3. gaia

Ariketak.

3.1. Limiteak, jarraitutasuna eta deribagarritasuna.

1. Aurkitu $f(1/2, 3)$ eta $f(1, 1)$ baldin
$$f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$$
bada.
(Em.: $f(1/2, 3) = 5/3$ eta $f(1, 1) = -2$)

2. Aurkitu funtzio honen balioa:
$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$$
$x^2 + y^2 = R^2$ zirkunferentziako puntuetan.
(Em.: $\frac{R^4}{1-R^2}$)

3. Izan bedi $z = xf(y/x)$. Aurkitu f eta z funtzioak, baldin $x = 1$-erako $z = \sqrt{1 + y^2}$ badugu.
(Em.: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$)

4. Aurkitu eta irudikatu funtzio hauen existentzia-eremua:

   a) $f(x, y) = 1 + \sqrt{1 - (x - y)^2}$.

   (Em.: $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 1 \leq y \leq x + 1\}$)

   b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$.

   (Em.: $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq 2$ eta $|y| \leq 2\}$)

   c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}$. $\quad a > 0$ delarik.

   (Em.: $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$)

d) $f(x,y) = (y \sin x)^{1/2}$.

e) $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$.

(Em.: $\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x^2\}$)

5. Kalkulatu hiru aldagaiko funtzio hauen existentzia-eremuak:

a) $f(x,y,z) = \ln(xyz)$.

(Em.: $\mathcal{D}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\} \bigcup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y < 0, z < 0\} \bigcup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, y > 0, z < 0\} \bigcup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, y < 0, z > 0\}$)

b) $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

(Em.: $\mathcal{D}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$)

c) $f(x,y,z) = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$.

(Em.: $\mathcal{D}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$)

6. Marraztu emandako funtzioaren sestra-kurbak adierazitako c-ren balioentzat. Zirriborratu $z = f(x,y)$-ren grafikoa.

a) $f(x,y) = (100 - x^2 - y^2)^{1/2}, \quad c = 2, 4, 6, 8, 10;$

b) $f(x,y) = x^2 + xy, c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3;$

c) $f(x,y) = x/y, c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3;$

d) $f(x,y) = y/\sqrt{x}, c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3.$

7. Kalkulatu limite hauek:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x}$. *(Em.: 0)*

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$. *(Em.: 1)*

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{x + y}{x - y}}, \quad x \neq y$. *(Em.: $\nexists$)*

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. *(Em.: 0)*

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x + y}$. *(Em.: $\nexists$)*

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. *(Em.: $\nexists$)*

8. Aurkitu funtzio hauen etenuneak:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2 \neq 1 \quad \text{bada} \\ 0, & x^2+y^2 = 1 \quad \text{bada.} \end{cases}$.
(Em.: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$)

b) $f(x,y) = \begin{cases} \ln(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0 \quad \text{bada} \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \quad \text{bada.} \end{cases}$.
(Em.: (0,0))

9. Frogatu

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2-y^2}, & x^2-y^2 \neq 0 \quad \text{bada} \\ 0, & x^2-y^2 = 0 \quad \text{bada} \end{cases}$$

jarraitua dela bereiz x eta y aldagai bakoitzarekiko, baina ez dela jarraitua $(0,0)$ puntuan bi aldagaiko funtzio gisa.

10. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \quad \text{bada} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \quad \text{bada} \end{cases}$.
(Em.: Jarraitua $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ multzoan)

b) $f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \quad \text{bada} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \quad \text{bada.} \end{cases}$.
(Em.: Jarraitua $\mathbb{R}^2$ multzoan)

11. Aurkitu funtzio hauen deribatu partzialak:

a) $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.
(Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ eta $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$)

b) $z = x^y$.
(Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ eta $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \log x$)

c) $u = (xy^z)$.
(Em.: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xzy^{z-1}$ eta $\dfrac{\partial u}{\partial z} = xy^z \log y$)

d) $z = \arctan \dfrac{y}{x}$

(Em.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ *eta* $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$*)*

12. Kalkulatu $f(x,y) = \left|\dfrac{x-y}{x+y}\right|$ funtzioaren deribatu partzialak $(0,1)$ puntuan, existitzen badira. Baldin $f(0,0) = 1$ bada, existitzen dira deribatu partzialak $(0,0)$-an?
(Em.: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -2,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0;\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$*)*

13. Izan bedi
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\tan\frac{y}{x}, & x \neq 0 \text{ bada} \\ 0, & x = 0 \text{ bada.} \end{cases}$$
Aztertu zein puntutan betetzen duen f-k ekuazio hau:
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y).$$
(Em.: $(x,0)$ *puntuetan)*

14. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna, deribatu partzialen existentzia eta diferentziagarritasuna $(0,0)$ koordenatu-jatorrian:

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada} \end{cases}$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+4y^3}{2x^2-y^2}, & 2x^2 \neq y^2 \text{ bada} \\ 0, & 2x^2 = y^2 \text{ bada} \end{cases}$$

(Em.: Ez du limiterik koordenatu-jatorrian, beraz etena da puntu horretan. Ondorioz, ez da diferentziagarria puntu horretan. Bestalde, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{2}$ *eta* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -4$*)*

15. Aurkitu funtzio hauen grafikoarekiko plano-ukitzaile baten ekuazioa $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ puntuan:

a) $f(x,y) = (x^2+4y^2), \quad (x_0,y_0) = (2,-1).$

b) $f(x,y) = (x^2+y)^{-\frac{1}{2}}, \quad (x_0,y_0) = (1,1).$
(Em.: $z = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}y + \dfrac{7}{4\sqrt{2}}$*)*

c) $f(x,y) = \ln(x+y) + x\cos y + \arctan(x+y), \quad (x_0,y_0) = (1,0).$
(Em.: $z = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3}{2}$*)*

d) $f(x,y) = xy$, $(x_0,y_0) = (2,1)$.
(Em.: $z = x + 2y - 2$*)*

e) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$, $(x_0,y_0) = (1,1)$.
(Em.: $z = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$*)*

16. Aurkitu gainazal hauekiko ukitze-planoaren ekuazio bat emandako puntuan:

a) $x^2+y^2+z^2 = 3$, $(1,1,1)$-ean;
(Em.: $x + y + z = 3$*)*

b) $(\cos x)(\cos y)e^z = 0$, $(\frac{\pi}{2}, 1, 0)$-n;
(Em.: $x = \pi/2$*)*

c) $e^{xyz} = 1$, $(1,1,0)$-n;
(Em.: $z = 0$*)*

d) $x^3 - 2y^3 + z^3 = 0$, $(1,1,1)$-n;

e) $x^2+y^2+z^2 = 2Rz$, $(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$-n.
(Em.: $(\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y = R$*)*

17. Aurkitu $\nabla f(x,y)$ gradiente bektorea $\mathbb{R}^2$-ko puntu guztietan funtzio bakoitzerako:

a) $f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$ eta $f(0,0) = 0$ badira. *(Em.:* $\nabla f(x,y) =$
$\left(2xy^2\left[\log(x^2+y^2) + \frac{x^2}{x^2+y^2}\right], 2x^2y\left[\log(x^2+y^2) + \frac{y^2}{x^2+y^2}\right]\right)$,
$(x,y) \neq (0,0)$ *bada;*
eta $\nabla f(x,y) = (0,0)$, $(x,y) = (0,0)$ *bada)*

b) $f(x,y) = xy\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ $(x,y) \neq (0,0)$ eta $f(0,0) = 0$ badira. *(Em.:* $\nabla f(x,y) =$
$\left(y\left[\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right], x\left[\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right]\right)$,
$(x,y) \neq (0,0)$ *bada;*
eta $\nabla f(x,y) = (0,0)$, $(x,y) = (0,0)$ *bada)*

18. Frogatu $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ baldin $z(x,y) = xy + x\mathrm{e}^{(y/x)}$ bada.

19. Frogatu $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$ baldin $u(x,y,z) = x + \frac{x-y}{y-z}$ bada.

20. Izan bitez $f(x,y) = x^2 + y$ eta $h(u) = (\sin 3u, \cos 8u)$. Izan bedi $g(u) = f(h(u))$. Kalkulatu $\dfrac{dg}{du}$ $u = 0$-an bi eratan, hots, zuzenean eta katearen erregela erabiliz. *(Em.: 0)*

21. Izan bedi $y(x)$ inplizituki definitua $G(x, y(x)) = 0$-ren bidez, non G bi aldagaiko funtzio bat baita. Baldin $y(x)$ eta G diferentziagarriak badira, frogatu
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0 \text{ bada}$$
Izan bedi y inplizituki definitua $x^2+y^3+e^y = 0$-ren bidez. Kalkulatu $\dfrac{dy}{dx}$ deribatua x eta y gaien bitartez.
(Em.: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{3y^2 + e^y}$*)*

22. Aurkitu $\dfrac{du}{dt}$ kasu hauetan:
   a) $u = \ln(\sin \dfrac{x}{\sqrt{y}})$, non $x = 3t^2$, $y = (t^2+1)^{1/2}$.
   (Em.: $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{3t(3t^2+4)}{2(t^2+1)^{5/4}} \operatorname{cotan} \dfrac{3t^2}{(t^2+1)^{1/4}}$*)*
   b) $u = xyz$, non $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \tan t$.
   (Em.: $\dfrac{du}{dt} = 2t(\log t)\tan t + (t^2+1)\left[\dfrac{\tan t}{t} + (\log t)\sec^2 t\right]$*)*

23. Frogatu $w = f(u, v)$ funtzioak, non $u = x+at$ eta $v = y+bt$, ekuazio hau betetzen duela:
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}.$$

24. Frogatu $z = xy + x\phi(\frac{y}{x})$ funtzioak $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ ekuazioa betetzen duela.

25. Izan bedi $z = z(x, y)$ funtzioa inplizituki definitua $z^2+2/x = \sqrt{y^2 - z^2}$ berdintzaren bidez. Frogatu:
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$$

26. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eta $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ funtzioetarako, aurkitu ∇f eta g' eta kalkulatu $(f \circ g)'(1)$.

    a) $f(x, y, z) = xz + yz + xy, g(t) = (e^t, \cos t, \sin t)$.

    (Em.: $(f \circ g)'(1) = 2e \cos 1 + \cos^2 2$*)*

    b) $f(x, y, z) = e^{xyz}, g(t) = (6t, 3t^2, t^3)$.

    (Em.: $(f \circ g)'(1) = 108e^18$*)*

    c) $f(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2) \ln (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, g(t) = (e^t, e^{-t}, t)$.

    (Em.: $(f \circ g)'(1) = (e^2 - e^{-2} + 1)\big(2 \log(e^2 + e^{-2} + 1)^{1/2} + 1\big)$*)*

27. Kalkulatu f funtzio hauen norabide-deribatuak emaniko norabide eta puntuetan:

    a) $f(x, y, z) = (xy^2 + y^2z^3 + z^3x)$, $P = (4, -2, -1)$, $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k})$.

    (Em.: $15/\sqrt{14}$*)*

    b) $f(x, y, z) = x^{yz}$, $P = (e, e, 0)$, $\vec{v} = \dfrac{1}{13}(12\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k})$.

    (Em.: $4e/13$*)*

    c) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $P = (1, 1, 2)$, $\vec{v} = (10, -1, 2)$.

    (Em.: $31/\sqrt{105}$*)*

28. Zein norabidetan da zero $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ funtzioaren norabide-deribatua (1,1) puntuan?
    (Em.: (a, a) *norabidean, non* $a \neq 0$*)*

29. Frogatu $\vec{n} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}})(\vec{\jmath} - \vec{k})$ bektore unitario normala dela $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ gainazalarekiko (0,0,2) puntuan.

30. Ralph kapitaina Merkurioren alde eguzkitsuan zegoen, eta nabaritu zuen bere jantzi berezia urtzen ari zela. Koordenatu kartesiarretako sistema batean, tenperatura $T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{-3z}$ da haren ingurune batean.
    Kapitaina (1,1,1) puntuan badago, zein norabidetan hasi behar du mugitzen ahalik eta azkarren hozteko?

(Em.: $(1/e, 2/e^2, 3/e^3)$ norabidean)

31. Aurkitu zein norabidetan handiagotzen den azkarrago $w = x^2 + xy$ funtzioa (-1,1) puntutik. Zein da ∇w-ren tamaina norabide horretan?
(Em.: $(-1,-1)$ norabidean; $\sqrt{2}$)

32. Kalkulatu $f(x,y) = \dfrac{e^x}{x^2+y^2}$ funtzioaren grafikoarekiko ukitze-planoaren ekuazioa $x = 1$, $y = 1$-ean.
(Em.: $ey + 2z = 2e$)

33. Aurkitu $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ gainazaleko puntuak, non harekiko plano ukitzaileak puntu horietan, koordenatu-planoen paraleloak diren.
(Em.: XY-rekiko ez dago punturik, XZ-rekiko $(1, \pm 1, 0)$ puntuak eta YZ-rekiko $(2,0,0)$ eta $(0,0,0)$ puntuak)

34. Kalkula itzazu funtzio hauen bigarren ordenako deribatu partzialak:

a) $f(x,y,z) = e^z + \dfrac{1}{x} + xe^{-y}$.

(Em.: Izan bitez $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ eta abar. $f_{xx} = 2/x^3$, $f_{xy} = f_{yx} = -e^{-y}$, $f_{xz} = f_{zx} = 0$, $f_{yy} = xe^{-y}$, $f_{yz} = f_{zy} = 0$, $f_{zz} = e^z$)

b) $f(x,y) = \cos(xy^2)$.

(Em.: $f_{xx} = -y^4\cos(xy^2)$, $f_{xy} = f_{yx} = -2y\sin(xy^2) - 2xy^3\cos(xy^2)$, $f_{yy} = -2x\sin(xy^2) - 4x^2y^2\cos(xy^2)$)

c) $f(x,y) = \ln(x^2+y)$.

(Em.: $f_{xx} = \dfrac{2y-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{xy} = f_{yx} = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{yy} = -\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$)

d) $f(x,y) = x \arctan \dfrac{x}{y}$.

(Em.: $f_{xx} = \dfrac{y}{x^2+y^2} + \dfrac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{xy} = f_{yx} = -\dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{yy} = \dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$)

35. Frogatu $u(x,y) = e^x \sin y$ funtzioak ekuazio hau betetzen duela:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{(Laplace-ren ekuazioa).}$$

36. Izan bedi $f(x,y,z) = ze^{xy} + yz^3x^2$, egiaztatu hau:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$$

.

37. Izan bitez $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ eta abar. Frogatu funtzio hauek:

a) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

b) $g(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$

c) $h(x,y,z,w) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$

betetzen dutela bakoitzari dagokion Laplace-ren ekuazioa:

a) $f_{xx} + f_{yy} = 0$

b) $g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = 0$

c) $h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} + h_{vv} = 0.$

38. Adierazi ekuazio hauek u eta v aldagai aske berrien menpe:

a) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0; \quad u = x,\ v = \dfrac{y}{x}$ badira.

(Em.: $u\dfrac{\partial z}{\partial u} - z = 0$*)*

b) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z; \quad u = x^2 + y^2,\ v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ badira.

(Em.: $\pm\dfrac{v^2\sqrt{1 + v^2 u}}{1 \pm \sqrt{1 + v^2 u}}\dfrac{\partial z}{\partial v} + z = 0$*)*

c) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad u = xy,\ v = \dfrac{x}{y}$ badira.

(Em.: $-4uv\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2v\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$*)*

3.2. Taylor-en formulak. Mutur lokalak eta globalak.

1. Idatzi bigarren ordenako Taylor-en formula funtzio hauetarako emaniko puntuarekiko:

   a) $f(x, y) = \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + 1)}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. *(Em.:* $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 + R_2$*)*

   b) $f(x, y) = e^{(-x^2-y^2)} \cos(xy)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$
   (Em.: $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 + R_2$*)*

   c) $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$
   (Em.: $f(x, y) = 1 + xy + R_2$*)*

   d) $f(x, y) = e^{(x^2-2x+1)} \cos y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$
   (Em.: $f(x, y) = e - 2ex + 3ex^2 - \dfrac{e}{2}y^2 + R_2$*)*

   e) $f(x, y) = y^x$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$
   (Em.: $f(x, y) = 1 + y + xy + R_2$*)*

2. Aurkitu funtzio hauen muturrak:

   a) $z = x^3y^2(6 - x - y)$, $(x > 0, y > 0)$.

   b) $z = xy\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}$.

   (Em.: $(0, 0)$ *zeladura-puntua da;* $(-a/\sqrt{3}, -b/\sqrt{3})$ *eta* $(a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3})$ *maximo lokalak dira; eta* $(-a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3})$ *eta* $(a/\sqrt{3}, -b/\sqrt{3})$ *minimo lokalak dira.)*

   c) $z = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$, $(x > 0, y > 0)$.
   (Em.: (4,2) minimo lokala da)

   d) $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.
   (Em.: (0,0) zeladura-puntua da, eta (-4,-2), maximo lokala)

3. Aurkitu hiru aldagaiko funtzio hauen muturrak:

   a) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.
   (Em.: $(-2/3, -1/3, 1)$ *minimo lokala da)*

b) $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$, $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

(Em.: $(1/2, 1, 1)$ minimo lokala da eta $(-1/2, -1, -1)$, maximo lokala)

4. Aurkitu funtzio hauen mutur baldintzatuak:

a) $z = x^2 + y^2$, baldin $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$ bada.
(Em.: (18/13,12/13) minimoa)

b) $u = x - 2y + 2z$, baldin $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ bada.

c) $u = xy^2z^3$ baldin $x + y + z = 12 \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$ bada.
(Em.: (2,4,6) maximoa)

d) $u = xyz$ baldin $x + y + z = 5$ eta $xy + yz + zx = 8$.

(Em.: (4/3,7/3,4/3), (7/3,4/3,4/3) eta (4/3,4/3,7/3) maximoak eta (2,1,2), (2,2,1) eta (1,2,2) minimoak)

e) $u = x + y + z$ baldin $x^2 - y^2 = 1$ eta $2x + z = 1$.
(Em.: ez dira existitzen)

5. Aurkitu $\mathbb{R}^3$-ko jatorritik $z = 6xy + 7$ gainazalera dagoen distantzia minimoa.

(Em.: $(-\sqrt{41}/6, \sqrt{41}/6)$ edo $(\sqrt{41}/6, -\sqrt{41}/6)$ puntuetara dago distantzia minimoa, eta 1.51841 da)

6. B bolumeneko paralelepipedo laukizuzen guztien artean, aurkitu azalera total txikiena daukana.
(Em.: Dimentsioak=$\dfrac{B}{3} \times \dfrac{B}{3} \times \dfrac{B}{3}$)

7. Aurkitu bolumen maximoko S azalerako paralelepipedo laukizuzena.
(Em.: Dimentsioak=$\sqrt{\dfrac{S}{6}} \times \sqrt{\dfrac{S}{6}} \times \sqrt{\dfrac{S}{6}}$)

8. Deskonposatu $a > 0$ zenbaki osoa hiru batugaitan, haien biderkadura maximoa izateko.
(Em.: $a = \dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{3}$)

9. Emaniko esfera batean, inskribatu azalera maximoa daukan zilindroa.
(Em.: err.=$\dfrac{\sqrt{10}}{20}(1 + \sqrt{5})\sqrt{5a^2 - \sqrt{5}a^2}$, alt.=$\sqrt{\dfrac{2}{5}(5a^2 - \sqrt{5}a^2)}$)