1. gaiari buruzko autoebaluazioaren ebazpena

1. Egiazta ezazu $\vec{a} = (7, 7 - 2)$ bektorea $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, -1, 3)$ eta $\vec{w} = (4, 0, -2)$ bektoreen konbinazio lineala den ala ez.

Ebazpena: Badakigu $\vec{a}$ bektorea $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bektoreen konbinazio lineala izango dela, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ koefiziente-hirukote bat existitzen bada honako hau betetzen:

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{a} \iff x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Adierazpen matrizial hori garatuz sistema hau dugu:

$$\begin{cases} x + 4z = 7 \\ x - y = 7 \\ x + 3y - 2z = -2 \end{cases}$$

Ekuazio-sistema horren $\widehat{A}$ matrize zabaldua honako hau da:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 7 \\ 1 & -1 & 0 & | & 7 \\ 1 & 3 & -2 & | & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 7 \\ 0 & -1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 3 & -6 & | & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 7 \\ 0 & -1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -18 & | & -9 \end{bmatrix}$$

Orduan, $n = h = 3$ denez, sistema bateragarri determinatua da. Goi-triangeluarra izateagatik honako soluzioa behetik gora kalkulatzen dugu:

$$z = 1/2; \; y = -2; \; x = 5,$$

Hau da, frogatu dugu $\vec{a}$ hiru bektore horien konbinazio lineala dela. $\square$

2. Izan bitez $P(1, 0, -1)$ puntua eta $\pi : \; x + 3y + z = 2$ planoa. Zehaztu:
a) P puntuaren proiekzio ortogonala π planoaren gainean.
b) P-tik pasatzen den π-rekiko zuzen ortogonalaren ekuazioa.
c) P-ren puntu simetrikoa π planoarekiko.

Ebazpena:

b) $\vec{n} = (1, 3, 1)$ planoko bektore normala da. $P(1, 0, -1)$ puntutik pasatzen den π-rekiko zuzen ortogonala hau da:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

a) r eta π-ren ebakidurak π gaineko P-ren proiekzioa emango digu:

$$(1 + t) + 3(3t) + (-1 + t) = 2 \iff t = 2/11 \Rightarrow (x, y, z) = (13/11, 6/11, -9/11).$$

c) $\dfrac{x+1}{2} = 13/11 \;\Rightarrow\; x = 15/11;\quad \dfrac{y+0}{2} = 6/11 \;\Rightarrow\; y = 12/11;$
$\dfrac{z+(-1)}{2} = -9/11 \;\Rightarrow\; z = -7/11.$
Beraz, π-rekiko P-ren puntu simetrikoa $(15/11, 12/11, -7/11)$ da. □

3. Zehaztu a-ren balioa $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{a}$ zuzenak XY plano koordenatuarekin 45^o-ko angelua osa dezan.

Ebazpena: Dakigunez $XY: \quad z = 0$, eta $\vec{n} = \vec{k}$. Bestalde $\vec{v} = (-1, 1, a)$. Ondorioz,

$$\cos(90^o - 45^o) = \cos 45^o = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{(0,0,1)\cdot(-1,1,a)}{1\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{2+a^2}},$$

Orduan,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2+a^2}} \;\Rightarrow\; 2a = \sqrt{4+2a^2} \;\Rightarrow\; 4a^2 = 4+2a^2 \;\Rightarrow\; a^2 = 2 \;\Rightarrow\; a = \pm\sqrt{2}. \;\square$$

4. Aztertu honako matrize honen heina α parametroaren balioen arabera:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 2 \\ 2 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ebazpena:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 2 \\ 2 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & \alpha^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

$\alpha \neq 0, 1, 2$ denean $h(A) = 3$ da.
Baldin $\alpha = 0$ edo $\alpha = 1$ bada, $h(A) = 3$ da ere bai.
Baldin $\alpha = 2$ bada, $h(A) = 2$. □

5. Kalkulatu honako n ordenako determinante hau:

$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$$

Ebazpena: $Z_1 = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n$ egiten badugu, zera lortzen da:

$$\begin{vmatrix} n-n & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ n-n & n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-n & -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{vmatrix} = 0. \square$$

6. Aztertu eta ebatzi (ahal bada) Gauss-en metodoaz honako sistema hau:

$$\begin{cases} 2x + y + 4t = 2 \\ -4x - 2y + 3z - 7t = -9 \\ 4x + y - 2z + 8t = 2 \\ -3y - 12z - t = 2 \end{cases}$$

Ebazpena: Ekuazio-sistema horren $\widehat{A}$ matrize zabaldua honako hau da:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 3 & -7 & -9 \\ 4 & 1 & -2 & 8 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{array}\right]$$

Orduan, $n = h = 4$ denez, sistema bateragarri determinatua da. Goi-triangeluarra izateagatik honako soluzioa behetik gora kalkulatzen dugu:

$$t = -2; \; z = -1; \; y = 4; \; x = 3. \square$$

7. Sailkatu honako matrize simetriko hauek definitutasunaren arabera:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Ebazpena:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 3 > 0 \\ \Delta_2 = -16 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{indefinitua da;}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 1 > 0 \\ \Delta_2 = -4 < 0 \\ \Delta_3 = -24 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{indefinitua da.} \ \square$$

8. Kalkula itzazu aurreko problemako 2x2 matrizearen autobaloreak eta autobektoreak 1.6.10. ataleko tresna teorikoak erabiliz. Egiaztatu autobaloreen bidez matrize horren sailkapena.

Ebazpena:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 16 = 0.$$

Beraz, $\lambda_1 = \dfrac{-1+\sqrt{65}}{2} > 0$ eta $\lambda_2 = \dfrac{-1-\sqrt{65}}{2} < 0$; alegia, 1.10. teoremaren arabera matrizea **indefinitua** da. Hortaz, aurreko probleman lortutako emaitza egiaztatu dugu.

Bestalde, $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{65}}{2}$ autobalorerako honako sistema hau dugu:

$$\begin{bmatrix} 3 - \frac{-1+\sqrt{65}}{2} & 2 \\ 2 & -4 - \frac{-1+\sqrt{65}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7-\sqrt{65}}{2} & 2 \\ 2 & \frac{-7-\sqrt{65}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bi ekuazioek zuzen berbera adierazten dute, ondorioz sistema horren soluzioa honako hau da:

$$\left(x, \frac{-7+\sqrt{65}}{4} x \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Esate baterako, $x = 1$ hartuz gero $\left(1, \dfrac{-7+\sqrt{65}}{4} \right)$ autobektorea dugu.

Aldiz, $\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{65}}{2}$ autobalorerako honako sistema hau dugu:

$$\begin{bmatrix} 3 - \frac{-1-\sqrt{65}}{2} & 2 \\ 2 & -4 - \frac{-1-\sqrt{65}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7+\sqrt{65}}{2} & 2 \\ 2 & \frac{-7+\sqrt{65}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bi ekuazioek zuzen berbera adierazten dute, ondorioz sistema horren soluzioa honako hau da:

$$\left(x, \frac{-7-\sqrt{65}}{4} x \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Esate baterako, $x = 1$ hartuz gero $\left(1, \dfrac{-7-\sqrt{65}}{4} \right)$ autobektorea dugu. $\square$

9. Izan bedi zuzen hau:

$$r: \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

a) Aurkitu a-ren balioa $x+2y+az=b$ planoa r-ren paraleloa izan dadin.
b) Aurkitu b-ren balioa zuzen hori planoaren barruan egon dadin.

Ebazpena: Aztertzeko plano eta zuzenaren arteko posizioa honako matrize hauek erabiliko ditugu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}; \qquad \widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & a & | & b \end{bmatrix}$$

a) r planoaren paraleloa izan dadin $\det(A) = 0$ gertatu behar da (honela $h(A) = 2$ da), hau da, $-3a+3=0$, beraz, $a=1$.
b) r planoaren barnean egoteko $h(A) = h(\widehat{A}) = 2$ bete behar da. Erraz egiazta daitekeenez, $a=1$ denean, $h(\widehat{A}) = 2$ izateko $b = 4/3$ izan behar dugu. □

10. Aztertu honako zuzen hauen posizio erlatiboa a balioaren arabera:

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = a+t \end{cases} \qquad s: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

Ebazpena: Aztertzeko zuzen hauen posizioa honako matrize hauek erabiliko ditugu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & a \end{bmatrix}$$

non azken lerroa $(1,0,a)-(2,2,0) = (-1,-2,a)$ kenduratik ateratzen den.
A matrizearen heina $h(A) = 2$ da, izan ere $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.
Bestalde, $\det(\widehat{A}) = -5a-5$ zero izateko, $a=-1$ izan behar dugu. Ondorioz, honako emaitza hau dugu:

$a=-1$ bada, bi zuzenak ebakitzen dira, izan ere $h(A) = h(\widehat{A}) = 2$, eta honek esan nahi du hirugarren bektorea goiko bi bektoreen konbinazio lineala dela; beraz, hirurak plano berean daude, hau da, derrigorrez ebaki behar dira $h(A) = 2$ izateagatik.

$a \neq -1$ bada, gurutzatzen dira espazioan (ez daude plano berean). □