2. gaia

Ariketak.

2.1. Funtzio limiteak.

1. Kalkula itzazu funtzio hauen definizio-eremuak:

   a) $f(x) = \log(x^2 - 4)$. (*Em.:* $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2) \bigcup (2, \infty)$.)

   b) $f(x) = \log(x + 2) + \log(x - 2)$. (*Em.:* $\mathcal{D}(f) = (2, \infty)$.)

   c) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 + x}}$. (*Em.:* $\mathcal{D}(f) = (-2, 0]$.)

   d) $f(x) = \arcsin\left(\log \dfrac{x}{10}\right)$. (*Em.:* $\mathcal{D}(f) = [10/e, 10e]$.)

   e) $f(x) = \frac{1}{x} + 2^{\arcsin x} + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$. (*Em.:* $\mathcal{D}(f) = \emptyset$.)

2. Aurkitu funtzio hauen alderantzizko funtzioak eta haien definizio-eremuak:

   a) $f(x) = \arctan 3x$. (*Em.:* $f^{-1}(x) = \frac{\tan x}{3}$; $\mathcal{D}(f^{-1}) = (-\pi/2, \pi/2)$.)

   b) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$. (*Em.:* $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$; $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.)

   c) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \text{ bada,} \\ x^2, & x > 0 \text{ bada.} \end{cases}$

   (*Em.:* $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \textit{ bada,} \\ \sqrt{x}, & x > 0 \textit{ bada;} \end{cases}$ $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.)

   d) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \text{ bada,} \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4 \text{ bada,} \\ 2^x, & 4 < x \text{ bada.} \end{cases}$

   (*Em.:* $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \textit{ bada,} \\ x^2, & 1 \leq x \leq 16 \textit{ bada,} \\ 2^x, & 16 < x \textit{ bada;} \end{cases}$ $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.)

3. Izan bedi $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Aurkitu $(f \circ f)$; $f\left(\frac{1}{x}\right)$; $f(x+y)$; $f(x)+f(y)$.

4. Aurkitu $f(x)$ baldin $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ bada. (*Em.:* $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$.)

5. Izan bitez funtzio hauek:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \text{ bada} \\ x^2, & x > 0 \text{ bada} \end{cases} \quad \text{eta} \quad g(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \text{ bada} \\ 1+x, & x \geq 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

Aurkitu $f+g,\ f-g,\quad f\cdot g,\quad f/g,\quad f\circ g,\ g\circ f$.

6. a) Demagun $\lim_{x\to a} f(x)$ eta $\lim_{x\to a} g(x)$ existitzen direla, $f(x) \leq g(x)$ izanik. Frogatu $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

   b) $f(x) < g(x)$ izatetik $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$ ondorioztatzen da?

7. Kalkula itzazu limite hauek:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$. (*Em.:* $l = -2$.)

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$. (*Em.:* $l = n(n-1)/2$.)

   c) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$. (*Em.:* $l = (a-1)/(3a^2)$.)

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$. (*Em.:* $l = 1/9$.)

   e) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$. (*Em.:* $l = 12/5$.)

   f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$. (*Em.:* $l = 1$.)

   g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$. (*Em.:* $l = 0$.)

   h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$. (*Em.:* $l = e^2$.)

   i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/x}$. (*Em.:* $l = e$.)

   j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$. (*Em.:* $l = 0$.)

   k) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$. (*Em.:* $l = 2/\pi$.)

l) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$.

m) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\tan x - \tan a}{x-a}$. (*Em.:* $l = 1+\tan^2 a$.)

n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$. (*Em.:* $l = 1$.)

o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(a+x) - \log a}{x}$. (*Em.:* $l = 1/a$.)

p) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$. (*Em.:* $l = \sqrt{3}/3$.)

q) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x}$. (*Em.:* $l = 1$.)

r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$. (*Em.:* $l = -1/2$.)

s) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\log(x+1) - \log x)$. (*Em.:* $l = 1$.)

t) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{a} - 1)$. (*Em.:* $l = \log a$.)

u) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} (\sin x)^{\tan x}$. (*Em.:* $l = 1$.)

8. Kalkulatu limite hauek:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$. (*Em.:* $l = -\sin a$.)

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)\right]}{\sin bx}$. (*Em.:* $l = 2a/b$.)

c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \left(2 - \frac{\pi}{3}\right)^{\tan\frac{\pi}{6}x}$. (*Em.:* $l = e^{2/\pi}$.)

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{2+\log x}}{\log(3\sin^2 x + \cos x)}$. (*Em.:* $l = 2e^2/5$.)

e) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$. (*Em.:* $l = -24$.)

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{1/x^2}$. (*Em.:* $l = 2/3$.)

2.2. Funtzio baten jarraitutasuna.

1. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$. (*Em.:* $\mathbb{R} - \{2\}$ *multzoan jarraitua eta* $x = 2$ *puntuan lehen mailako etenunea (jauzi infinitua).*)

   b) $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$. (*Em.:* $\mathbb{R} - \{-1\}$ *multzoan jarraitua eta* $x = -1$ *puntuan etenune gaindigarria.*)

   c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$. (*Em.:* $[-7,\infty) - \{-2,2\}$ *multzoan jarraitua,* $x = -2$ *puntuan lehen mailako etenunea (jauzi infinitua) eta* $x = 2$ *puntuan etenune gaindigarria.*)

   d) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$. (*Em.:* $\mathbb{R} - \{-1\}$ *multzoan jarraitua eta* $x = -1$ *puntuan lehen mailako etenunea (jauzi infinitua).*)

   e) $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$. (*Em.:* $\mathbb{R} - \{0\}$ *multzoan jarraitua eta* $x = 0$ *puntuan etenune gaindigarria.*)

   f) $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$. (*Em.:* $\mathbb{R} - \{0\}$ *multzoan jarraitua eta* $x = 0$ *puntuan lehen mailako etenunea (jauzi finitua).*)

2. Izan bedi $f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\frac{\pi}{2} \text{ bada} \\ A\sin x + B, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ bada} \\ \cos x, & x \ge \frac{\pi}{2} \text{ bada.} \end{cases}$
   Kalkulatu A eta B f jarraitua izateko. (*Em.:* $A = -1,\ B = 1$.)

3. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna:

   a) $f(x) = \dfrac{5\cdot 2^{1/x}-7}{25\cdot 2^{1/x}+8}$. (*Em.:* $\mathbb{R} - \{0\}$ *multzoan jarraitua eta* $x = 0$ *puntuan lehen mailako etenunea.*)

   b) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$. (*Em.:* $\mathbb{R} - \{1\}$ *multzoan jarraitua eta* $x = 1$ *puntuan lehen mailako etenunea.*)

   c) $f(x) = 3 + \dfrac{1}{1-7^{\frac{x+1}{1-x}}}$. (*Em.:* $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ *multzoan jarraitua,* $x = -1$ *puntuan lehen mailako etenunea (jauzi infinitua) eta* $x = 1$ *puntuan lehen mailako etenunea.*)

d) $f(x) = \begin{cases} \cos x e^{\tan x}, & x \in [0,\pi] \text{ eta } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ bada} \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} \text{ bada} \end{cases}$. (*Em.:* $[0,\pi] - \{\pi/2\}$ *multzoan jarraitua eta* $x = \pi/2$ *puntuan lehen mailako etenunea.*)

e) $f(x) = \dfrac{1}{x - E(x)}$. (*Em.:* $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ *multzoan jarraitua eta zenbaki osoetan lehen mailako etenuneak (jauzi infinitua).*)

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x+1}}}, & x \leq 0 \\ \frac{\cos x - \sqrt{|\cos 2x|}}{\sin^2 x}, & 0 < x < 3 \\ \frac{1}{4-x}, & x \geq 3 \end{cases}$

(*Em.:* $\mathbb{R} - \{-1, 3, 4\}$ *multzoan jarraitua,* $x = -1$ *puntuan etenune gaindigarria, eta* $x = 3$ *eta* $x = 4$ *puntuetan lehen mailako etenuneak.*)

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{1 - e^{\frac{1}{x+1}}}, & x \leq 0 \text{ edo } x > \pi \\ \frac{1-\sqrt{|\cos x|}}{1-\cos^2 x}, & 0 < x < \pi \end{cases}$

(*Em.:* $\mathbb{R} - \{-2, 0, \pi\}$ *multzoan jarraitua,* $x = -2$, $x = 0$ *eta* $x = \pi$ *puntuetan lehen mailako etenuneak.*)

4. Aztertu funtzio honen jarraitutasuna:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \notin \mathbb{Q} \text{ bada} \\ 1/x, & x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0 \text{ bada} \\ 0, & x = 0 \text{ bada} \end{cases}$$

5. a) Demagun f funtzioak $|f(x)| \leq |x|$ betetzen duela x orotarako. Frogatu f jarraitua dela $x = 0$ puntuan.

   b) Demagun g jarraitua dela $x = 0$ puntuan, eta $g(0) = 0$ eta $|f(x)| \leq |g(x)|$ betetzen dela x orotarako. Frogatu f jarraitua dela $x = 0$ puntuan.

6. Demagun f funtzioak $f(x + y) = f(x) + f(y)$ betetzen duela eta f jarraitua dela $x = 0$ puntuan. Frogatu f jarraitua dela $x = a$ puntuan a orotarako.

2.3. Funtzio jarraituen propietateak.

1. Frogatu $x^5 - 2x^4 + x - 2 = 0$ ekuazioak erro erreal bat daukala $(1, 3)$ tartean.

2. Frogatu $x2^x = 1$ ekuazioak bat baino txikiagoa den erro positibo bat daukala gutxienez.

3. Izan bedi $f : [0, 1] \to [0, 1]$ funtzio jarraitua. Frogatu c puntu bat existitzen dela $[0, 1]$ tartean non $f(c) = c$ baita.
   (*Iradokizuna: Egiaztatu* $g(x) = f(x) - x$ *funtzioak Bolzano-ren teorema egiaztatzen duela* $[0, 1]$ *tartean.*)

4. Izan bedi $f(x) = \tan x$. Egiaztatu $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ eta $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ betetzen dela, eta $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ tartean ez dela existitzen x baliorik non $f(x) = 0$ baita. Kontraesanean dago Bolzano-ren teoremarekin? Zergatik?

5. Frogatu existitzen dela x bat non $\sin x = x - 1$.

2.4. Deribatua.

1. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna eta deribagarritasuna adierazitako puntuetan:

   a) $f(x) = |\sin x|, \quad x = 0$ puntuan. (*Em.: Jarraitua da, baina ez da deribagarria* $x = 0$ *puntuan* $(f'(0^+) = 1 \neq f'(0^-) = -1)$.)

   b) $f(x) = \begin{cases} x(1 + e^{1/x})^{-1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

   (*Em.: Jarraitua da, baina ez da deribagarria* $x = 0$ *puntuan* $(f'(0^+) = 0 \neq f'(0^-) = 1)$.)

   c) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

   (*Em.: Ez da jarraitua, ezta deribagarria ere* $x = 0$ *puntuan* ($\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *ez da existitzen*).)

d) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(*Em.: Jarraitua da, baina ez da deribagarria $x=0$ puntuan ($f'(0)$ ez da existitzen).*)

e) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(*Em.: Jarraitua eta deribagarria da $x=0$ puntuan ($f'(0)=0$).*)

f) $f(x)=\begin{cases} x\left|1+\frac{1}{x}\right|^{1/2}, & x\neq 0,-1\\ 0, & x=0,\ x=-1\end{cases}$ $x=0$ eta $x=-1$ puntuetan.

(*Em.: Jarraitua da, baina ez da deribagarria $x=0$ eta $x=-1$ puntuetan ($f'(0^+)=\infty$, $f'(0^-)=\infty$ eta $f'(-1^+)=-\infty$, $f'(-1^-)=\infty$).*)

2. Izan bedi $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\leq x_0\\ ax+b, & x>x_0\end{cases}$, hor $f(x)$ deribagarria da x_0-ren ezkerraldetik (hots, $\exists f'(x_0^-)$). Zein izan behar dute a eta b-k, $F(x)$ jarraitua eta deribagarria izateko x_0 puntuan?. (*Em.: $a=f'(x_0^-)$ eta $b=f(x_0)-x_0f'(x_0^-)$.*)

3. Aurkitu $f'(0)$ baldin $f(x)=\begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ bada, $g(0)=g'(0)=0$ eta $g''(0)=17$ izanik. (*Em.: $f'(0)=17/2$.*)

4. Kalkulatu funtzio hauen 114. ordenako deribatua:

   a) $f(x)=\sin x$

   b) $f(x)=x\ln x$

5. Frogatu $f_m(x)=x^3-3x+m$ funtzioak ez dauzkala inoiz bi erro erreal desberdin $[0,1]$ tartean.

6. Aztertu $f(x)=3\sqrt{x}-4x$ funtzioak batez besteko balioaren (Lagrange-ren) teoremaren baldintzak betetzen dituen $[1,4]$ tartean. Horrela bada, aurkitu teorema egiaztatzen duten c balioak.

7. Aplika dakioke Rolle-ren teorema $f(x)=-3+r(x-1)^{2/3}$ funtzioari $[0,2]$ tartean?

8. Kalkulatu limite hauek L'Hôpital-en teoremaren bitartez:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$. (*Em.:* $l = -1/3$.)

b) $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1+\cos 4x}$. (*Em.:* $l = 1/2$.)

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(\sin mx)}{\log(\sin nx)}$. (*Em.:* $l = 1$.)

d) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\log x}\right)$. (*Em.:* $l = 1/2$.)

e) $\lim_{x\to 0} x^x$. (*Em.:* $l = 1$.)

f) $\lim_{x\to 1} \left(\tan \dfrac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$. (*Em.:* $l = e^{-1}$.)

g) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cotan} x)^{\sin x}$. (*Em.:* $l = 1$.)

h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$. (*Em.:* $l = \infty$.)

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{1-\cos x}$. (*Em.:* $l = 1$.)

j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$. (*Em.:* $l = 3$.)

k) $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\tan x}{\tan 5x}$. (*Em.:* $l = 5$.)

l) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{12-x}}{2x - 3\sqrt{19-5x}}$. (*Em.:* $l = 8/69$.)

m) $\lim_{x\to 0} [2\sin x - \sin 2x]^{1/\log x}$. (*Em.:* $l = e^3$.)

9. Aurkitu funtzio hauen Taylor-en 3. ordenako garapena $a = 0$ denean (hots, MacLaurin-en formula):

a) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$. (*Em.:* $f(x) = -\frac{5}{3} - \frac{11}{9}x - \frac{29}{27}x^2 - \frac{83}{81}x^3 + R_3(x)$.)

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. (*Em.:* $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x^2 + R_3(x)$.)

c) $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$. (*Em.:* $f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{3}x^3 + R_3(x)$.)

d) $f(x) = \arctan x$. (*Em.:* $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + R_3(x)$.)

e) $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. (*Em.:* $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + R_3(x)$.)

f) $f(x) = \mathrm{ch}^3 x$. (*Em.:* $f(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + R_3(x)$.)

g) $f(x) = \cos^2 x$. (*Em.:* $f(x) = 1 - x^2 + R_3(x)$.)

2.5. Integral mugatua.

1. Aurkitu kalkulu hauen akatsak:

a) $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

b) $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx/\cos^2 x}{1+3\tan^2 x} =$$
$$= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x)\right]_0^{\pi} = 0.$$

2. Aurkitu funtzio hauen deribatuak:

a) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \sin^3 t dt$. (*Em.:* $F'(x) = 3x^2\sin^3 x^3$.)

b) $F(x) = \sin\left(\displaystyle\int_0^x \left[\int_0^y \sin^3 t dt\right] dy\right)$.

(*Em.:* $F'(x) = \cos\left(\displaystyle\int_0^x \sin\left[\int_0^y \sin^3 t dt\right] dy\right) \cdot \sin\left(\int_0^x \sin^3 t dt\right)$.)

2.6. Integrazio-teknikak.

Kalkulatu integral hauek:

1) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$. (*Em.:* $\displaystyle\frac{x^2}{2} + 2x + \log|x+3| + k$.)

2) $\displaystyle\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$. (*Em.:* $\displaystyle\frac{(\arctan\frac{x}{2})^2}{4} + k$.)

3) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. (*Em.:* $2\sin\sqrt{x} + k$.)

4) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$. (*Em.:* $\displaystyle\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + k$.)

5) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\frac{dx}{x}$. (*Em.:* $-\cos(\ln x) + k$.)

6) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^6}}$. (*Em.:* $\frac{1}{3}\log|x^3 + \sqrt{1+x^6}| + k$.)

7) $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx$. (*Em.:* $\frac{1}{8}x\ln|1+4x^2| - \frac{1}{3}[\arctan(2x)]^{3/2} + k$.)

8) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\arctan x dx$. (*Em.:* $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + k$.)

9) $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx$. (*Em.:* $\frac{1}{2}x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + k$.)

10) $\displaystyle\int \arcsin x dx$. (*Em.:* $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + k$.)

11) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx dx$. (*Em.:* $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}[a\cos(bx) + b\sin(bx)] + k$.)

12) $\displaystyle\int x^2\arctan 3x dx$. (*Em.:* $\frac{1}{3}x^3\arctan(3x) - \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{162}\ln(1+9x^2) + k$.)

13) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}dx$. (*Em.:* $-\frac{1}{2}\frac{\ln|x|}{x^2} - \frac{1}{4x^2} + k$.)

14) $\displaystyle\int \frac{(2x-3)dx}{x(x+1)(x+2)(x-1)}$. (*Em.:* $\frac{3}{2}\ln|x| - \frac{5}{2}\ln|x+1| + \frac{7}{6}\ln|x+2| - \frac{1}{6}\ln|x-1| + k$.)

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2(x-2)}$. (*Em.:* $\frac{3}{4}\ln|x| + \frac{1}{2x} - \frac{7}{9}\ln|x+1| + \frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{36}\ln|x-2| + k$.)

16) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^4-1}$. (*Em.:* $x - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}|x+1| + k$.)

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+2)}$. (*Em.:* $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6}\ln|x^2+2| + k$.)

18) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2-7x+13}$. (*Em.:* $\frac{1}{2}\ln|x^2-7x+13| + \frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-7}{\sqrt{3}}\right) + k$.)

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2(x+1)}$. (*Em.:* $\displaystyle\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+k.$)

20) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)^2}dx$. (*Em.:* $\displaystyle-\frac{1}{x}-\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}-\frac{7}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+k.$)

21) $\displaystyle\int \sin^5 x dx$. (*Em.:* $\displaystyle-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+k.$)

22) $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^4 x dx$. (*Em.:* $\displaystyle\frac{3}{128}x-\frac{1}{128}\sin(4x)+\frac{1}{1024}\sin(8x)+k.$)

23) $\displaystyle\int \sin^4 x dx$. (*Em.:* $\displaystyle\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+k.$)

24) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. (*Em.:* $\displaystyle\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}+k.$)

25) $\displaystyle\int \cos 4x\cos 7x dx$. (*Em.:* $\displaystyle\frac{\sin 11x}{22}+\frac{\sin 3x}{6}+k.$)

26) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x+\tan^2 x}$. (*Em.:* $\displaystyle-\frac{1}{2\tan x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+k.$)

27) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x dx}{2+\cos x}$. (*Em.:* $\displaystyle\frac{1}{2}\cos^2 x-2\cos x+3\ln|\cos x+2|+k.$)

2.7. Integralen aplikazioak.

1. Kalkulatu $y=4x-x^2$ parabolak eta abszisa ardatzak mugaturiko planoko eskualdearen azalera. (*Em.:* $A=32/3$.)

2. Aurkitu $y=x(x-1)(x-2)$ kurbak eta OX ardatzak mugaturiko azalera. (*Em.:* $A=1/2$.)

3. Aurkitu $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}$ Agnesi-ren kurbaren eta abszisa ardatzaren artean dagoen azalera. (*Em.:* $A=a^2\pi$.)

4. Kalkulatu $y=x^2$ parabolaren eta $y=3-2x$ zuzenaren artean dagoen eskualdearen azalera. (*Em.:* $A=32/3$.)

5. Kalkulatu $y = 2x - x^2$ parabolak eta $y = -x$ zuzenak mugaturiko azalera. (*Em.:* $A = 9/2$.)

6. Kalkulatu $xy = m^2$ hiperbolaren, $x = a$ eta $x = 3a$ $(a > 0)$ bertikalen eta OX ardatzaren artean dagoen azalera. (*Em.:* $A = m^2 \ln 3$.)

7. Kalkulatu $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ Agnesi-ren kurbaren eta $y = x^2/2$ parabolaren artean dagoen irudiaren azalera. (*Em.:* $A = \pi/2 - 1/3$.)

8. Kalkulatu $y = x^2$, $y = x^2/2$ parabolen eta $y = 2x$ zuzenaren artean dagoen azalera. (*Em.:* $A = 4$.)

9. Aurkitu $y = \sqrt[3]{x}$ kurbak eta $y = 1$, $x = 8$ zuzenek mugaturiko irudiaren azalera. (*Em.:* $A = 17/4$.)

10. Kalkulatu $x^2+y^2 = 16$ zirkunferentziaren eta $x^2 = 12(y-1)$ parabolaren artean dagoen gainazalaren azalera. (*Em.:* $A = \dfrac{16\pi}{3} - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.)

11. Kalkulatu jatorritik $(4, 8)$ punturainoko $y^2 = x^3$ parabola erdikubikoaren arkuaren luzera. (*Em.:* $L = \dfrac{16}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.)

12. Aurkitu $(0, a)$ erpinetik (b, h) punturainoko $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$ katenariko arkuaren luzera. (*Em.:* $L = \sqrt{h^2 - a^2}$.)

13. Aurkitu OX ardatzak eta $y = ax - x^2$ $(a > 0)$ parabolak mugaturiko gainazala OX ardatzaren inguruan biratzean lortzen den biraketa-gorputzaren bolumena. (*Em.:* $B = \dfrac{\pi}{30}a^5$.)

14. Aurkitu $y^2 = x^3$ parabola erdikubikoak, $x = 1$ zuzenak eta abszisa-ardatzak mugaturiko gainazala OX ardatzaren inguruan biratzean lortzen den biraketa-gorputzaren bolumena. (*Em.:* $B = \pi/4$.)

15. Kalkulatu $y = e^x$, $x = 0$ eta $y = 0$-k mugaturiko gainazala OX-ren inguruan biratzean sortutako bolumena. (*Em.:* $B = \pi/2$.)

16. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsea biratzen da OX-ren inguruan. Aurkitu lortutako biraketa-gorputzaren bolumena. (*Em.:* $B = \dfrac{4}{3}\pi ab^2$.)

17. Kalkula ezazu r erradioko eta h altuerako konoaren azalera. (*Em.:* $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.)

18. Kalkula ezazu r erradioko eta h altuerako zilindroaren azalera. (*Em.:* $A = 2\pi rh$.)