, \quad \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{0} \quad \text{eta} \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

- Gainera,
$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}, \quad \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath} \quad \text{eta} \quad \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath},$$
zeina $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ eta $\vec{k}$ ziklikoki permutatuz gogora baitezakegu.



1.11. irudia. $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ eta $\vec{k}$ bektoreen zikloa.

1.4.2. Biderkadura nahasia.

Izan bitez $\vec{a}$, $\vec{b}$ eta $\vec{c}$ bektoreak.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ zenbaki errealari $\vec{a}$-ren, $\vec{b}$-ren eta $\vec{c}$-ren *biderkadura nahasia* deritzogu (ordena horretan). Erraz egiazta daiteke honela ere idatz dezakegula (egin frogantza ariketa gisa):

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

1.4.3. $\vec{b} \times \vec{c}$-ren interpretazio geometrikoa.

Norabidea.- Eman dezagun $\vec{a}$ bektorea $\vec{b}$ eta $\vec{c}$ bektoreek sortutako planoan dagoela. Horrek honako hau esan nahi du: α eta β eskalarrak existitzen direla, non $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ baita.

Beraz, biderkadura nahasiaren adierazpen matriziala kontuan hartuz, matrizeko lehenengo lerroa beste bi lerroen konbinazio lineal bat da.

Kasu horretan, $\vec{a}$ ordezkatuz, erraz ikusten da $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ betetzen dela. Hau da, $\vec{b} \times \vec{c}$ bektorea ortogonala da $\vec{b}$-k eta $\vec{c}$-k sortutako planoko edozein bektorerekiko.

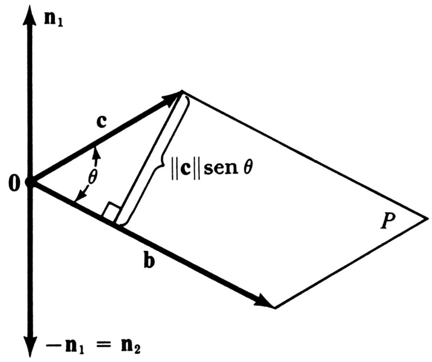
Luzera.- Erreparatu honako honi:

$$\|\vec{b} \times \vec{c}\|^2 = (b_2c_3 - b_3c_2)^2 + (b_1c_3 - c_1b_3)^2 + (b_1c_2 - c_1b_2)^2.$$

Adierazpen hori garatuz, honen berdina dela ikusten da:

$$\begin{aligned} &(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2 \\ &\quad = \|\vec{b}\|^2\|\vec{c}\|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2 \\ &\quad = \|\vec{b}\|^2\|\vec{c}\|^2 - \|\vec{b}\|^2\|\vec{c}\|^2 \cos^2\theta = \|\vec{b}\|^2\|\vec{c}\|^2 \sin^2\theta, \end{aligned}$$

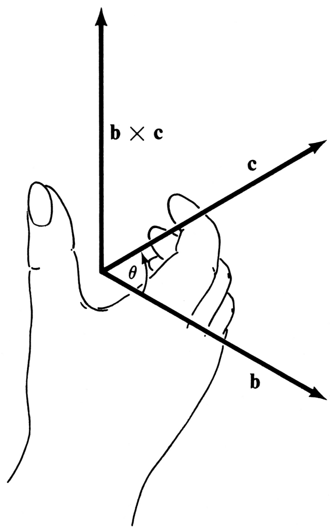
non θ $\vec{b}$-ren eta $\vec{c}$-ren arteko angelua baita, $0 \leq \theta \leq \pi$. Ondorioz, $\|\vec{b} \times \vec{c}\| = \|\vec{b}\|\|\vec{c}\||\sin\theta|$.
Bi emaitza horiek konbinatuz honako hau dugu:
$\vec{b} \times \vec{c}$ bektorea $\vec{b}$-k eta $\vec{c}$-k sortutako planoarekiko perpendikularra da, $\|\vec{b}\|\|\vec{c}\||\sin\theta|$ haren luzera izanik.



1.12. irudia. $\vec{b} \times \vec{c}$-ren noranzkoa.

Zein da haren noranzkoa $\vec{n}_1$ ala $-\vec{n}_1$?

Noranzkoa.- Aztertzeko $\vec{b} \times \vec{c}$-ren noranzkoa eskuineko eskuaren araua kontuan hartu behar dugu. Ebatzi $\vec{k} = \vec{\imath} \times \vec{\jmath}$ bezalako kasu batzuk egiaztatzeko.



1.13. irudia. Eskuineko eskuaren araua.

Oharrak:

1. $\vec{b}$ eta $\vec{c}$ kolinealak badira, $\sin\theta = 0$. Beraz: $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$ [gogoratu biderkadura bektorialaren (iii) propietatea].

2. Ez badira kolinealak, plano bat sortzen dute eta $\vec{b} \times \vec{c}$ bektorea plano horrekiko perpendikularra da.

1.13. adibidea. Aurkitu $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ eta $\vec{\jmath} + \vec{k}$ bektoreekiko ortogonala den bektore unitario bat.

Ebazpena: $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ eta $\vec{\jmath}+\vec{k}$ bektoreekiko perpendikularra da bektore hau:

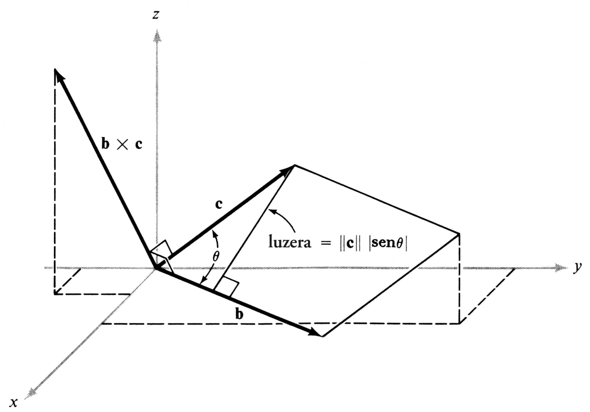
$$(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) \times (\vec{\jmath}+\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}.$$

$\|\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}\| = \sqrt{3}$ denez, $(1/\sqrt{3})(\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k})$ bektorea unitarioa da, eta ortogonala $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ eta $\vec{\jmath}+\vec{k}$ bektoreekiko. □

1.5. Aplikazio geometriko batzuk.

1.5.1. Triangelu baten azalera.

Beheko iruditik erraz ondorioztatzen denez, $\vec{b} \times \vec{c}$-ren luzera —hots, $\|\vec{b}\|\|\vec{c}\||\sin\theta|$— $\vec{b}$ eta $\vec{c}$ bektoreak albo-alde gisa dituen *paralelogramoaren azalera* da.



1.14. irudia. $\vec{b} \times \vec{c}$-ren luzera = paralelogramoaren azalera.

Ondorioz, espazioko hiru puntuk sortzen duten triangelu baten azalera erraz kalkula daiteke. Izan bitez $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ bektoreek adierazten dituzten espazioko puntuak (gogoratu puntu horien koordenatuak bektore horien osagaiak direla). Orduan, puntu horiek sortzen duten *triangeluaren azalera* $\vec{b}-\vec{a}$ eta $\vec{c}-\vec{a}$ bektoreek sortzen duten paralelogramoaren azaleraren erdia da. Beraz, triangeluaren azalera kalkulatzeko honako adierazpen hau erabil daiteke:

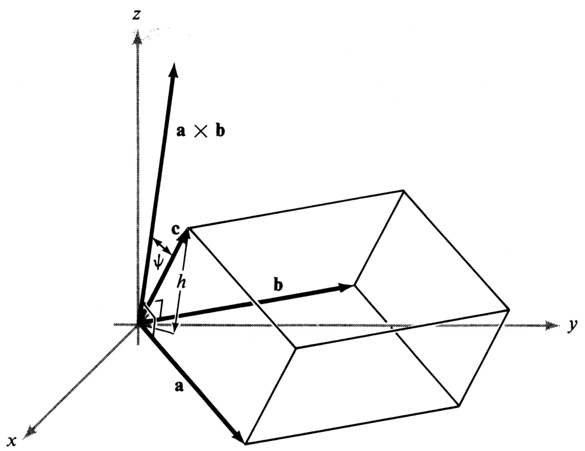
$$A = \frac{1}{2}\|(\vec{b}-\vec{a}) \times (\vec{c}-\vec{a})\|.$$

1.5.2. Paralelepipedo baten bolumena.

Izan bitez $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$ eta $\vec{c} = c_1\vec{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{k}$ $\mathbb{R}^3$-ko bektoreak.
$\vec{a}$, $\vec{b}$ eta $\vec{c}$ ertzak dituen paralelepipedoaren bolumena determinante honen balio absolutua da:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

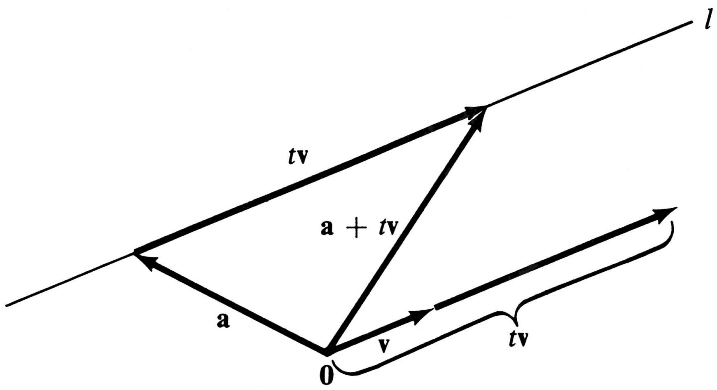
Frogantza ariketa gisa geratzen da.



1.15. irudia. $\vec{a}$-k, $\vec{b}$-k eta $\vec{c}$-k sortutako paralelepipedoa.

1.5.3. Zuzenaren ekuazioa.

l zuzen baten ekuazioa kalkulatuko dugu, non $\vec{v}$ bektoreak zuzenaren norabidea adierazten baitu eta $\vec{a}$ bektoreak l zuzeneko puntu bat.



1.16. irudia. Zuzenaren ekuazio bektoriala.

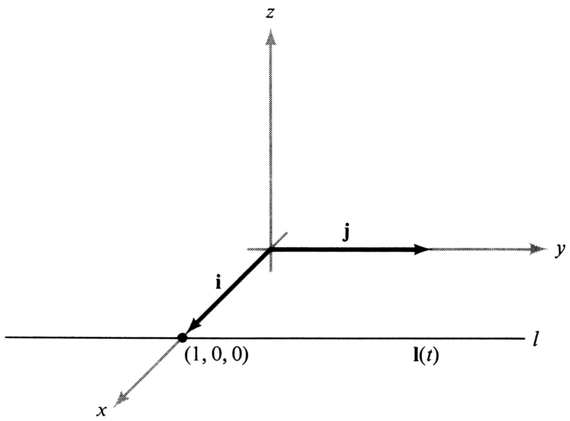
Goiko irudian ikus daitekeenez, t aldatuz doan neurrian $(-\infty, \infty)$ tartean l zuzeneko puntu guztiak lortzen dira. Hortaz, l zuzenaren *ekuazio bektoriala* honela adieraz dezakegu:

$$\vec{l}(t) = \vec{a} + t\vec{v}.$$

Orduan, l zuzena t parametroaren bidez adierazita dagoela esaten da. Zeren, $t = 0$ bada, $\vec{l}(0) = \vec{a}$. Eta $t > 0$ handitzen denean, $\vec{l}(t)$ $\vec{a}$-tik urruntzen da, $\vec{v}$-ren noranzkoan. Aldiz, $t < 0$ balio absolutuan handitzen denean, $\vec{l}(t)$ $\vec{a}$-tik urruntzen da $-\vec{v}$-ren noranzkoan.

1.14. adibidea. Zehaztu $\vec{\jmath}$ bektorearen norabideko zuzenaren ekuazioa, $(1, 0, 0)$-tik igarotzen bada.

$\vec{l}(t) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0) = (1, t, 0)$. □

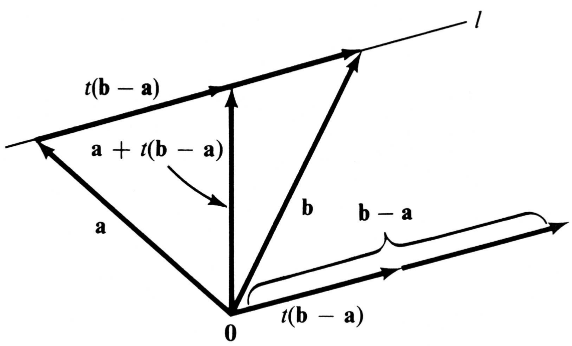


1.17. irudia. $\vec{\jmath}$ norabidean eta $\vec{\imath}$-ren muturretik pasatzen den l zuzena.

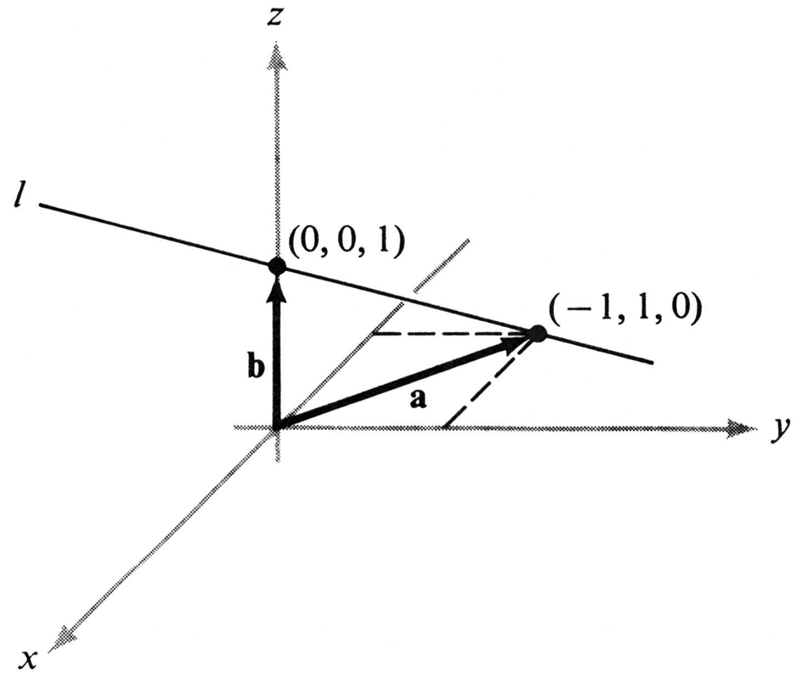
$\vec{a}$-ren eta $\vec{b}$-ren muturretatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa honako hau da:

$$\vec{l}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \Longleftrightarrow \vec{l}(t) = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{l}(t) = s\vec{a} + t\vec{b},$$

non $s + t = 1$.



1.18. irudia. $\vec{a}$-ren eta $\vec{b}$-ren muturretatik pasatzen den l zuzenaren ekuazio parametrikoa.



1.19. irudia. Aurreko irudiaren kasu partikular bat.

1.15. adibidea. Aurkitu $(-1, 1, 0)$ eta $(0, 0, 1)$ puntuetatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa.

Kasu horretan $\vec{a} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ eta $\vec{b} = \vec{k}$. Beraz:

$$\vec{l}(t) = (1-t)(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + t\vec{k} = -(1-t)\vec{\imath} + (1-t)\vec{\jmath} + t\vec{k}.$$

Baliokidetasunez, $\vec{l}(t) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ denez,

$$x = t - 1 \qquad y = 1 - t \qquad z = t. \quad \square$$

Osagaien bidez, (x_1, y_1, z_1) eta (x_2, y_2, z_2) puntuetatik igarotzen den zuzenak *ekuazio parametriko* hauek dauzka:

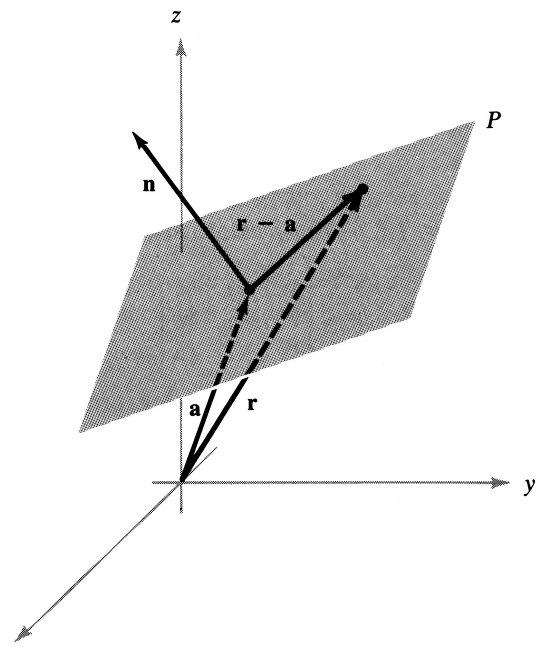
$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$
$$z = z_1 + t(z_2 - z_1).$$

t ezabatuz gero, zuzenaren *ekuazio jarraitua* honela idazten da:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

1.5.4. Planoaren ekuazioa.

Izan bitez P plano bat, plano horretan muturra duen $\vec{a}$ bektore bat eta planoarekiko $\vec{n}$ bektore normal bat.



1.20. irudia. Planoko puntuek $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ ekuazioa betetzen dute.

Izan bedi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. $\vec{r}$-ren muturra P planoan dago baldin eta soilik baldin $\vec{r} - \vec{a}$ bektorea P-rekiko paraleloa bada, eta beraz baldin eta soilik baldin $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ bada.

Ondorioz, *P planoarekiko $\vec{n}$ bektore normala P-rekiko paraleloa den edozein bektorerekiko perpendikularra da.*

Bestalde, biderkadura eskalarraren banatze-propietatea erabiliz goiko berdintzatik $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$ ondorioztatzen da. Izan bitez

$$\vec{n} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}$$
$$\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$$
$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Hortaz, $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$ garatuz honako hau dugu:

$$Ax + By + Cz = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3,$$

baina, eskuineko aldea konstantea denez, P *planoaren ekuazioa* honela idatz dezakegu:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

non $D = -(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)$ baita.

1.16. adibidea. Aurkitu $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ bektorearekiko $(1, 0, 0)$ puntua daukan plano ortogonal baten ekuazioa.

Ebazpena: Aurreko adierazpenetik:

$$1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0,$$

alegia, $x + y + z = 1$ ekuazioa dugu. □

1.17. adibidea. Aurkitu $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 0)$ eta $(1, 1, 0)$ puntuak dituen planoaren ekuazioa.

Ebazpena: Bi metodo ditugu.

1. Metodoa.- Edozein planotako ekuazioa $Ax+By+Cz+D = 0$ erakoa da. $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 0)$ eta $(1, 1, 0)$ puntuak planoan daudenez honako hau dugu:

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0 \\ 2A + D &= 0 \\ A + B + D &= 0. \end{aligned}$$

Koefiziente horien balioak mugatuta daudenez multiplo bat izan ezik, horietariko baten balioa finkatzen ahal dugu eta besteak era bakar batean finkatuta geratuko dira. Horrela, $D = -2$ egiten badugu, orduan $A = 1$, $B = 1$ eta $C = 0$ dira. Beraz, puntu horiek dituen planoaren ekuazioa $x + y - 2 = 0$ da.

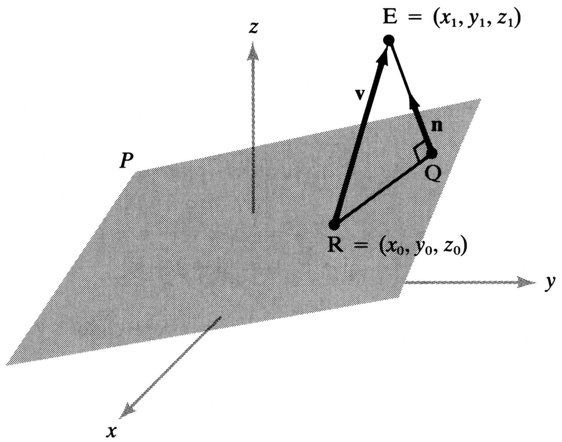
2. Metodoa.- Izan bitez $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ eta $\vec{b} = 2\vec{\imath}$ eta $\vec{c} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ puntu horietan bere muturra daukaten bektoreak. Planoarekiko edozein bektore normalek $\vec{a} - \vec{b}$ eta $\vec{c} - \vec{b}$ bektoreekiko normala izan behar du. Beraz, $\vec{n} = (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{b})$ planoarekiko normala da. Kalkula dezagun biderkadura bektorial hau:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}.$$

Hortaz, planoaren edozein ekuazio $-x - y + D = 0$ erakoa da (multiplo eskalar bat izan ezik). Bestalde, $(2, 0, 0)$ planoan dagoenez, $D = +2$; ordezkatuz gero, $x + y - 2 = 0$ dugu. □

1.5.5. Puntu batetik plano baterako distantzia.

Demagun $E(x_1, y_1, z_1)$ puntutik $Ax + By + Cz + D = 0$ ekuazioko planora dagoen distantzia aurkitu behar dugula.



1.21. irudia. E puntutik P planorako distantzia.

Izan bedi $R(x_0, y_0, z_0)$ puntua $Ax + By + Cz + D = 0$ planoko puntu bat. Kontsidera dezagun bektore hau:

$$\vec{n} = \frac{A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

zeina bektore unitarioa eta planoarekiko normala baita. Beraz, $\vec{n}$-ren gaineko $\vec{v} = \overrightarrow{RE}$ bektorearen proiekzioaren luzera $d = |EQ|$ distantzia da, hain zuzen ere, eta, ondorioz, honako hau dugu:

$$\begin{aligned} d &= |\vec{v} \cdot \vec{n}| = |[(x_1 - x_0)\vec{\imath} + (y_1 - y_0)\vec{\jmath} + (z_1 - z_0)\vec{k}] \cdot \vec{n}| \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

$R(x_0, y_0, z_0)$ puntua P planokoa denez, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ dugu. Berdintza hori aurreko formulan ordezkatuz formula hau lortzen dugu:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1.6. Espazio euklidear n-dimentsionala.

Definizioak: Izan bedi n zenbaki arrunt bat. $\mathbb{R}^n$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-koteen multzoa da, non x_i guztiak $(i = 1, \ldots, n)$ zenbaki errealak baitira. Multzo horri *n-espazio euklidear* ere deitzen diogu. Haren gaiei, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *n-bektore* (edo bakarrik *bektore*) deitzen zaie. Beraz, $\mathbb{R}^n$ n dimentsiotako espazio bektorial bat da. Zehazki, n 1, 2 edo 3 denean, zuzena, planoa edo espazio 3-dimentsionala dugu, hurrenez hurren.

1.6.1. $\mathbb{R}^n$-rako eragiketak.

$\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$-rako definitutako eragiketak hedatzen ahal ditugu $\mathbb{R}^n$-ra. Horrela gertatzen da lehenengo bietarako:

Batuketa:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1 + \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n);$$

Eskalar batezko biderketa: Edozein α zenbaki errealetarako

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),$$

non eragiketa horien propietateak eta esangura geometrikoa $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-rakoen berdinak baitira.

$\mathbb{R}^n$-ren oinarri kanonikoa: $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, …, $\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ bektoreek osatua da. Beraz, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ bektorea honela idatz dezakegu:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n.$$

Biderkadura eskalarra: Eragiketa hori honela zabaltzen da $\mathbb{R}^n$-ra:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

$\mathbb{R}^n$-n biderkadura eskalarra adierazteko $< \vec{x}, \vec{y} >$ notazioa ere erabiltzen da.

Norma: $\vec{x}$ bektore baten *norma* (euklidearra) edo *luzera* honela zabaltzen da $\mathbb{R}^n$-ra:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Bi bektoreren angelua: $\vec{x}$-ren eta $\vec{y}$-ren arteko angelua, $\mathbb{R}^3$-n bezala, formula honen bidez aurkitzen dugu:

$$\theta = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}.$$

$\mathbb{R}^3$-n biderkadura eskalarrak dauzkan propietateak zabaltzen dira $\mathbb{R}^n$-ra teorema honen bidez.

1.2. teorema. $\forall\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ *eta* $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *honako hau dugu:*

(i) $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \cdot \vec{z} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{z}) + \beta(\vec{y} \cdot \vec{z})$.

(ii) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$.

(iii) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$.

(iv) $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$, *baldin eta soilik baldin* $\vec{x} = \vec{0}$.

- **Cauchy-Schwarz-en desberdintza** ere zabaldu dezakegu $\mathbb{R}^n$-ra teorema honen bidez:

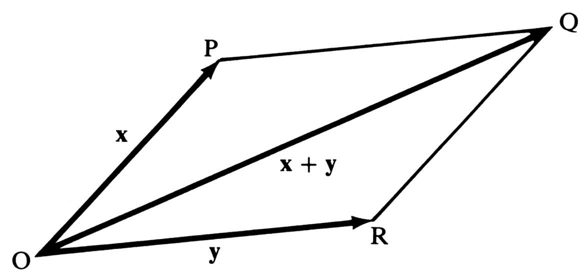
  1.3. teorema. *Izan bitez* $\vec{x}$ *eta* $\vec{y}$ $\mathbb{R}^n$*-ko bektoreak. Orduan*

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Oharra: Triangelu baten bi aldetako luzeren batura beti da beste aldearen luzera baino handiagoa edo berdina. Hori frogatuko da korolario honetan.

1.2. korolarioa. *Izan bitez $\vec{x}$ eta $\vec{y}$ $\mathbb{R}^n$-ko bektoreak. Orduan,*

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \qquad \textit{(desberdintza triangeluarra).}$$



1.22. irudia. Desberdintza triangeluarra.

Frogantza:

1.3. teoremaz $\vec{x}\cdot\vec{y} \leq |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ betetzen da. Orduan,

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2.$$

Beraz,

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2,$$

eta erro karratua eginez emaitza lortzen da. □

- 1.3. teorema eta haren korolarioa aljebraikoki garatzen badira, bi formula erabilgarri hauek lortzen dira:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

Ariketa: Izan bitez $\vec{x} = (1,2,0,-1)$ eta $\vec{y} = (-1,1,1,0)$. Egiaztatu 3. teorema eta haren korolarioa kasu horretarako.

Oharrak:

1. $\mathbb{R}^3$-rekiko antzekotasunez, $\mathbb{R}^n$-ko distantziaren kontzeptua defini dezakegu; hau da, $\vec{x}$-k eta $\vec{y}$-k $\mathbb{R}^n$-ko bi puntu adierazten badituzte, *$\vec{x}$-ren eta $\vec{y}$-ren arteko distantzia* $\|\vec{x}-\vec{y}\|$ eskalarra da (hots, $\vec{x}-\vec{y}$ bektorearen luzera).

2. $\mathbb{R}^n$*-n biderkadura bektoriala* ez dago definiturik, $n = 3$-rako izan ezik.

1.7. Aljebra matrizialaren oinarrizko kontzeptuak.

$m \times n$ matrize bat zenbaki errealen bi dimentsioko ordenazio bat da, m lerrotan eta n zutabetan banatua, hau da:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Oharra: Matrizearen gaiak zenbaki konplexuak ere izan daitezke; testu honetan, zenbaki errealak direla joko dugu.

- A matrizea $[a_{ij}]$ eran ere idatz dezakegu. $\mathbb{R}^n$-ko bektoreen kontzeptu aljebraikoa zabalduz, $m \times n$ matrizeen multzoa $\mathbb{R}^{m\times n}$ eran adierazten da.
- $m = n$ denean, A matrizea *matrize karratu* bat dela esaten da.
- Matrize karratu batean, a_{11}-etik a_{nn}-rako lerro zuzen berean dauden gaien multzoak *diagonal nagusi* izena du. Beste diagonalari *bigarren diagonal* deritzogu, hau da, a_{1n}-tik a_{m1}-era doanari.
- Jarraian matrizeen batuketa eta eskalar batezko biderketa aztertuko ditugu.

Batuketa: Izan bitez A eta B $m\times n$ matrizeak. Batuketa (edo kenketa) egin dezakegu, lortzeko beste $m \times n$ matrize bat:

$$C = A + B \quad (\text{edo} \quad C = A - B),$$

non $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (edo $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$) baita. Argi denez:

$$A + B = B + A.$$

1.18. adibidea. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$. $\square$

Eskalar batezko biderketa: λ eskalar bat eta $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ badira, $C = \lambda A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, non $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ baita.

1.19. adibidea. $3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Batuketa eta eskalar batezko biderketaren propietateak:

Izan bitez edozein $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. *Elkartze-propietatea:* $(A + B) + C = A + (B + C)$.

2. *Gai neutroa: existitzen da* $\mathbb{0} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *matrize bat non* $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\quad A + \mathbb{0} = \mathbb{0} + A = A$.
   $\mathbb{0}$ matrizearen gai guztiak zero dira (matrize *nulua*). Hau da: $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$.

3. *Gai simetrikoa:* $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *existitzen da* $-A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *matrizea, non* $A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{0}$.
   $-A$-ren gaiak $-a_{ij}$ dira (*aurkako* matrizea). Hau da, A-renak baina zeinua aldatuta.

4. *Trukatze-propietatea:* $A + B = B + A$.

5. *Matrize-batuketarekiko banatze-propietatea:* $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$.

6. *Eskalar-batuketarekiko banatze-propietatea:* $(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$.

7. *Eskalar batezko biderketarekiko elkartze-propietatea:* $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

8. *Eskalar batezko biderketarekiko gai neutroa:* $1A = A1 = A$.

1.7.1. Matrizeen biderketa.

$B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eta $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times p}$ badira, orduan $A = BC$ matrizeak sarrera hauek ditu:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}c_{kj},$$

zeina B-ren i. lerroa baita eta C-ren j. zutabearen biderkadura eskalarra baita (biak bektore gisa kontsideratuz). Hau da:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{b_{i1}} & \cdots & \mathbf{b_{im}} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & \mathbf{c_{1j}} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & \mathbf{c_{mj}} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}.$$

Ohartu BC biderkadura matriziala definituta egoteko B-ren zutabe-kopuruak eta C-ren lerro-kopuruak berdinak izan behar dutela; kasu honetan kopurua m da. Ondorioz, A biderkadura $\mathbb{R}^{n\times p}$-koa da.

1.20. adibidea. Izan bitez

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Orduan,

$$BC = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

eta CB ez dago definiturik. □

Biderketaren propietateak:

1. *Elkartze-propietatea:* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ *guztietarako honako hau betetzen da:*

$$A(BC) = (AB)C.$$

2. *Matrize-batuketarekiko banatze-propietatea:*

   (i) $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad B, C \in \mathbb{R}^{n\times p} \qquad A(B+C) = AB + AC.$

   (ii) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad C \in \mathbb{R}^{n\times p} \qquad (A+B)C = AC + BC.$

2. *Matrize-biderketarekiko eskalar batezko biderketaren banatze-propietatea:*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

4. *Gai neutroa:* Izan bedi matrize diagonal hau:

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

   Matrize horri *unitate-matrize* deitzen zaio.

   (i) Badago $\mathbb{1}_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrize bat, non $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{1}_m A = A$.

   (ii) Badago $\mathbb{1}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize bat, non $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A\mathbb{1}_n = A$.

Matrize-biderketa ez da trukakorra; hau da, oro har, $AB \neq BA$ (ikusi 1.20. adibidea).

1.7.2. Aplikazio linealak.

Izan bedi $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Aurreko bektorea matrize-idazkeraren bidez adierazteko *zutabe-bektore* hau erabiltzen da:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Beraz, $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

- Izan bedi $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Orduan, $A\vec{x} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Beraz, $\vec{y} = A\vec{x}$, bektore idazkera erabiliz, $(y_1, \ldots, y_m)$ eran adieraz dezakegu.

- Ondorioz, A matrizeak definitzen du $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-rako $\vec{y} = f(\vec{x})$ funtzio bat, non $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ baita.

- Funtzio horrek propietate hauek betetzen ditu:

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$$
$$A(\alpha\vec{x}) = \alpha(A\vec{x}),$$

  non $\alpha \in \mathbb{R}$. Propietateak frogatzea ariketa gisa geratzen da. Aurreko propietateak betetzeagatik f funtzioari *aplikazio lineal* deitzen diogu. Hau da, f aplikazio linealari elkarturiko matrizea A da.

1.7.3. 2×2 eta 3×3 matrizeak eta haien determinanteak.

Bektore kontzeptua zenbakizko multzo finitu baten norabide bakarreko ordenazio gisa uler daiteke.
Adibidez: (a_1, a_2, a_3). Beraz, $(-1, 0, 3)$ eta $(3, -1, 0)$ bektore desberdinak dira.
Matrize kontzeptua zenbakizko multzo finitu baten norabide biko ordenazio gisa uler daiteke.

2×2 matrize bat honela idatz daiteke:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

non $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ baitira. Adibidez:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}.$$

2×2 *matrize baten determinantea* honela definitzen da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

1.21. adibidea.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{eta} \quad \begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 101. \quad \square$$

3×3 matrize bat honela idatz daiteke:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

non a_{ij} bakoitza eskalar bat baita. Ordenazio horretan a_{ij}-k eskalarraren posizioa adierazten du, hau da, i-garren lerroan eta j-garren zutabean dagoela.

3×3 *matrize baten determinantea* honela definitzen da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Batugai horiek lortzeko badago arau sinple bat, j bakoitzerako lehenengo lerroko a_{1j} hartu eta jarri $(-1)^{(1+j)}$-ren zeinua aurrean; gero, kalkula ezazu 2×2 matrizearen determinantea, lehenengo lerroa eta j-garren zutabea kenduz.

- Aurreko adierazpena zeharo garatuz, eta gero ordenatuz, formula hau lortzen da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}),$$

zeinari *Sarrus-en erregela* baiteritzo.

1.22. adibidea.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0.$$

1.7.4. $n \times n$ matrize baten determinantea.

1.7.3 atalean definitzen ziren 2×2 eta 3×3 matrizeen determinanteak.

Definizio hura orokortu ahal da $n \times n$ matrizeetarako:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Lehendabizi ikus ditzagun beste definizio batzuk.

- A-ren *azpimatrizea* A-tik ateratako matrize bat da, A-ren lerro eta/edo zutabe batzuk ezabatuz lortzen dena.
- $A = [a]$, 1×1 matrize bat bada, orduan $\det A = |A| = a$.
- M_{ij} *minore osagarria* edo soilik *minorea*, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizetik i. lerroa eta j. zutabea kenduz lortzen den $(n-1) \times (n-1)$ azpimatrizearen determinantea da.
- a_{ij} gaiaren *adjuntua* edo *kofaktorea* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ da.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n > 1)$ matrize baten determinantea honela kalkula daiteke:

  $$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \text{edozein} \qquad i = 1, 2, \dots, n\text{-tarako},$$

  edo

  $$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \text{edozein} \qquad j = 1, 2, \dots, n\text{-tarako}.$$

1.23. adibidea.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 6 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-12) - 2 \cdot (12 + 4) + 3 \cdot (18) - 4 \cdot (-20 - 54 - 60)$$
$$= -12 - 32 + 54 + 536 = 546.$$

Laugarren zutabetik garatuz honako hau lortzen dugu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 6 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+0 + 0 = -4 \cdot (-20 - 54 - 60) + (-8 + 54 - 12 - 24) = 546. \quad \square$$

1.7.5. Determinanteen propietate nagusiak.

1. Matrize bateko lerro edo zutabe bat zeroz osatuta badago, haren determinantea zero da.
2. Bi lerro (edo bi zutabe) trukatzen badira, determinantearen zeinua aldatzen da.
3. Matrize batek bi lerro (edo bi zutabe) berdinak baditu, haren determinantea zero da.
4. Lerro (edo zutabe) bateko gaiak zenbaki batez biderkatzen (edo zatitzen) badira, determinantea zenbaki horretaz biderkaturik (zatiturik) geratzen da.
5. Matrize batek bi lerro (edo bi zutabe) proportzional baditu, haren determinantea zero da.
6. Matrize bateko lerro (edo zutabe) bati beste lerro (zutabe) batzuen konbinazio lineal bat batzen bazaio, determinantearen balioa ez da aldatzen.
7. Matrize bateko lerro (edo zutabe) bateko gai bakoitza l batugaiek osatuta badago, determinantea deskonposa daiteke l determinanteen batura batean, non batugai-determinante bakoitzaren gainerako lerroak lehengoaren berdinak diren, eta lerro (edo zutabe) hartako gai bakoitza h batugaietariko bat den, batugaien ordenari jarraituz. Adibidez,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} & a_{13}+b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Matrize bateko lerro (edo zutabe) bat beste lerro (zutabe) batzuen konbinazio lineala bada, haren determinantea zero da.

9. A eta B $n \times n$ matrizeak badira, orduan $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

1.7.6. Determinantea kalkulatzeko beste metodo batzuk.

1.7.6.1. Chio-ren erregela.

Bilatzen da zero gehien daukan lerroa edo zutabea. Lerro (edo zutabe) horretan zero ez den zenbaki bat aukeratzen da (hots, *pibotea*), eta beste zenbaki batzuez biderkatuz, zero bihurtzen dira lerro (edo zutabe) horretako gai ez-nuluak. Era horretan determinantearen formularen aplikazioa asko laburtzen da. Ikusi adibidea.

1.24. adibidea. Kalkulatu $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Ebazpena:

Azken zutabea aukeratuz, eta pibotetzat $a_{44} = 1$ hartzen bada, zero egingo ditugu $a_{14} = 1$ eta $a_{34} = 1$ gaiak, gai horiei dagozkien lerroei laugarren lerroa kenduz, hau da:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1-1 & 4-0 & 5-1 & 1-1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1-1 & 2-0 & 1-1 & 1-1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

3×3 matrizearen determinatea 3. lerroan zehar garaturik,

$$= 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2(-12) = 24.$$

Ariketa gisa, aukeratu kalkuluaren hasieran bigarren zutabea zeroak egiteko eta horko pibote egokiena, eta kalkulatu determinantea. □

1.7.6.2. Matrize bat triangeluar bihurtzea.

Metodo hori erabili ohi da programatzeko ordenagailu bidez. Diagonal nagusiaren azpian zeroak bakarrik dauzkan matrizeari *matrize goi-triangeluar* deitzen zaio. Aldiz, diagonal nagusiaren gainean zeroak bakarrik dauzkan matrizeari *matrize behe-triangeluar* deitzen zaio.
Beraz, matrize bat triangeluar bihurtzea matrize hori goi- edo behe-triangeluar bihurtzea da.

- Demagun behe-triangeluar bihurtu nahi dugula. Dakigunez, lerro bati batzen badiogu beste lerro bat zenbaki batez biderkaturik, determinantearen balioa ez da aldatzen (ikusi determinanteen propietateak).

- Beraz, zero egiteko diagonalaren azpian, lehenengo zutabearekin hasiko gara eta, a_{11} pibote gisa aukeraturik, zero egingo ditugu $a_{21}, \ldots$, a_{n1} gai guztiak. Gero gauza bera egingo dugu bigarren zutabearekin a_{22} pibote gisa aukeratuz, zero bihurtuz $a_{32}, \ldots, a_{n2}$ gai guztiak, gure helburua lortu arte.

1.25. adibidea. $L_i = i$. lerroa bada, eta

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

lehenengo zutabean zeroak egiten dira, eragiketa hauek eginez: $\overline{L}_2 = (L_2 - 3L_1)$, $\overline{L}_3 = L_3 - L_1$, eta $\overline{L}_4 = L_4 - L_1$. Orduan honako hau lortzen da:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -11 & -14 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Jarraian bigarren zutabean zeroak egiten dira eragiketa hauek eginez: $\overline{\overline{L}}_3 = \overline{L}_3 - \frac{2}{11}\overline{L}_2$ eta $\overline{\overline{L}}_4 = \overline{L}_4 - \frac{4}{11}\overline{L}_2$. Orduan honako hau lortzen da:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -11 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -16/11 & 6/11 \\ 0 & 0 & 12/11 & 12/11 \end{vmatrix}.$$

Gero hirugarren zutabean zero bat egiten da gai diagonalaren azpian eragiketa hauek eginez: $\overline{\overline{\overline{L}}}_4 = \overline{\overline{L}}_4 + \frac{12}{16}\overline{\overline{L}}_3$. Orduan honako hau lortzen da:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -11 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -16/11 & 6/11 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{vmatrix} = 1(-11)(-\frac{16}{11})\frac{3}{2} = 24. \quad \square$$

1.7.7. Matrize motak.

A matrize bat A^t *matrize iraulia* bihurtzen da A-ko lerroak A^t matrizean zutabeak badira (eta, beraz, A-ko zutabeak A^t-ko lerroak badira). Adibidez,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 5 \\ -3 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

bada, orduan

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrize bat iraultzeko eragiketak *propietate* hauek ditu:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
3. $(AB)^t = B^t A^t$.
4. Izan bedi λ eskalar bat, orduan $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
5. $\det A^t = \det A$.

- $A^t = A$ bada, A matrizea *simetrikoa* dela esaten da. Horrelako matrizeetan $a_{ij} = a_{ji}$ betetzen da $\forall i, j$. Adibidez, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrize simetrikoa da.

- $A^t = -A$ bada, A matrizea *antisimetrikoa* dela esaten da. Horrelako matrizeetan $a_{ij} = -a_{ji}$ betetzen da $\forall i \neq j$ eta $a_{ii} = 0 \ \forall i$. Adibidez, $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -5 & -2 \\ -3 & 5 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrize antisimetrikoa da.

- Argi denez, matrize simetrikoek eta matrize antisimetrikoek karratuak izan behar dute.

1.4. teorema. *A matrize karratu oro deskonposa daiteke matrize simetriko baten eta matrize antisimetriko baten arteko batura gisa.*

1.7.8. Alderantzizko matrizea.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize bat *alderanzkarria* da, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize bat existitzen bada, non $AB = BA = \mathbb{1}_n$ baita, $\mathbb{1}_n$, $\mathbb{R}^{n\times n}$-ko unitate-matrizea izanik. B delako hori, existitzen bada, A^{-1}-en bidez adierazten dugu eta *A-ren alderantzizko* deritzogu. Alderantzizkoa existitzen bada, bakarra da.

Ariketa: Izan bedi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ orduan } A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 12 & 4 \end{bmatrix},$$

zeren $AA^{-1} = \mathbb{1} = A^{-1}A$ baita. Egiaztatu.

- A alderanzkarria bada, $A\vec{x} = \vec{b}$ ekuazioa ebazteko nahikoa da aurrebiderkatzea A^{-1}-ez, $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ lortzeko.

- j bakoitzerako $A\vec{x} = \vec{e}_j$ ekuazioaren $\vec{x}$ emaitza A^{-1} matrizearen j. zutabea da. Egiaztatu kalkulatuz horrela aurreko ariketako A^{-1}-en 2. zutabea.

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize baten *adjuntua* honela definitzen da:

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Hor A_{ij}, a_{ij} gaien kofaktoreak dira (hau da, zeinudun minoreak), baina irauliak.

- Aurkitzeko matrize karratu baten *alderantzizko matrizea*, formula hau dugu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{+}.$$

1.26. adibidea. Izan bedi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. Aurkitu A^{-1}.

Ebazpena:

Hasiko gara matrize adjuntua kalkulatzen. Horretarako behar ditugu kofaktoreak:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$$
$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Orduan honako hau izango dugu:

$$A^{+} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestalde,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7+6-1 = -2.$$

Ondorioz, A alderanzkarria da, eta haren alderantzizkoa hauxe da:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{+} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}. \quad \square$$

- $\det A = 0$ denean A matrizea *singular* dela esaten da. $\det A \neq 0$ denean A *ez-singular* edo *erregularra* dela esaten da.

1.5. teorema. *A $n \times n$ matrizea alderanzkarria da, baldin eta soilik baldin A ez bada singularra.*

Frogantza:

$\Rightarrow$ A alderanzkarria bada, A^{-1} existitzen da, non $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$. Beraz, $\det(AA^{-1}) = \det \mathbb{1}$, hau da,

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det \mathbb{1} = 1.$$

Horrek $\det A \neq 0$ inplikatzen du. Beraz, A-k ez du singularra izan behar.

$\Leftarrow$ A ez bada singularra, $\det A \neq 0$, eta beraz A^{-1} kalkula dezakegu $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^{+}$ formularen bidez, eta ondorioz A alderanzkarria da. $\square$

1.7.8.1. Alderantzizko matrizearen propietate batzuk.

Alderantzizko matrizearen definiziotik propietate batzuk ondorioztatzen dira.

1. *Matrize alderanzkarri baten alderantzizko matrizea bakarra da.*
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
5. $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

- $A^{-1} = A^t$ bada, A *ortogonala* dela esaten da.

Matrize ortogonalei buruzko *propietate* batzuk:

1. *A ortogonala bada, A^t ere bai; izan ere,* $(A^t)^t = (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.
2. *A ortogonala bada,* $(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^t = \det(AA^t) = \det \mathbb{1} = 1$ *dugu. Beraz,* $\det A = 1$.
3. *Matrize bat ortogonala bada, bi lerroren biderkadura eskalarra (lerro bakoitza bektoretzat harturik) zero da, eta lerro baten eta lerro berberaren arteko biderkadura eskalarra bat da.*

1.27. adibidea. $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ ortogonala da. Izan ere,

$$AA^t = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 x + \sin^2 x & -\cos x \sin x + \sin x \cos x \\ -\sin x \cos x + \cos x \sin x & \sin^2 x + \cos^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \square$$

1.7.9. Bektoreen eta matrizeen normak.

Izan bedi $\mathbb{R}^n$ zutabe-bektore guztien multzoa, osagai errealekoa; hau da, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ bektoreen multzoa (ohartu irauliak direla). Definitzeko distantzia $\mathbb{R}^n$ multzoan *bektore baten norma* ideia erabiliko dugu (1.6. atalean norma definitzen da biderkadura eskalarraren bidez; kasu horretan *norma euklidearra* dugu).

Definizioa: $\mathbb{R}^n$-ko *bektore-norma* $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ funtzio bat da, eta propietate hauek betetzen ditu:

(i) $\|\vec{x}\| \geq 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ guztietarako,

(ii) $\|\vec{x}\| = 0$, baldin eta soilik baldin $\vec{x} = \vec{0}$ bada,

(iii) $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ eta $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ guztietarako,

(iv) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ guztietarako.

Hiru norma definituko ditugu, nahiz eta gero l_2 norma (hau da, euklidearra) bakarrik erabili.

Definizioa: l_1, l_2 eta l_∞ normak $\vec{x}$-rako honela definitzen dira:

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Beraz $\vec{x}$ eta $\vec{y}$ bektoreen arteko distantzia hiru adierazpen hauen bidez definitzen da:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|_1, \quad \|\vec{x} - \vec{y}\|_2 \quad \text{eta} \quad \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty.$$

Teoremaren frogantza ariketa gisa geratzen da.

1.6. teorema. *$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ bakoitzerako hau betetzen da:*

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1.$$

Bestalde, $n \times n$ matrizeen arteko distantzia ere batzuetan beharrezkoa da. Horretarako matrize baten norma definituko dugu.

Definizioa: $\mathbb{R}^{n\times n}$ matrizeen multzoko *matrize-norma* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathbb{R}$ funtzio bat da, propietate hauek betetzen dituena:

(i) $\|A\| \geq 0, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ guztietarako,

(ii) $\|A\| = 0$, baldin eta soilik baldin A zero matrizea bada,

(iii) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ eta $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ guztietarako,

(iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ guztietarako.

A-ren eta B-ren arteko distantzia $\|A - B\|$ matrize-normaren bidez adieraz daiteke. Baldin $\|\cdot\|$ edozein bektore-norma bada, orduan

$$\|A\| = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

matrize-norma bat definitzen du $\mathbb{R}^{n\times n}$ multzoan, zeina *norma arrunt* deitzen baitzaio.

Ondorioz, bektore-normek l_1, l_2 eta l_∞ matrize-norma hauek sortzen dituzte:

$$\|A\|_1 = \max_{\|\vec{x}\|_1=1} \|A\vec{x}\|_1, \quad \|A\|_2 = \max_{\|\vec{x}\|_2=1} \|A\vec{x}\|_2$$

eta

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\vec{x}\|_\infty=1} \|A\vec{x}\|_\infty.$$

1.7. teorema. *$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ guztietarako honako hau betetzen da:*

(i) $$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(ii) $$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

1.7.10. Autobalioak eta autobektoreak.

Izan bedi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizea. λ zenbaki erreala A-ren **autobalio** bat dela esaten da, $\vec{x} \neq \vec{0}$ bektore bat existitzen bada, non $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ betetzen baita ($\vec{x}$ zutabe-bektore gisa idatziz). $\vec{x}$ bektoreari λ-*ri elkarturiko autobektorea* deitzen diogu.

- $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ betetzen bada, honako hau dugu:

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = A\vec{x} - \lambda\mathbb{1}\vec{x} = (A - \lambda\mathbb{1})\vec{x} = \vec{0},$$

  eta azken berdintza garatuz hau lortzen da:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

  hau da, ekuazio-sistema homogeneo bat. Beraz, $\vec{x} \neq \vec{0}$ denez, hau da, sistema horrek soluzio ez-nuluak dituenez, koefiziente-matrizearen determinanteak zero izan behar du. Beraz, $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$.

- $\det(A - \lambda\mathbb{1}_n)$ kalkulatuz lortzen den $p(\lambda)$ polinomioari A-ren *polinomio karakteristiko* deitzen diogu.

- Ondorioz, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize baten *autobalioak* $p(\lambda)$ polinomio karakteristikoaren n erroak dira.

- n erroak desberdinak badira, *autobalio bakun* deitzen zaie. Erro batzuk berdinak badira, *erro anizkoitz* deitzen zaie.

1.28. adibidea. Demagun $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dela eta autobalio bat $\lambda = 5$ dela. Kalkulatu autobalio horri elkarturiko autobektorea.

Ebazpena:

Dakigunez, $\lambda = 5$-erako $(A - \lambda\mathbb{1})\vec{x} = \vec{0}$ bete behar da, alegia:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 1 \\ 2 & 3-5 & 1 \\ 1 & 1 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Sistema hori askatuz, $x_1 = x_3$ eta $x_2 = 2x_3$ lortzen da; hau da, $\lambda = 5$-erako autobektoreen multzoa $\{(x_3, 2x_3, x_3)\}$ da. Adibidez, autobektore unitarioa $(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$ da. Egiaztatu. □

1.29. adibidea. Izan bedi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aurkitu autobalioak eta autobektoreak.

Ebazpena:

Kalkula ditzagun A-ren autobalioak:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) + (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1). \end{aligned}$$

A-ren autobalioak $p(\lambda) = 0$-ren soluzioak dira, hau da:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

$\lambda_1 = 2$ autobalioari elkarturiko autobektore bat $(A - \lambda \mathbb{1})\vec{x} = \vec{0}$ sistemaren soluzioa da:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Beraz, sistema hau dugu:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_3 &= 0, \end{aligned}$$

zeinaren soluzioa $x_1 = 0$, $x_2 =$ *edozein balio* eta $x_3 = 0$ baita; hau da, soluzio-multzoa $\{(0, x_2, 0)\}$ da. Adibidez, $\lambda_1 = 2$-ri dagokion autobektore unitarioa $(0, 1, 0)$ da. $\square$

Definizioak: A matrize simetriko batek $\vec{x}^t A\vec{x} > 0$ betetzen badu, $\vec{x} \neq \vec{0}$ guztietarako, A *definitu positiboa* dela esaten da. Halaber, baldin $\vec{x}^t A\vec{x} \geq 0$, < 0 eta ≤ 0 bada, A *erdidefinitu positiboa*, *definitu negatiboa* eta *erdidefinitu negatiboa* dela esaten dugu, hurrenez hurren.

A matrizea $\vec{x}$ batzuetarako definitu positiboa bada eta beste batzuetarako definitu negatiboa bada, orduan A *indefinitua* dela esaten da.

1.8. teorema. *Izan bitez*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad f(x, y) = [x \quad y]A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Orduan A definitu positiboa da, baldin eta soilik baldin $a > 0$ eta $\det A = ac - b^2 > 0$ *badira.*

Bestalde, A definitu negatiboa da, baldin eta soilik baldin $a < 0$ eta $ac - b^2 > 0$ badira. Gainera, $\det A < 0$ *bada, A indefinitua da.*

(**Oharra:** $f(x, y)$ funtzioari *koadratikoa* deritzogu.)

Badaude antzeko irizpideak A $n \times n$ matrize simetrikoa denean. Kontsidera ditzagun A-ren diagonalean zeharreko n azpimatrize karratuak.

$$A = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} &\Delta_1 = a_{11}, \\ &\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \\ &\vdots \\ &\Delta_n = \det A. \end{aligned}$$

Δ_k determinanteari A-ren *k-garren minore nagusi* deitzen zaio. Teorema orokorra honela formula daiteke.

1.9. teorema. *A $n \times n$ matrize simetrikoa bada eta Δ_k haren k-garren minore nagusia bada, $1 \leq k \leq n$ bakoitzerako, orduan:*

(a) A definitu positiboa da, baldin eta soilik baldin $\Delta_k > 0$ bada $k = 1, 2, \ldots, n$ guztietarako. (A erdidefinitu positiboa da baldintza horietan, baina $\Delta_n = 0$ bada.)

(b) A definitu negatiboa da, baldin eta soilik baldin $(-1)^k \Delta_k > 0$ bada $k = 1, 2, \ldots, n$ guztietarako (hots, k bakoitia bada, Δ_k negatiboa denean; eta k bikoitia bada, Δ_k positiboa). (A erdidefinitu negatiboa da baldintza horietan, baina $\Delta_n = 0$ bada.)

Matrize baten definitutasuna aztertzeko beste teorema erabilgarri bat honako hau da.

1.10. teorema.

(i) Matrize karratu baten autobalio guztiak positiboak badira, matrize hori definitu positiboa da.

(ii) Matrize karratu baten autobalio guztiak negatiboak badira, matrize hori definitu negatiboa da.

(iii) Matrize karratu batek autobalio positiboak eta negatiboak baditu, matrize hori indefinitua da.

1.30. adibidea. Izan bedi matrize hau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kasu horretan $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$ eta $\Delta_3 = 4$ dira. Beraz, A definitu positiboa da.

Egiaztatu hori kalkulatuz aurreko adibideko matrizearen autobalioak eta aztertu 1.10. teorema betetzen den.

1.8. Ekuazio linealezko sistemak.

Izan bedi m ekuazio linealeko eta n ezezaguneko ekuazio-sistema:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

non a_{ij} sistemaren koefizienteak, b_i koefiziente askeak, eta x_j ezezagunak baitira, $i = 1, 2, \ldots, m$ eta $j = 1, 2, \ldots, n$. Gure helburua da sistema batek soluziorik izateko bete behar dituen baldintzak aztertzea eta, ahal denean, emaitza kalkulatzea —hots, sistema horretako ekuazio guztiak betetzen dituzten $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-kote guztiak aurkitzea—.

Goiko ekuazio-sistema era matrizialean idatzita, $A\vec{x} = \vec{b}$ adierazpenaren bidez eman dezakegu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ekuazio *lineal* deitzen zaie, zeren $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ funtzioa lineala baita (ikus 1.7.2 atala). Beraz, ekuazio linealezko sistema ebazten dugunean, $f(\vec{x}) = \vec{b}$ ekuazioko $\vec{x}$ kalkulatzen ari gara.

1.8.1. Sistema linealen sailkapena.

Sistemaren soluzio-kopuruaren arabera sailkapen hau eraiki dezakegu:

1. **Sistema bateragarriak**: gutxienez soluzio bat dutenak. Horiek bi motatakoak izan daitezke:
   (a) **Sistema bateragarri determinatuak**: soluzio bakar bat dutenak.
   (b) **Sistema bateragarri indeterminatuak**: infinitu soluzio dituztenak.
2. **Sistema bateraezinak**: soluziorik ez dutenak.

Definizioa: Bi sistemei *sistema baliokide* deritzegu, baldin bi sistemen soluzioak berdinak badira.

Matrize honi sistemaren *matrize zabaldua* deitzen diogu:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Sistema lineal bateko matrize zabalduari transformazio hauek egiten badizkiogu, beste sistema baliokide baten matrize zabaldua lortzen da:

- lerroen edo ezezagunen zutabeen ordena aldatzea;
- lerro bateko koefiziente guztiak konstante batez biderkatzea;
- lerro bat lerro beraren eta beste lerro batzuen konbinazio linealarekin ordezkatzea;
- lerro bat beste lerro batzuen konbinazio lineala denean kentzea (hots, lerro horri dagokion ekuazioa ezabatzea).

1.8.1.1. Rouché-Frobenius-en teorema.

Gogoratu 1.7.4 ataleko azpimatrizearen definizioa. Adibidez, A matrizea $\widehat{A}$-ren azpimatrizea da.

Definizioa: Izan bedi p zenbaki arrunta, non $p \leq m$ eta $p \leq n$ baita. Orduan A-ren $p \times p$ azpimatrize karratu baten determinanteari p *ordenako minore* deitzen diogu.

Definizioa: A matrizearen *heina* p dela esango dugu, baldin A-tik ateratako p ordenako minoreren bat 0 ez bada, p baino ordena handiagoko minore guztiak (existitzen badira) zero izanik. A matrizearen heina $h(A)$-ren bidez adierazten da, eta, beraz, $h(A) = p$ izango genuke definizioan.

1.11. teorema. *Izan bitez n ezezagun dituen $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema lineala eta haren matrize zabaldua, $\widehat{A}$. Orduan:*

(i) *baldin $h(A) = h(\widehat{A}) = n$ bada, sistema bateragarri determinatua da;*

(ii) *baldin $h(A) = h(\widehat{A}) < n$ bada, sistema bateragarri indeterminatua da;*

(iii) *baldin $h(A) \neq h(\widehat{A})$ bada, sistema bateraezina da.*

1.31. adibidea. Demagun 3 ezezaguneko $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema lineala, non haren matrize zabaldua honako hau baita:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -8 \\ -4 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistema hori bateraezina da, zeren $h(\widehat{A}) = 4 \neq h(A) = 3$ baita.

Aldiz, matrize zabaldua honako hau bada,

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -5 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

sistema bateragarri determinatua da, zeren $h(\widehat{A}) = h(A) = 3$ baita. $\square$

1.8.1.2. Gauss-en metodoa.

$A\vec{x} = \vec{b}$ sistema linealean A matrizea triangeluarra izango balitz, oso erraz ebatziko genuke. Adibidez, hona hemen 3 ezezagun eta 3 ekuazioko sistema lineal bat:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Azken ekuaziotik x_3 erraz aska daiteke. Balio hori ordezka dezakegu bigarren ekuazioan, eta hortik x_2 aska daiteke. Azkenik, x_3-ren eta x_2-ren balioak ordezkatzen dira lehenengo ekuazioan eta x_1 bakantzen da. Beraz, sistemaren matrizea goi-triangeluarra bada, sistema erraz ebazten da behetik gora, hots, atzerantz.

Gauss-en metodoa A matrizea triangeluar bihurtzean datza (ikusi 1.7.6.2 atala). Baina, hala egiten badiogu A matrizeari $\widehat{A}$ barnean, $\vec{b}$ zutabea ere aldatuko da, eta era horretan *sistema triangeluar baliokide bat* lortuko dugu (gogoratu matrize zabalduari egiten ahal dizkiogun transformazioak). Beraz, sistema horren emaitza gure jatorrizko sistemaren emaitza izango da.

Oharra: Triangeluar bihurtzean, a_{ii} pibotea zero bada, bilatuko dugu beheko ekuazio bat, non $a_{ki} \neq 0 \quad (k > i)$ betetzen baita, eta k-garren ekuazioa permutatuko (trukatuko) dugu i-garren ekuazioarekin. Gero, jarraituko dugu triangeluar bihurtzeko prozesuan aurrera, 1.7.6.2 atalean deskribatzen den bezala.

Gauss-en metodoa erabil daiteke sistema bat aztertzeko. Hona hemen gerta daitezkeen kasuak:

- Baldin k-garren ekuazio batean koefiziente guztiak 0 bihurtu badira (hots, $a_{k1} = a_{k2} = \ldots = a_{kn} = 0$) eta eskuineko gaia ($b_k$) ez bada 0 bihurtu, orduan sistema *bateraezina* da.
- Aurreko kasua ez bada gertatzen, sistema *bateragarria* da. Izan bedi h ekuazio ez-nuluen kopurua prozesu horren bukaeran. Orduan, bi kasu hauek gerta daitezke:
  - ▷ $h = n$ izatea, orduan sistema *bateragarri determinatua* da.
  - ▷ $h < n$ izatea, orduan sistema *bateragarri indeterminatua* da.

1.32. adibidea. Askatu sistema, Gauss-en metodoa erabiliz:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & = & 9 \\ -2x & & & - & 3z & = & -6 \\ 4x & - & 10y & + & 9z & = & 12 \end{array}$$

Ebazpena:

Sistema horri dagokion matrize zabaldua honako hau da:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -3 & -6 \\ 4 & -10 & 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Demagun $L_i = i$. lerroa dela, non $i = 1, 2, 3$.

- $a_{11} = 1$ pibotea izango da. L_1 lerroa berdin utziko dugu. Jarraian zeroak egingo ditugu a_{11}-en azpian, L_2 eta L_3 lerroak aldatuz.
  - ▷ $\overline{L}_2 = L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} L_1 = L_2 + 2L_1$ izango da, eta
  - ▷ $\overline{L}_3 = L_3 - \dfrac{a_{31}}{a_{11}} L_1 = L_3 - 4L_1$ izango da.

Horrela, matrize zabaldua beste hau bihurtuko da:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & -6 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 1 & -24 \end{bmatrix}.$$

- Orain $a_{22} = -6$ pibotea izango da. L_1 eta $\overline{L}_2$ lerroak berdin utziko ditugu. Jarraian zeroak egingo ditugu a_{22}-ren azpian, $\overline{L}_3$ lerroa aldatuz.

  ▷ $\overline{\overline{L}}_3 = \overline{L}_3 - \dfrac{a_{32}}{a_{22}}\overline{L}_2 = \overline{L}_3 + \dfrac{2}{6}\overline{L}_2$ izango da.

  Horrela, matrize zabaldua beste hau bihurtuko da:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & -6 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 8/6 & -20 \end{bmatrix}.$$

  Matrize zabaldu horri dagokion sistema sistema triangeluar hau da:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & = & 9 \\ & - & 6y & + & z & = & 12 \\ & & & & \frac{8}{6}z & = & -20 \end{array}$$

- Orain, banan-banan eta behetik gora, ezezagunak askatuko ditugu:

  ▷ 3. ekuaziotik, $z = -\dfrac{20}{8/6} = -15$ dugu,

  ▷ 2. ekuaziotik, $y = \dfrac{12-z}{-6} = \dfrac{12-(-15)}{-6} = -\dfrac{9}{2}$ dugu, eta

  ▷ 1. ekuaziotik, $x = 9+3y-2z = 9+3(-\dfrac{9}{2})-2(-15) = \dfrac{51}{2}$ dugu.

  Beraz, sistema horrek eta jatorrizko sistemak, baliokideak direnez, soluzio berbera dute: $(x,y,z) = \left(\dfrac{51}{2}, -\dfrac{9}{2}, -15\right)$. □

Beste metodo bat askatzeko sistema bat Cramer-en erregela da.

1.8.1.3. Cramer-en erregela.

Definizioa: Ekuazio linealezko sistema bat *Cramer-en motakoa* dela esaten da, baldin ekuazioen eta ezezagunen kopurua berdina bada eta koefizienteen matrizea erregularra (ez-singularra) bada. Hau da, n

ekuazio linealeko eta n ezezaguneko sistema hau Cramer-en motakoa da:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

non

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

erregularra baita (hots, $\det A \neq 0$). Ondorioz, sistema bateragarri determinatua izango da (izan ere, $h(A) = h(\widehat{A}) = n$), eta haren soluzioa honela kalkulatzen da:

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\ldots, \quad x_n = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

1.33. adibidea. Askatu sistema lineal hau Cramer-en erregela erabiliz:

$$\begin{array}{rrrcr} x & -\ 3y & +\ 2z & = & 9 \\ -2x & & -\ 3z & = & -\ 6 \\ 4x & -\ 10y & +\ 9z & = & 12 \end{array}$$

Ebazpena:

Sistema hori era matrizialean idatzia:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 4 & -10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Kasu horretan, sistema Cramer motakoa da; izan ere, ezezagunen eta ekuazioen kopurua berdina da, eta $\det A = -8 \neq 0$. Beraz, sistemaren soluzioa honako hau da:

$$x = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 9 & -3 & 2 \\ -6 & 0 & -3 \\ 12 & -10 & 9 \end{vmatrix} = \frac{51}{2}, \quad y = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ -2 & -6 & -3 \\ 4 & -12 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{9}{2},$$

$$z = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -2 & 0 & -6 \\ 4 & -10 & 12 \end{vmatrix} = -15. \quad \square$$

1.8.2. Aplikazioak: planoen eta zuzenen arteko posizioak.

1.8.2.1. $\mathbb{R}^3$-ko bi zuzenen arteko posizioak.

Izan bitez $\mathbb{R}^3$-ko zuzen hauek era parametrikoan:

$$\vec{l}_1(t) = \vec{a} + t\vec{u} \iff (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(u_1, u_2, u_3)$$
$$\vec{l}_2(t) = \vec{b} + t\vec{v} \iff (x, y, z) = (b_1, b_2, b_3) + t(v_1, v_2, v_3),$$

eta

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}, \quad \widehat{A} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \end{bmatrix}.$$

A matrizeko heinaren bidez jakingo dugu bi zuzenen norabideen posizioak. Hots,

- ▷ $h(A) = 1$ bada, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ betetzen da eta, beraz, bektoreak kolinealak dira;
- ▷ $h(A) = 2$ bada, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ ez dira kolinealak.

$\widehat{A}$ matrizeko heinaren bidez jakingo dugu $\vec{u}$, $\vec{v}$ eta $\vec{b} - \vec{a}$ bektoreen posizioa. Azken bektoreak dauka jatorria lehenengo zuzenean eta muturra bigarrenean; hau da, lotzen ditu bi zuzenak. Beraz, kasu hauek gerta daitezke:

- ▷ $h(A) = 2$ eta $h(\widehat{A}) = 3$ badira, hiru bektoreak ez daude plano berean; horrek esan nahi du bi zuzenak *gurutzatzen* direla.
- ▷ $h(A) = 2$ eta $h(\widehat{A}) = 2$ badira, $\vec{b} - \vec{a}$ bektorea beste bien konbinazio lineala da. Beraz, hirurak daude plano berean, eta $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ kolinealak ez direnez, bi zuzenek elkar *ebakitzen* dute.
- ▷ $h(A) = 1$ eta $h(\widehat{A}) = 2$ badira, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ kolinealak dira, baina ez $\vec{b} - \vec{a}$ bektorearekin. Orduan bi zuzenak *paraleloak* dira.
- ▷ $h(A) = 1$ eta $h(\widehat{A}) = 1$ badira, $\vec{u}$, $\vec{v}$ eta $\vec{b} - \vec{a}$ bektoreak kolinealak dira. Beraz, bi zuzenak *zuzen berbera* dira.

1.34. adibidea. Egiaztatu, aurreko metodoa erabiliz, bi zuzen hauek paraleloak direla: $\vec{l_1}(t) = (1, -3, -2) + t(2, 4, 1)$ eta $\vec{l_2}(t) = (3, 2, 0) + t(4, 8, 2)$.

1.8.2.2. $\mathbb{R}^3$-ko bi planoren arteko posizioak.

Izan bitez $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ eta $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ ekuazioko planoak eta matrize hauek:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

A matrizearen bidez jakin dezakegu planoetako bektore normalen arteko posizioa (hots, kolinealak diren ala ez). Horretarako $h(A)$ kalkulatuko dugu (goiko atalean bezala). Ondorioz,

- ▷ $h(A) = 2$ bada, orduan bi bektore normalak ez dira kolinealak, eta nahitaez planoek elkar *ebaki* behar dute, eta haien *ebakidura zuzen bat* da.
- ▷ $h(A) = 1$ bada, orduan bi bektore normalak kolinealak dira eta $h(\widehat{A})$-ren arabera kasu hauek gerta daitezke:

  $h(\widehat{A}) = 1$ bada, lehenengo ekuazioa lor dezakegu bigarrena zenbaki batez biderkatuz. Beraz, *plano berbera* adierazten dute.

  $h(\widehat{A}) = 2$ bada, bi ekuazioak desberdinak dira, baina bektore normalak kolinealak dira. Beraz, planoak *paraleloak* dira.

1.35. adibidea. Egiaztatu bi ekuazio hauetako planoek zuzen batean elkar ebakitzen dutela: $2x + 3y - 5z = 0$ eta $x - 4y + 6z + 3 = 0$. Kalkulatu zuzen horren ekuazio parametrikoak.

1.8.2.3. $\mathbb{R}^3$-ko planoen eta zuzenaren arteko posizioak.

Demagun $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$ planoek l zuzena determinatzen dutela. Izan bedi $a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$ ekuazioko p planoa. Ezagutzeko l-ren eta p-ren arteko posizioa, matrize hauen heina aztertuko dugu:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \widehat{A}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

A-ko lehenengo bi lerroak elkar ebakitzen duten bi planoetako bektore normalak direnez, $h(A)$ gutxienez 2 da. Ondorioz, kasu hauek gerta daitezke:

▷ $h(A)=3$ bada, hiru ekuazioko sistemak soluzio bakar bat dauka, eta 3 planoek puntu batean ebakitzen dute elkar. Beraz, *l-k eta p-k puntu bakar batean ebakitzen dute elkar.*

▷ $h(A)=2$ bada, bi kasu hauek ditugu:

$h(\widehat{A})=2$ bada, hirugarren ekuazioa (p planoarena) lor dezakegu aurreko biak konbinatuz. Horrenbestez, sistemak infinitu soluzio dauzka, eta *l zuzena p planoan dago.*

$h(\widehat{A})=3$ bada, sistemak ez dauka soluziorik. Ondorioz, *l eta p paraleloak dira.*

1.36. adibidea. Aztertu zuzen hau (egiaztatu hau):

$$\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ 2x+3y+4z+1=0, \end{cases}$$

eta $3x+5y+z+5=0$ planoaren arteko posizioa. (*Em.: Elkar ebakitzen dute* $(10,-7,0)$ *puntuan.*) □

1.9. Gainazal koadrikoak.

$\mathbb{R}^3$-an ekuazio mota hau duten gainazalak *koadrika* deitzen dira:

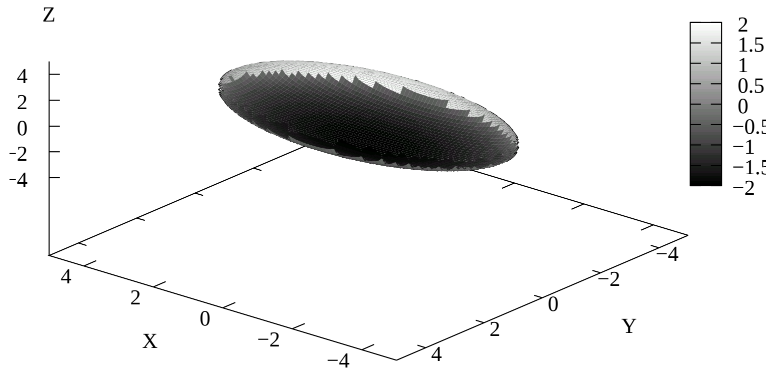
$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz \\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,$$

non a_{ij} guztiak zenbaki errealak diren.

1.9.1. Elipsoidea.

Koadrika honen ekuazio bat:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



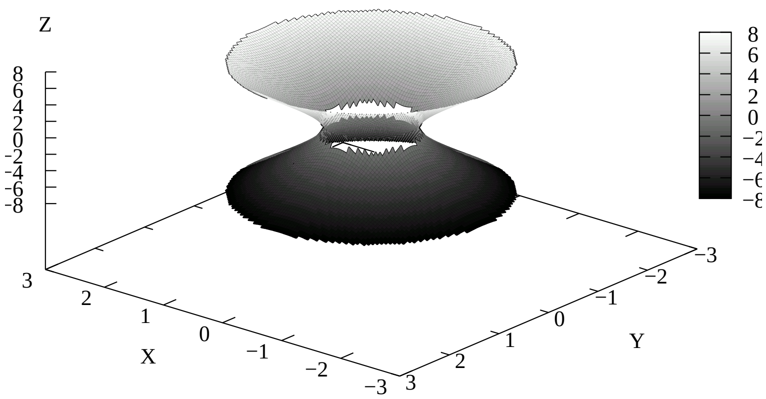
1.23. irudia. $x^2/4 + y^2/25 + z^2/4 = 1$ elipsea.

- ▷ $O(0,0,0)$-an zentratuta dago eta simetrikoa da plano koordenatuekiko.
- ▷ Ardatz koordenatuek $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ eta $(0, 0, \pm c)$ erpinetan ebakitzen dute.
- ▷ Gainazala $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$ paralelepipedoak bornatzen du.
- ▷ Plano koordenatuekiko sekzio paraleloak elipseak dira.
- ▷ a, b eta c ardatzerdien luzerak dira.
- ▷ Bi ardatzerdik luzera berdina badute, biraketa-elipsoidea da. Hiruren luzera berdina bada, esfera bat dugu.

1.9.2. Hiperboloide azalbakarra.

Koadrika honen ekuazio bat:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



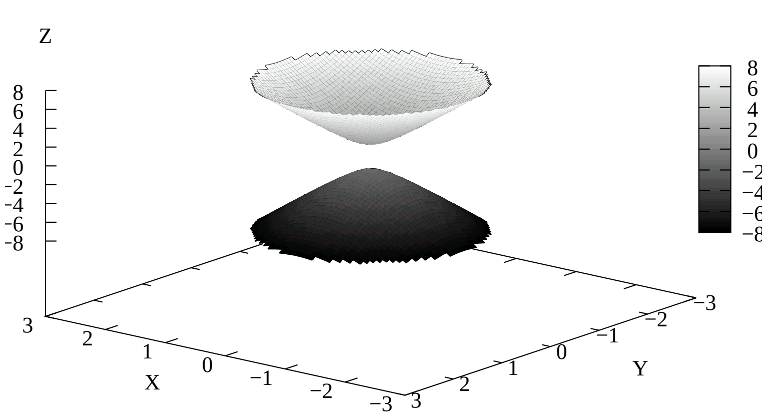
1.24. irudia. $x^2/0.4 + y^2/0.4 - z^2/8 = 1$ hiperboloide azalbakarra.

- ▷ $O(0,0,0)$-an zentratuta dago eta simetrikoa da plano koordenatuekiko.
- ▷ Ardatz koordenatuek $(\pm a, 0, 0)$ eta $(0, \pm b, 0)$ erpinetan ebakitzen dute.
- ▷ Ez da bornatua.
- ▷ xy planoarekiko sekzio paraleloak elipseak dira.
- ▷ xz eta yz planoekiko sekzio paraleloak hiperbolak dira.
- ▷ $a = b$ bada, biraketa-hiperboloidea dugu.

1.9.3. Azalbiko hiperboloidea.

Koadrika honen ekuazio bat hau da:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



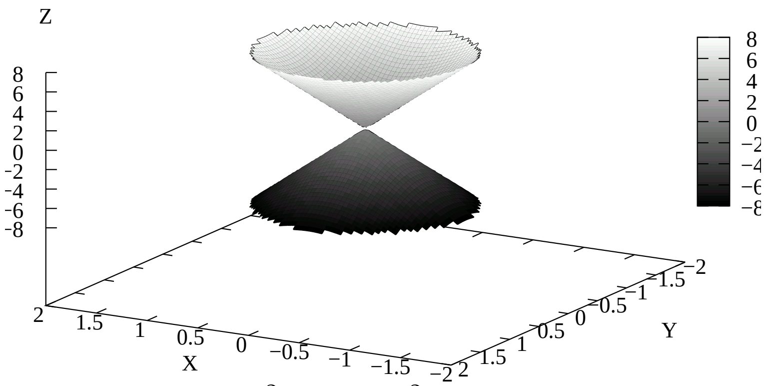
1.25. irudia. $x^2/0.08 + y^2/0.08 - z^2/2 = -1$ azalbiko hiperboloidea.

- ▷ Gainazalak bi zati ditu: bata $z \geq c$ denean eta bestea $z \leq -c$ denean
- ▷ $O(0,0,0)$-an zentratuta dago eta simetrikoa da plano koordenatuekiko.
- ▷ x ardatzak $(0,0,\pm c)$ erpinetan ebakitzen du.
- ▷ Ez da bornatua.
- ▷ xy planoarekiko sekzio paraleloak elipseak dira.
- ▷ xz eta yz planoekiko sekzio paraleloak hiperbolak dira.
- ▷ $a = b$ bada, biraketa-hiperboloidea dugu.

1.9.4. Konoa.

Koadrika honen ekuazio bat:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2.$$



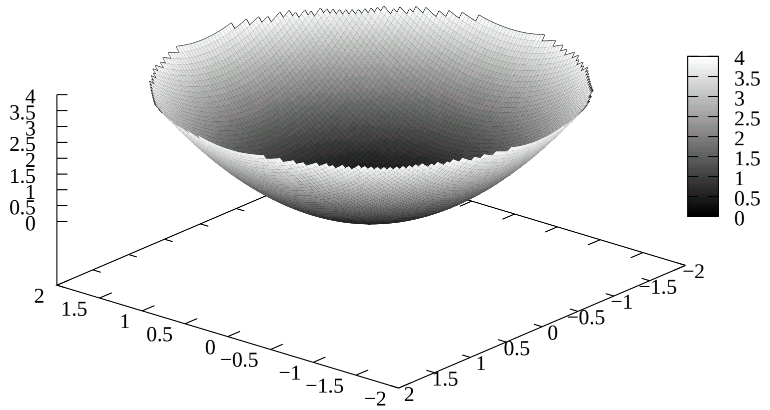
1.26. irudia. $\dfrac{x^2}{(1/8)^2} + \dfrac{y^2}{(1/6)^2} = z^2$ konoa.

- ▷ Gainazalaren erpina $O(0,0,0)$ da.
- ▷ Simetrikoa da plano koordenatuekiko.
- ▷ Ez dago bornatuta.
- ▷ xy planoarekiko sekzio paraleloak elipseak dira.
- ▷ xy planoarekiko ebakidura $O(0,0,0)$ da.
- ▷ xz eta yz planoekiko ebakidurak $z = \pm x/a$ eta $z = \pm y/b$ dira, hurrenez hurren.
- ▷ $a = b$ bada, biraketa-konoa dugu.

1.9.5. Paraboloide eliptikoa.

Koadrika honen ekuazio bat:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$



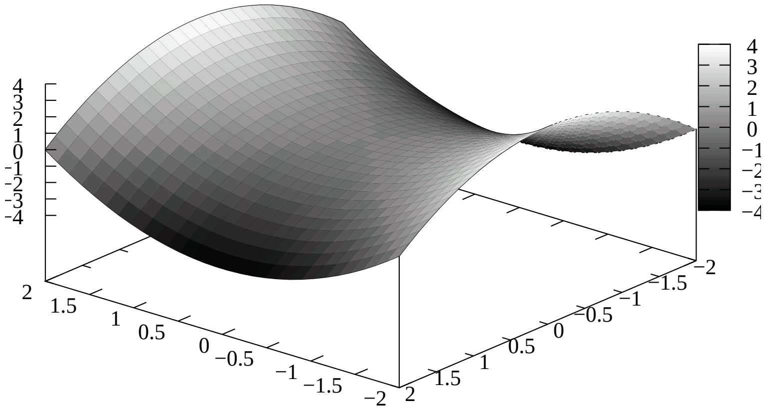
1.27. irudia. $x^2 + y^2 = z$ paraboloide eliptikoa.

- ▷ Gainazalaren erpina $O(0, 0, 0)$ da, eta xy planoaren gainetik dago.
- ▷ Simetrikoa da xz eta yz plano koordenatuekiko, beraz z ardatzarekiko ere bai.
- ▷ Ez dago bornatuta.
- ▷ xy planoarekiko sekzio paraleloak elipseak dira.
- ▷ xy planoarekiko ebakidura $O(0, 0, 0)$ da.
- ▷ xz eta yz planoekiko ebakidurak parabolak dira.
- ▷ $a = b$ bada, biraketa-paraboloidea da.

1.9.6. Paraboloide hiperbolikoa.

Koadrika honen ekuazio bat:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$



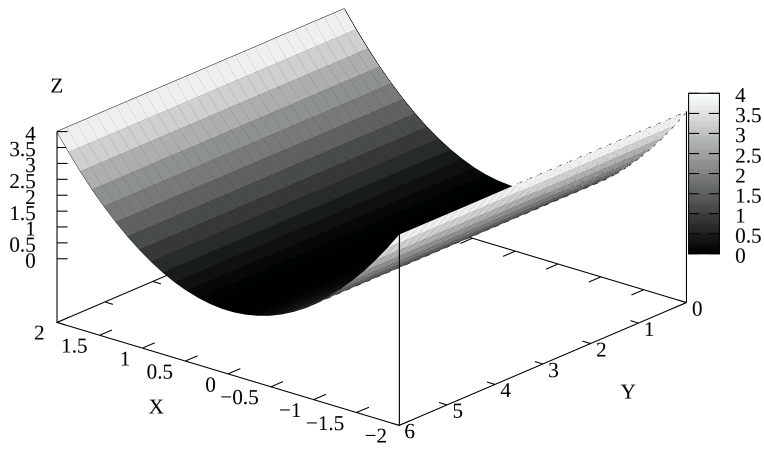
1.28. irudia. $x^2 - y^2 = z$ paraboloide hiperbolikoa.

- ▷ Simetrikoa da xz eta yz plano koordenatuekiko, beraz, z ardatzarekiko ere bai.
- ▷ Ez dago bornatuta.
- ▷ xy planoarekiko sekzio paraleloak hiperbolak dira.
- ▷ xz eta yz planoekiko sekzio paraleloak parabolak dira.
- ▷ O koordenatu-jatorria minimo puntua da xz planoarekiko ebakidurarako. Hots, $z = \frac{x^2}{a^2}$ parabolarako.
- ▷ O koordenatu-jatorria maximo puntua da yz planoarekiko ebakidurarako. Hots, $z = -\frac{y^2}{b^2}$ parabolarako.
- ▷ Hori dela eta, O puntua *minimax* edo *zeladura-puntu* deitzen da.

1.9.7. Zilindro parabolikoa.

Koadrika honen ekuazio bat:

$$x^2 = 4cz.$$

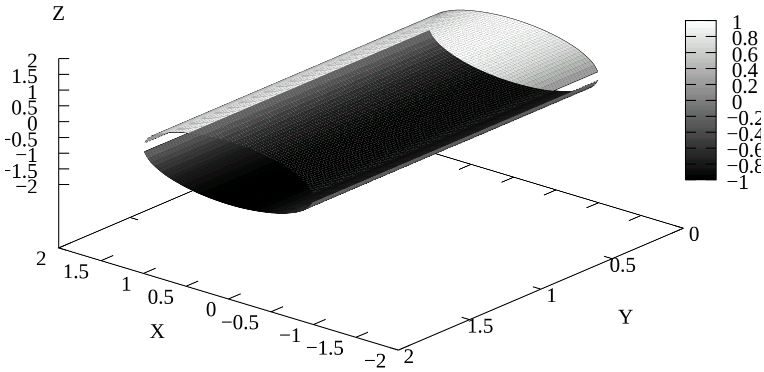


1.29. irudia. $x^2 = z$ zilindro parabolikoa.

1.9.8. Zilindro eliptikoa.

Koadriko honen ekuazio bat:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

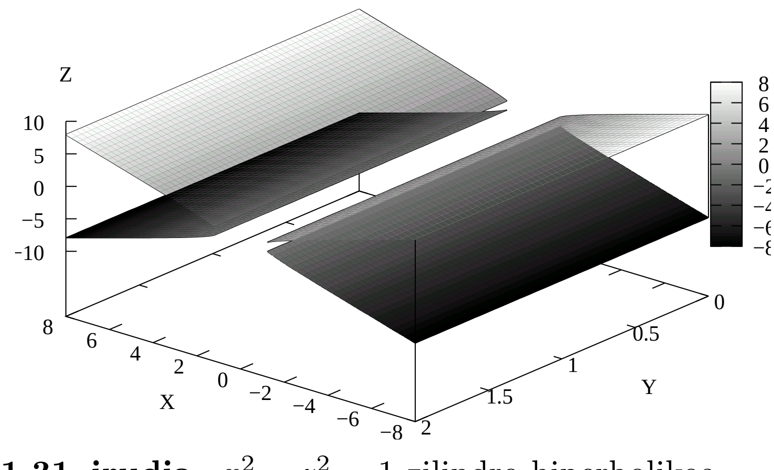


1.30. irudia. $x^2 + z^2 = 1$ zilindro eliptikoa.

1.9.9. Zilindro hiperbolikoa.

Koadriko honen ekuazio bat:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$



1.31. irudia. $x^2 - z^2 = 1$ zilindro hiperbolikoa.