## 4. gaiari buruzko autoebaluazioaren ebazpena

1. Demagun ondoko lehenengo ordenako ekuazio diferentziala. Bere adierazpenetik lor dezakezun informazio osoa kontutan hartuz, erantzun itzazu $y(x)$ soluzioari buruzko galdera hauek:

$$y' = -\frac{2xy}{2x^2 + y^2}$$

a) Froga ezazu aurreko ekuazio diferentzialak aldagai bakar baten funtziopeko faktore integratzailea onartuko duela ekuazio zehatza bihurtzeko eta horren laguntzaz aska ezazu ekuazioa eta aurki ezazu bereziki $(1, -1)$ puntutik pasatzen den soluzioa.

*Ebazpena.* Idatz dezagun ekuazio zehatzaren eraz,

$$2xy\ dx + (2x^2 + y^2)\ dy = 0.$$

Orduan $f(x, y)$ funtzioa existituko litzateke non $\partial f/\partial x = M = 2xy$ eta $\partial f/\partial y = N = 2x^2 + y^2$ diren eta soluzioek $f(x, y) = K$ beteko lukete. Baina beharrezko baldintza ez dela betetzen erraz ikuz dezakegu,

$$\frac{\partial M}{dy} = 2x \neq 4x = \frac{\partial N}{dx}.$$

Saia gaitezen $\mu(x)$ edo $\mu(y)$ faktor integratzaileak asmatzen, ea ekuazio zehatza bihurtzeko aukera daukagun:

$$\mu = \mu(x): \qquad \mu(x)2xy\ dx + \mu(x)(2x^2 + y^2)\ dy = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial(\mu(x)M)}{dy} = 2x\mu \qquad \text{eta} \qquad (2x^2 + y^2)\mu' + 4x\mu = \frac{\partial(\mu(x)N)}{dx}.$$

Orduan $\mu(x)$ funtzioak ondoko ekuazio diferentziala bete beharko luke,

$$(2x^2 + y^2)\mu' = -2x\mu \Longleftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2x}{2x^2 + y^2}.$$

Berdintza honek ez dauka zentzurik eskubialdeko gaia $y$-ren menpean baitago. Saia gaitezen $\mu(y)$ faktor integratzailearekin

$$\mu = \mu(y): \qquad \mu(y)2xy\ dx + \mu(y)(2x^2 + y^2)\ dy = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial(\mu(y)M)}{dy} = 2xy\mu' + 2x\mu \qquad \text{eta} \qquad 4x\mu = \frac{\partial(\mu(x)N)}{dx}.$$

Orain badaukagu $\mu(y)$-rako ekuazio diferentzial bateragarria,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{y} \Longrightarrow \ln|\mu| = \ln|y| + k$$

$k = 0$ aukerarik errazena hartuko dugu eta $\mu(y) = y$ faktore integrazailea agertu zaigu. Beronen laguntzaz ekuazioa zehatza bihur dezakegu,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy = y \cdot 2xy\;dx + y \cdot (2x^2 + y^2)\;dy = 0 \Longrightarrow$$

$$f(x,y) = \int 2xy^2\;dx = x^2y^2 + h_1(y),$$

eta orain $y$-rekin deribatuz

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + h_1'(y) = 2x^2y + y^3 \Rightarrow h_1' = y^3 \Rightarrow h_1 = \frac{y^4}{4} + K.$$

Beraz soluzioa era inplizitoan $f(x,y) = x^2y^2 + \dfrac{y^4}{4} = K$ edo esplizituan idatz dezakegu,

$$y = \pm\sqrt{\frac{-4x^2 \pm \sqrt{16x^4 + 16K}}{2}} = \pm\sqrt{-2x^2 \pm \sqrt{4x^4 + 4K}}.$$

Atal hau bukatzeko $(1,-1)$ puntutik pasatzen den soluzio berezia aurkitzeko soluzioaren $x^2y^2 + y^4/4 = K$ adierazpen inplizitoan ordezkapena burutuko dugu,

$$1 \cdot 1 + \frac{1}{4} = K \Longrightarrow K = \frac{5}{4} \Longrightarrow y = -\sqrt{-2x^2 + \sqrt{4x^4 + 5}}$$

b) Soluzioaren deribatua kalkulatu gabe, froga ezazu aurreko atalean lortutako soluzioak $x = 0$ puntuan minimoa daukala eta baliozta ezazu funtzioa puntu horretan.

*Ebazpena.* Ekuazio diferentzialaren soluzioa $y(x)$ funtzioa da, beraz bere maximoetan eta minimoetan, zera beteko du $y' = dy/dx = 0$ eta honek esan nahi du ekuazioaren eskubialdea 0 izan behar duela,

$$-\frac{2xy}{2x^2 + y^2} = 0 \Longrightarrow 2xy = 0$$

eta hau noski $x = 0$ puntuan beteko da derrigorrez. Are gehiago, $x = 0$ puntuan minimoa bada, orduan funtzioak $y''(0) = d^2y/dx^2 < 0$ beteko du eta ganbilaren itxura erakustsiko du, beraz

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{2xy}{2x^2 + y^2}\right) = -\frac{(2y + 2xy')(2x^2 + y^2) - (4x + 2yy')2xy}{(2x^2 + y^2)^2}.$$

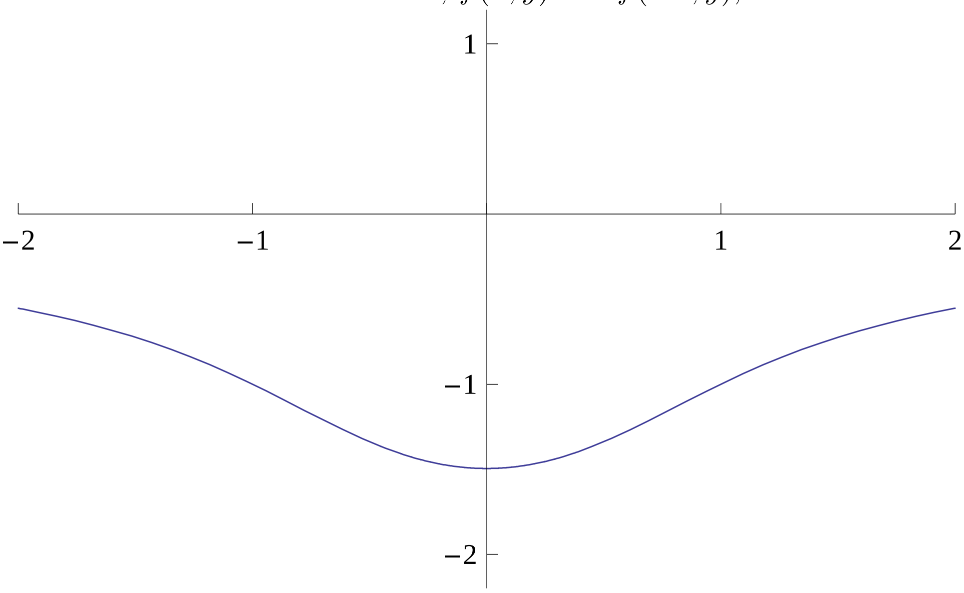
Bigarren deribatu honen balioa $x = 0$ puntuan aztertzen ari garenez, $x$ biderkagaia daramaten gai guztiak ezaba ditzakegu eta honako adierazpen hau baino ez da geratuko,

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = -\frac{2y^3}{y^4} = -\frac{1}{y}.$$

Baina aurreko atalean ikusi dugunez, soluzioa $(1,-1)$ puntutik pasatzeko $y$-ren adierazpena erro karratuaren zeinu negatiboa aukeratu behar dugu $(-)$, beraz $y$ negatiboa da eta ondorioz $-1/y > 0$ positibo da eta funtzioa ganbila da. Beraz $x = 0$ puntua minimoa da.

c) Orain arte eskuratutako $(1, -1)$ puntutik pasatzen den soluzioaren informazio osoa erabiliz, marraz ezazu funtzioaren grafikoa.

*Ebazpena.* Hona hemen $(1, -1)$ puntutik pasatzen den soluzioaren antza, funtzioak $x = 0$ balioan minimoa daukala eta malda $X$ ardatzarekiko antisimetrikoa dela kontutan hartuz, $f(x, y) = -f(-x, y)$,




d) Froga ezazu ekuazioa ere homogeneoa dela. Ekuazio mota hau askatzeko teknika erabiliz kalkula ezazu ekuazioaren soluzio guztiak.

*Ebazpena.* Froga dezagun ekuazio diferentzial homogeneoa dela,

$$f(x, y) = -\frac{2xy}{2x^2 + y^2} \Longrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = -\frac{2\lambda^2 xy}{2\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = -\frac{2xy}{2x^2 + y^2} = f(x, y)$$

Beraz $u = y/x \Leftrightarrow y = xu,\ y' = u + xu'$ aldagai aldaketa hartuko dugu eta ondorioz ekuazioa $u$-ren funtziopean honela geratuko da,

$$y' = u + xu' = -\frac{2x^2 u}{2x^2 + x^2 u^2} = -\frac{2u}{2 + u^2} \Rightarrow xu' = -\frac{2u}{2 + u^2} - u = -\frac{4u + u^3}{2 + u^2}$$

eta hau aldagai banatuetakoa denez, soilik behin integratu behar dugu bere soluzio orokorra eskuratzeko:

$$\int \frac{2 + u^2}{4u + u^3}\, du = \int \frac{1}{2u}\, du + \int \frac{u}{2(4 + u^2)}\, du = \frac{1}{2} \ln|u| + \frac{1}{4} \ln|4 + u^2|,$$

$$\int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln|x| + K = \ln|x|^{-1} + K.$$

Orain $u = y/x$ aldagai aldaketa deseginez soluzio orokorra era inplizitoan idatz dezakegu,

$$\ln\left|(y/x)^{1/2}\big(4 + (y/x)^{1/4}\big)\right| = \ln|x|^{-1} + K \Longrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} \left(4 + \left(\frac{y}{x}\right)^{1/4}\right) = \frac{K}{x}.$$

Arazo handirik gabe, soluzio hau eta (a) atalarena ados daudela ziurta daiteke.

Guzti honetaz gain, ekuazioaren soluzioa $y = 0$ dela erraz berretsi genezake ekuazioaren adierazpena begiratuz.

2. Demagun lehenengo ordenako ekuazio diferentzial hau:

$$\frac{2y}{x}\ dx + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)\ dy = 0$$

Erantzun itzazu ondoko galderak:

a) Ekuazioa askatu gabe, ba al daude oreka soluziorik (betirako $y(x) = K$ konstanteak diren soluzioak)?

*Ebazpena.* Atal honi erantzuna emateko, ekuazioaren bigarren adierazpena erabiltzea komeni zaigu. Hemen $y = 0$ funtzioa soluzio konstantea dela (edo oreka soluzioa beti malda=0 baitauka) erraz berretsi dezakegu, $y = 0$ balioetan ekuazioaren eskubialdea ezabatzen da eta $y' = 0$ beteko delako.

b) Aurki ezazu ekuazioa zehatza bihurtzen duen $\mu(x, y) = x^n y^m$ faktor integratzailea $n$ eta $m$ berretzaile bereziekin eta ebatzi ezazu ekuazioa horren laguntzaz.

*Ebazpena.* Kasu honetan ekuazioaren lehenengo adierazpena erabiltzea komeni zaigu eta honi $\mu(x, y) = x^n y^m$, $n$ eta $m$ ezezagunen menpeko faktor integratzailea eranstea,

$$x^n y^m \frac{2y}{x}\ dx + x^n y^m \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)\ dy = 0 \Longleftrightarrow$$

$$2x^{n-1}y^{m+1}\ dx + \left(x^{n-2}y^{m+2} - x^n y^m\right)\ dy = 0.$$

Orain $\mu M = 2x^{n-1}y^{m+1}$ eta $\mu N = x^{n-2}y^{m+2} - x^n y^m$ dira eta ekuazio zehatza izateko bete behar duen baldintza, $\partial(\mu M)/\partial y = \partial(\mu N)/\partial x$,

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = 2(m+1)x^{n-1}y^m = (n-2)x^{n-3}y^{m+2} - nx^{n-1}y^m = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Berdintzaren bi aldeak $(x, y)$ puntu guztietan berdinak izateko $x^i y^j$ berredura bereko batugaien koefizienteak derrigorrez berdinak izan behar dute. Baieztapen honek ondoko baldintzak halabehartuko ditu:

$$\begin{cases} x^{n-1}y^m : & 2(m+1) = -n, \\ x^{n-3}y^{m+2} : & 0 = n - 2. \end{cases}$$

Sistema honen soluzioa $n = 2$ eta $m = -2$ da eta faktor integratzailea $\mu(x, y) = x^2 y^{-2}$. Orain ekuazio zehatza erakutsiko dugu,

$$x^2 y^{-2}\frac{2y}{x}\ dx + x^2 y^{-2}\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)\ dy = 2xy^{-1}\ dx + \left(1 - x^2 y^{-2}\right)\ dy = 0.$$

Ekuazio hau $f(x, y) = K$ kurbatik dator, non $\partial f/\partial x = 2xy^{-1}$ eta $\partial f/\partial y = (1 - x^2 y^{-2})$ diren. Bi gai hauetatik lehenengoa da errazena integratzeko,

$$f(x, y) = \int 2xy^{-1}\ dx = \frac{x^2}{y} + h_1(y).$$

Orain $y$-rekin deribatuko dugu $\partial f/\partial y$ bigarren batugaiarekin konparatzeko,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + h_1'(y) = 1 - \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow h_1'(y) = 1 \Rightarrow h_1(y) = y.$$

Soluzioa $f(x,y) = x^2/y + y = K \Longleftrightarrow y^2 - Ky + x^2 = 0$ kurbaren bitartez adieraz dezakegu edo esplizituki

$$y = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4x^2}}{2}$$

c) Berretsi ezazu ekuazioa ere baita homogeneoa dela eta ebatzi ezazu ekuazio mota hauei aplikatzen zaien teknikaz. Aurki ezazu $(2,1)$ puntutik pasatzen den soluzio berezia eta $(0,0)$ puntutik pasatzen diren bi soluzio.

*Ebazpena.* Ekuazio diferentzial homogeneoen egiaztapena honetan datza,

$$f(x,y) = \frac{2y/x}{1 - y^2/x^2} \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda y/\lambda x}{1 - \lambda^2 y^2/\lambda^2 x^2} = \frac{2y/x}{1 - y^2/x^2} = f(x,y)$$

Beraz $u = y/x \Leftrightarrow y = xu,\ y' = u + xu'$ aldagai aldaketa hartuko dugu eta ondorioz ekuazioa $u$-ren funtziopean honela geratuko da,

$$y' = u + xu' = \frac{2u}{1-u^2} \Longrightarrow u' = \frac{1}{x}\left(\frac{2u}{1-u^2} - u\right) = \frac{1}{x}\frac{u^3+u}{1-u^2}$$

Hau aldagai banatuetakoa da eta alde bakoitzari dagokion aldagaiarekin integratu baino ez dugu egin behar ekuazioaren soluzioa eskuratzeko,

$$\int \frac{1-u^2}{u^3+u}\,du = \int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{2u}{u^2+1}\,du = \ln|u| - \ln|u^2+1| = \ln|\frac{u}{u^2+1}|,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + K_1.$$

Emaitz honek $u/(u^2+1) = K_1 x$ berdintza ondorioztatu digu, baina benetako soluzioa berreskuratzeko $u = y/x$ aldagai aldaketa irauli beharko dugu

$$\frac{y/x}{y^2/x^2+1} = K_1 x \Longleftrightarrow \frac{y}{y^2+x^2} = K_1 \Rightarrow y^2 - \frac{1}{K_1}y + x^2 = 0.$$

Kasu honetan $1/K_1$ integrazio konstanteak aurreko atalean agertu den $K$-ren tokia hartu du.

Ariketa amaitzeko, $(2,1)$ puntutik pasatzen den soluzio berezia aurkitu behar dugu eta horretarako soluzioan ordeztuko dugu puntua,

$$1^2 - \frac{1}{K_1}\cdot 1 + 2^2 = 0 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow y^2 - 5y + x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 - \sqrt{25 - 4x^2}}{2}$$

Hemen 2. mailako ekuazioa askatzeko orduan $(-)$ zeinu negatiboa aukeratu dugu $(2,1)$ puntutik pasatzearen baldintza bete ahal izateko. Soluzio hau bakarra da, berriz $(0,0)$ puntutik pasatzen den soluzio bat baino gehiago aurki ditzakegu, adibidez:

$$y(x) = 0 \quad \text{eta} \quad \text{edozein} \quad y(x) = \frac{K - \sqrt{K^2 - 4x^2}}{2}, \quad K \in \mathbb{R},$$

$$\text{adibidez} \quad y(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2}.$$

3. Erantzun itzazu lehenengo ordenako ekuazio diferentzialari buruzko galdera hauek:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy + y^2}$$

a) Aurki ezazu ekuazio zehatza bihurtzen duen $\mu(x,y) = \mu(y/x)$ faktor integratzailea eta horren laguntzaz ebatzi ezazu ekuazioa.

*Ebazpena.* Ekuazio diferentziala ez dela zehatza erraz berretsi daiteke, baina zorionez zehatza bihur daiteke faktor integratzailearen eskutik. Faktorearen egitura eman digute, $\mu(x,y) = \mu(y/x)$, eta hau aztarna garrantsitsua da bere deribatu partzialak kalkulatzeko. Are gehiago, $z = y/x$ aldagai aldaketa hartuz $\mu(y/x) = \mu(z)$ idatz dezakegu eta baldin $\mu$-ri dagokion ekuazio diferentziala $z$-ren menpekoa bada, orduan bere adierazpena ondoriozta ahal izango dugu. Bedi

$$\mu(z)y^2 \; dx - \mu(z)(xy + y^2) \; dy = 0.$$

Ekuazio hau zehatza izateko ondoko berdintza bete beharko da

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(z)y^2\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big( - \mu(z)(xy + y^2)\big).$$

Une honetan $\partial z/\partial x = -y/x^2$ eta $\partial z/\partial y = 1/x$ direla kontutan hartu behar dugu. Emaitz hauek aurreko ekuazioan sartuko ditugu eta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\big(\mu y^2\big) = y^2\dfrac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial (y^2)}{\partial y} = y^2\dfrac{d\mu}{dz}\dfrac{\partial z}{\partial y} + 2y\mu = \dfrac{y^2}{x}\mu' + 2y\mu, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}\big( - \mu(xy + y^2)\big) = -(xy + y^2)\dfrac{\partial \mu}{\partial x} - \mu\dfrac{\partial (xy + y^2)}{\partial x} = \dfrac{xy^2 + y^3}{x^2}\mu' - y\mu. \end{cases}$$

Ekuazio zehatza izateko bete beharreko baldintza honela idatziko dugu,

$$\frac{y^2}{x}\mu' + 2y\mu = \frac{xy^2 + y^3}{x^2}\mu' - y\mu.$$

Batugaiak berrordenatuz eta adierazpena sinplifikatuz,

$$\frac{y^2}{x^2}\mu' = 3\mu \iff z^2\mu'(z) = 3\mu(z) \Longrightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = 3\int \frac{dz}{z^2} \Longrightarrow$$

$$\ln|\mu| = -\frac{3}{z} + K_1 \Longrightarrow \mu = K_1 e^{-3/z} = K_1 e^{-3x/y}.$$

Kalkulatutako faktor integratzailerik arruntena $\mu = e^{-3x/y}$ da eta horren laguntzaz hasierako ekuazio diferentzial zehatza $f(x,y) = K$ bihurtuko dugu. Ebazpena honela egingo dugu,

$$f = \int \left(e^{-3x/y}y^2\right)\ dx = -\frac{y^3}{3}e^{-3x/y} + h_1(y).$$

Emaitz hau ekuazioaren $\partial f/\partial y = \mu N$ baldintzarekin konparatuko dugu

$$\frac{\partial f}{y} = -y^2e^{-3x/y} - xye^{-3x/y} + h_1'(y) = -(xy+y^2)e^{-3x/y} \Rightarrow h_1'(y) = 0 \Rightarrow h_1 = K.$$

Amaieran ekuazioaren soluzioa kurba hauetaz emango dugu,

$$f(x,y) = -\frac{y^3}{3}e^{-3x/y} = K.$$

b) Zeintzuk dira ekuazio diferentzialaren aldagai askea eta menpeko aldagaia? Froga ezazu aldagai askea eta menpeko aldagaia elkarren artean ordezkatzen badituzu, orduan ekuazioa lineala agertuko dela. Ebatzi ezazu ekuazio lineala.

*Ebazpena.* Aurreneko atalean menpeko aldagaitzat $y$ eta aldagai asketzat $x$ hartu ditugu, baina alderantzizko funtzioa hartuko bagenu, hau da, $y = y(x)$ hartu ordez, $x = x(y)$, non $x(y) = y^{-1}$ funtzioa den, orduan $x$-ren deribatuak $y$-rekin $x'(y),\ x''(y), ...$ izango lirateke eta ekuazioaren idazkera honela dio

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{xy+y^2}{y^2} = \frac{x}{y} + 1 \Longleftrightarrow x' - \frac{1}{y}x = 1.$$

Azken ekuazio honen soluzioa teorian ikasitako formularen bidez adieraz dezakegu,

$$x(y) = e^{\int 1/y\ dy}\left(\int 1 \cdot e^{-\int_{y_0}^{y} 1/z\ dz}\right)\ dy = y(\ln|y| + K).$$

4. Aurki ezazu $y = g(x)$ funtzioa, non haren grafikoaren ukitzailea $(x,y)$ puntu bakoitzean $(-y,x)$ koordenatuko puntutik pasatzen den.

   *Ebazpena.* Har dezagun $y = g(x)$ funtzioa problemaren soluziotzat. Honen ukitzailearen gaineko baldintza ezartzen badugu $\big(x, y(x)\big)$ koordenatuko puntu bakoitzean, orduan soluzioaren deribatua $y'$ parte hartu beharko du eta osagarri horiek lotzen dituen adierazpena ekuazio diferentzial hau izango da,

$$\text{funtzioaren malda} = y'(x) = \frac{y(x) - x}{x - \big(-y(x)\big)} = \frac{y(x) - x}{y(x) + x}.$$

   Noski, $\big(x, y(x)\big)$ puntutik pasatzen den kurbaren ukitzailearen malda $y'(x)$ da eta gainera $\big(-y(x), x\big)$ puntutik pasako da. Malda balioztatzeko dauzkagun bi adierazpenak berdinduz aurreko ekuazioa daukagu. Ekuazio hori aldagai homogeneoa da eta $u = y/x \Leftrightarrow y = xu,\ y' = u + xu'$ aldagai aldaketak ebazpenean lagunduko digu,

$$u + xu' = \frac{u-1}{u+1} \Longrightarrow u' = \frac{1}{x}\frac{-u^2-1}{u+1}.$$

Azken ekuazio hau aldagai banatuetakoa da eta alde bakoitzari dagokion aldagaiarekin integratuz,

$$\int -\frac{u+1}{u^2+1}\, du = -\frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \arctan u,$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + K.$$

Eskatutako funtzio edo kurbaren ekuazioa era inplizitoan hau da,

$$-\frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \arctan u = \ln|x| + K \Longleftrightarrow \ln\sqrt{u^2+1} + \arctan u = -\ln|x| - K$$

5. Murriz ezazu ondoko 2. ordenako ekuazio diferentzialaren ordena eta gero aurkitu haren soluzioa:

$$yy'' - (y')^2 = y^2y'$$

*Ebazpena.* Adierazpen honetan ez da agertzen $x$ aldagai askea, $y$ aldagai menpekoa eta beronen deribatuak baizik, $yy'' - (y')^2 = y^2y'$. Beraz, ekuazioa 2. ordenetik 1. ordenera murrizteko, hobe da $y$ aldagai asketzat hartzea eta $y'$ eta ondorengo deribatuak $y$-ren menpeko funtziotzat idaztea. Hau egin dezakegu $y = g(x)$ funtzioaren alderantzizkoa kontutan hartuz $x = g^{-1}(y)$ korrespondentzia baitago eta ondorioz $x$ aldagaia ere $y$-ren menpean idatz dezakegulako. Horregatik $y'$, $y''$ edo $x$-ren menpeko edozein funtzioa baita $y$-ren menpean adieraz daitezke. Demagun $p(y) = y'$ izendatzea, orduan beronen deribatua $y$-rekin honela kalkula daiteke,

$$y' = p(y) \Longrightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy}y' = p'p.$$

Orain jatorrizko ekuazioa 1.go ordenako ekuaziotzat idatz dezakegu $p(y)$ menpeko aldagairako,

$$yp'p - p^2 = y^2p \Longrightarrow p' - \frac{p}{y} = y.$$

Ekuazio hau lehenengo ordenako lineala da eta zuzenean teorian ikusitako ebazteko formula aplika dezakegu,

$$p(y) = e^{\int 1/y\ dy}\left(\int ye^{-\int_{y_0}^{y} 1/z\ dz}\ dy\right) = y(y + K_1) = y^2 + K_1y.$$

Eskatutako soluzioa lortzeko oraindik $p(y) = y'$ aldaketa desegin behar dugu eta $y' = y^2 + K_1y$ aldagai banatuetako ekuazio diferentziala halabehartuko du,

$$\int \frac{dy}{y^2 + K_1y} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{K_1}\ln\frac{y}{y+K_1} = x + K_2 \Rightarrow y = \frac{K_1K_2e^{K_1x}}{1 - K_2e^{K_1x}}$$

Hasieratik pentsa genezakeen moduan 2. ordenako ekuazioaren soluzio orokorra $K_1$ eta $K_2$ integrazio bi konstanteen menpekoa izango da.

6. Aska ezazu ondoko 2. ordenako koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial lineala:

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$$

*Ebazpena.* Lehenengo urratsa koefiziente konstantedun ekuazio linealaren soluzio orokorra aurkitzea da, $y_h$, eta gero ekuazio osoaren soluzio berezi bat, $y_p$, *konstanteen aldakuntzaren metodoaren* bidez. Ekuazio homogeneoa eta $y(x) = e^{\lambda x}$ soluzio motari dagokion ekuazio karakteristikoa hauek dira,

$$y''' - y'' + y' - y = 0, \qquad y(x) = e^{\lambda x}: \quad R(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Azken ekuazio honen erroa $\lambda_1 = 1$ dela erraz ikusiko dugu eta gero Ruffini-ren arauaren bidez baita beste bi erroak $\lambda_2 = i$ eta $\lambda_3 = -i$ direla ondoriozta dezakegu. Beraz, ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra hau da,

$$y_h(x) = K_1 e^x + K_2 \cos x + K_3 \sin x.$$

Orain gai ezhomogeneoa bigarren mailako $f(x) = x^2 + x$ polinomioa da eta konstanteen aldakuntzaren metodoaren ereduaren barruan sartzeko modu honetaz idatz dezakegu

$$f(x) = e^{\alpha x}\big(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x)\big) =$$

$$e^{0\cdot x}(x^2 + x)\big(1 \cdot \cos(0 \cdot x) + 1 \cdot \sin(0 \cdot x)\big),$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad P_n(x) = Q_n(x) = x^2 + x \Rightarrow n = m = 2 \Rightarrow k = \max\{n, m\} = 2.$$

Hemen $0 = \alpha + i\beta$ ez da $M(\lambda)$ polinomio karakteristikoaren erroa, beraz $s = 0$ berretzailea hartuko dugu ereduak finkatzen duen soluzio bereziaren egituran:

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}\big(\overline{P}_k(x)\cos(\beta x) + \overline{Q}_k(x)\sin(\beta x)\big) = \overline{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Ariketa honetan $\beta = 0$ izateak eragiketa errazagoak ondorioztatu ditu $\sin 0 = 0$ eta $\cos 0 = 1$ direlako. Horregatik soilik $\overline{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ polinomio ezezaguna geratuko zaigu finkatzeko. Polinomioaren adierazpena zein haren deribatuenak ekuazio diferentzial osoan sartzen baditugu,

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C, \quad y_p'(x) = 2Ax + B, \quad y_p''(x) = 2A, \quad y_p'''(x) = 0,$$

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x \Longleftrightarrow 0 - 2A + 2Ax + B - (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -A = 1, \\ 2A - B = 1, \\ -2A + B - C = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = -3, \\ C = -1 \end{cases}$$

Orain ekuazio osoaren soluzioa eraikitzeko osagai guztiak batuko ditugu

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K_1 e^x + K_2 \cos x + K_3 \sin x - x^2 - 3x - 1.$$