3. gaiari buruzko autoebaluazioaren ebazpena

1. Aurkitu $f(x,y) = (y \sin x)^{1/2}$ funtzioaren existentzi eremua.

Ebazpena: $y \geq 0$ eta $\sin x \geq 0$, edo $y \leq 0$ eta $\sin x \leq 0$.

Beraz, existentzi eremua honako hau da:
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \text{ eta } y \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z}\} \cup$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \text{ eta } y \leq 0, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Kalkula ezazu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

Ebazpena: Limite erradialak kalkulatzen ditugu, hau da $y = mx$ denean:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{1+m^2} = 0$$
Egiaztatzeko limitea zero dela maiorantearen baldintza nahikoa erabiliko dugu:
$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right| = |y| = |y-0|$$
eta $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$, beraz, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

3. Aztertu funtzio honen jarraitasuna:
$$f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \quad \text{bada} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \quad \text{bada.} \end{cases}$$

Ebazpena: Funtzio hau $(x,y) \neq (0,0)$ puntuetan jarraitua da, izan ere bera osatzen duten funtzioak jarraituak baitira holako puntuetan.
Beraz, bakarrik aztertu behar dugu bere jarraitasuna $(0,0)$ puntuan. Horretarako honako hau bete behar da:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = f(0,0) = 0 \ .$$

Limite hau kalkulatzeko koordenatu polarrak erabiliko ditugu. $x = \rho\cos\theta$ eta $y = \rho\sin\theta$ berdintzak erabiliz zera dugu:
$$\left| y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \rho\sin\theta \frac{(\rho^2\cos^2\theta) - (\rho^2\sin^2\theta)}{\rho^2} \right| = |\rho| \cdot \left| \sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \right| \leq |\rho|$$
eta $\lim\limits_{\rho\to 0^+} \rho = 0$ denez, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Hortaz, $f(x,y)$ jarraitua da $\mathbb{R}^2$ osoan.

4. Aztertu funtzio honen jarraitasuna, deribatu partzialen existentzia eta diferentziagarritasuna O koordenatu-jatorrian:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \quad \text{bada} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada} \end{cases}$$

Ebazpena: $(x,y) \neq (0,0)$ jarraitua da, funtzio jarraituek osatuta baitago eta zatitzaileak ez du zero balioa hartzen.
Limite erradialak kalkulatuz ($y = mx$ hartuz), zera dugu:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} \overset{(y=mx)}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

Hau da, m aldatuz, limitea aldatzen da. Hortaz, ez da existitzen limitea $(0,0)$ puntuan, ondorioz, etena da puntu horretan. Beraz, puntu honetan ez da deribagarria.
Bestalde, $(x,y) \neq (0,0)$ denean $f(x,y)$ deribagarria da, funtzio deribagarriek osatuta baitago eta zatitzaileak ez du zero balioa hartzen.

Orain, deribatu partzialak kalkulatuko ditugu. Deribatu partzialak $(0,0)$ puntuan honako hauek dira:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2+0} - 0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{0+h^2} - 0}{h} = 0.$$

Bestalde, $\frac{\partial f}{\partial x}$ eta $\frac{\partial f}{\partial y}$ existitzen dira ere $(x,y) \neq (0,0)$ puntuetan:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^3 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

5. Aztertu funtzio honen diferentziagarritasuna:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \quad \text{bada} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada} \end{cases}$$

Ebazpena: $(x,y) \neq (0,0)$ puntuetan funtzio honen deribatu partzialak hauek dira:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^5}{(x^2+y^4)^2} \qquad \text{eta} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^4y - 2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2},$$

eta funtzio hauek jarraituak dira $(x,y) \neq (0,0)$ puntu guztietan, haiek osatzen dituzten funtzioak deribagarriak direlako eta zatitzaileek ez dute zero balioa hartzen. Beraz, $f(x,y)$ diferentziagarria da $(x,y) \neq (0,0)$ puntuetan.

Orain diferentziagarritasuna aztertuko dugu $(x,y)=(0,0)$ puntuan. Horretarako $(x,y)=(0,0)$ puntuko f-ren deribatu partzialak kalkulatuko ditugu.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{0}{h^2+0}-0}{h}=0,$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\frac{0}{0+k^4}-0}{k}=0.$
Orain diferentziagarritasuna aztertzeko haren definizioaren arabera limite hau zero dela frogatu behar dugu:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-[f(0,0)+(x-0)\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+(y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)]}{\|(x,y)-(0,0)\|}=$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}-(0+(x-0)\cdot 0+(y-0)\cdot 0}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Limite hau kalkulatzeko koordenatu polarrak erabiliko ditugu. Izan bedi

$$F(x,y)=\frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

$x=\rho\cos\theta$ eta $y=\rho\sin\theta$ berdintzak erabiliz zera dugu:

$$|F(x,y)-0|=\left|\frac{(\rho^2\cos^2\theta)(\rho^2\sin^2\theta)}{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^4\sin^4\theta)\rho}\right|=|\rho|\cdot\left|\frac{(\cos^2\theta)(\sin^2\theta)}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta}\right|,$$

eta bigarren funtzioa bornatua da; alegia, $\cos\theta\neq 0$ bada, hau dugu:

$$h(\rho,\theta)=\left|\frac{(\cos^2\theta)(\sin^2\theta)}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta}\right|\leq\left|\frac{(\cos^2\theta)(\sin^2\theta)}{\cos^2\theta}\right|=\left|\sin^2\theta\right|\leq 1$$

eta $\cos\theta=0$ bada, $h(\rho,\theta)=0$ da. Gainera $\lim_{\rho\to 0^+}\rho=0$ denez, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}F(x,y)=0.$
Beraz funtzio hau diferentziagarria da $(x,y)=(0,0)$ puntuan ere, eta bere deribatua funtzio hau da:

$$\nabla f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\left(\dfrac{2xy^5}{(x^2+y^4)^2}\ ,\ \dfrac{2x^4y-2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\quad \text{bada}\\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)=(0,0), & (x,y)=(0,0)\ \text{bada.}\end{cases}$$

6. Aurkitu funtzio honen grafikoarekiko plano-ukitzaile baten ekuazioa $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ puntuan:

$$f(x,y)=x^2+4y^2,\qquad (x_0,y_0)=(2,-1)$$

Ebazpena: $z = f(x, y) = x^2 + 4y^2$ funtzioaren grafikoa gainazal bat da. Gainazal horren plano ukitzailea (2,-1) puntuan honako hau da:
$z = f(2, -1) + \nabla f(2, -1) \cdot (x - 2, y - (-1)) = 8 + 4(x - 2) + (-8)(y + 1)$.
Hau da, $z = 4x - 8y - 8$.

7. Aurkitu $x^3 - 2y^3 + z^3 = 0$ gainazalarekiko ukitze-planoaren ekuazio bat $(1, 1, 1)$ puntuan.

Ebazpena: $f(x, y, z) = x^3 - 2y^3 + z^3 = 0$ funtzioaren grafikoa gainazal bat da. Gainazal horren plano ukitzailearen ekuazioa (1,1,1) puntuan $\nabla f(1, 1, 1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$ da, hots:

$$(3, -6, 3) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 3(x - 1) - 6(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$

Hau da, $x - 2y + z = 0$.

8. Aurkitu $\frac{\partial z}{\partial x}$ eta $\frac{\partial z}{\partial y}$ baldin $z = f(u, v)$ bada, non $u = e^{xy}$ eta $v = x^2 - y^2$.

Ebazpena: $(x, y) \to (u, v) \to z$ konposizioa dugu. Hortaz,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} y e^{xy} + \frac{\partial f}{\partial v} 2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} x e^{xy} + \frac{\partial f}{\partial v}(-2y)$$

9. Izan bedi $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ mendi baten altuera (x, y) puntu batean. (1,1) puntutik zein norabidetan joan behar gara igotzeko azkarrago? eta ahalik eta azkarren jaisteko?

Ebazpena: Igotzeko norabide azkarrena gradientearena da, hots:

$$\nabla h(x, y) = \Big(-4xe^{-x^2}, -6ye^{-3y^2} \Big) \quad \Rightarrow \quad \nabla h(1, 1) = -(4e^{-1}, 6e^{-3}).$$

Jaisteko norabide azkarrena gradientearen aurkakoa da, hots:

$$\vec{v} = -\nabla h(1, 1) = (4e^{-1}, 6e^{-3}).$$

10. Aurkitu $z = x^3y^2(6 - x - y)$ funtzioaren muturrak, $(x > 0, y > 0)$ eremuan.

Ebazpena: Puntu kritikoak kalkulatuko ditugu honako sistema hau ebatziz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2(6 - x - y) + x^3y^2(-1) = x^2y^2(18 - 4x - 3y) = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y(6 - x - y) + x^3y^2(-1) = x^3y(12 - 2x - 3y) = 0$$

eta $(x > 0, y > 0)$ eremuan egon behar direla kontuan hartuz, sistema hau bete behar dute:

$$18 - 4x - 3y = 0$$
$$12 - 2x - 3y = 0,$$

bere soluzio bakarra $(x, y) = (3, 2)$ da, ondorioz, hori da puntu kritiko bakarra eremu horretan. Sailkatzeko puntu hori funtzio honen matrize hessiarra puntu horretan kalkulatuko dugu.

$$\nabla^2 z(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy^2(6 - 2x - y) & x^2y(36 - 8x - 9y) \\ x^2y(36 - 8x - 9y) & 2x^3(6 - x - 3y) \end{bmatrix}$$

$$D = \nabla^2 z(3, 2) = \begin{bmatrix} -144 & -108 \\ -108 & -162 \end{bmatrix}.$$

Izan ere

$$\det D = (-144)(-162) - (-108)^2 = 11664 > 0 \quad \text{eta} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(3, 2) = -144 < 0,$$

matrize hau definitu negatiboa da, eta $(3, 2)$ puntuan z funtzioak **maximo lokal** bat heltzen du.

11. Lagrange-ren teorema erabiliz, kalkula itzazu $u = x - 2y + 2z$ funtzioaren mutur baldintzatuak $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ murrizketaren pean.

Ebazpena: Kasu honetan $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ eta $c = 9$; orduan

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (1, -2, 2)$$
$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$$

Beraz, problema baldintzatu honen puntu kritikoak kalkulatzeko sistema hau ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x) \\ -2 = \lambda(2y) \\ 2 = \lambda(2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

Beraz, $x = \dfrac{1}{2\lambda}$, $y = -\dfrac{1}{\lambda}$ eta $z = \dfrac{1}{\lambda}$. Ordezkatuz 4. ekuazioan eta ebatziz zera lortzen dugu:

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 9$$

eta hortik hau:

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = (1, -2, 2)$$
$$\lambda = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = (-1, 2, -2).$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ murrizketak multzo itxi eta bornatu bat (3 erradioko zirkunferentzia bat) definitzen duenez, $u(x, y, z)$ funtzioak bere balio maximo globala eta bere balio minimo globala hartuko du multzo horretan; gainera, hor bi puntu kritiko daukanez, bata maximoa izango da eta bestea minimoa. Orduan, $(1, -2, 2)$ **maximo globala** da eta $(-1, 2, -2)$ **minimo globala** da, zeren

$$u(1, -2, 2) = 1 + 4 + 4 = 9 \qquad u(-1, 2, -2) = -1 - 4 - 4 = -9.$$