1. gaia

Ariketak.

1. Kalkulatu bi bektore unitario, ez-paralelo eta ortogonal (1,1,1) bektorearekiko.

2. Kalkulatu $7\vec{\jmath}+19\vec{k}$ eta $-2\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ bektoreen arteko angelua. (*Em.: 1.726 radian*)

3. Izan bitez $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r$ bektore ez-nulu elkarrekiko ortogonalak; hots, $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0$, baldin $i \neq j$ bada. Izan bitez $c_1, \ldots, c_r$ zenbakiak, non $c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_r\vec{a}_r = 0$ betetzen baita. Frogatu $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$.

4. Izan bitez P eta Q puntuak non $\mathbb{R}^n$. Adieraz dezagun $d(P, Q)$-ren bidez P-ren eta Q-ren arteko distantzia; hots, $d(P, Q) =\| P - Q \|$. Frogatu $d(P, Q) = d(Q, P)$; eta R $\mathbb{R}^n$-ko beste puntu bat badela, $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.

5. Edozein $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ bektoretarako frogatu propietate hauek:
   (a) $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$
   (b) $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$
   (c) $\|\vec{a} + \vec{b}\|\|\vec{a} - \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

6. Izan bitez $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ bektore ez-nulu eta ortogonalak. Frogatu $\| \vec{a} + c\vec{b} \| \geq \| \vec{a} \|$ betetzen dela edozein c zenbaki errealetarako.

7. Izan bitez $\vec{a}$, $\vec{b}$ eta $\vec{c}$ bektoreak. Frogatu adibide baten bidez $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ badela, eta ez dela $\vec{b} = \vec{a}$ bete behar nahitaez.

8. Frogatu $ax + by = c$ ekuazioa planoko zuzen batena dela eta (a, b) plano horrekiko bektore perpendikular baten osagaiak direla.

9. Esan zein planotako zuzenak diren perpendikularrak:

   (a) $3x - 5y = 1$ $\qquad 2x + y = 2$ (*Em.: Ez.*)

(b) $3x - 5y = 1 \qquad 5x + 3y = 7$ (*Em.: Bai.*)

(c) $-x + y = 2 \qquad x + y = 9$ (*Em.: Bai.*)

(d) $3x + 7y = 1 \qquad x - y = 5$ (*Em.: Ez.*)

10. Izan bedi bi plano hauek determinatzen duten zuzena:

$$2x + y + 5z = 2$$
$$3x - 2y + z = 3$$

Aurkitu zuzen horren norabide-bektorea eta kalkulatu, orobat, zuzenaren ekuazio bektorial bat.

11. Aurkitu $2x + 3y - z = 2$ eta $x - y + z = 1$ planoek sortzen duten angelua. (*Em.: 1.8845 radian.*)

12. Frogatu (x_0, y_0) koordenatuetako P puntutik $ax + by = c$ ekuazioko zuzenerainoko distantzia honako hau dela:

$$\frac{|\, ax_0 + by_0 - c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

13. Kalkulatu $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ balioa, baldin eta $\vec{a} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ eta $\vec{c} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ badira. (*Em.: 0.*)

14. Aurkitu (1,1,1), (2,0,-1) eta (0,4,-3) puntuetatik pasatzen den planoaren ekuazioa. (*Em.:* $5x + 3y + z = 9$.)

15. Frogatu biderkadura bektorialaren propietate hauek:

(a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$, baldin eta soilik baldin $(\vec{u} \times \vec{w}) \times \vec{v} = 0$

(b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{v}_1) = \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u}_1 & \vec{u} \cdot \vec{v}_1 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{v} & \vec{v} \cdot \vec{v}_1 \end{vmatrix}$

16. (a) Frogatu (x_1, y_1), (x_2, y_2) eta (x_3, y_3) erpinak dituen triangeluaren azalera

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

delakoaren balio absolutua dela.

(b) Aurkitu (1,2), (0,1) eta (-1,1) erpinak dituen triangeluaren azalera.

17. Frogatu (determinanteak kalkulatu gabe)

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

18. Kalkulatu x ekuazio honetan: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0.$

19. Frogatu berdintza hauek determinanteen propietateak erabiliz:

a) $\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix} = 0,$ b) $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = (1-3x)(1+x)^3,$

c) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc + (ab+bc+ac)x,$ d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0,$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 5 & 25 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0,$ f) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$

20. Kalkulatu determinante hauek beren propietateak erabiliz:

a) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix},$ b) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix},$

c) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$

(*Em.: a)* $x^3 + (a+b+c)x^2$; *b)* x^4; *c)* $\big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}$.)

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ eta $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ ortogonalak dira?

22. Kalkulatu matrize hauen alderantzizkoa:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, d) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(*Em.: a)* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -13/2 & 1/2 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$; *c)* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/12 & -1/4 \\ 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$)

23. Izan bitez $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ eta $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrizeak.

a) Aurkitu, ahal denean, AB, AC, BC eta CA biderkadurak.

b) Kalkulatu A-ren, B-ren eta C-ren irauliak.

c) Kalkulatu ABC eta ACB.

24. Aurkitu AB-ren alderantzizkoa honako hau badugu:

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad B = \begin{bmatrix} \cos y & 0 & \sin y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin y & 0 & \cos y \end{bmatrix}.$$

25. Frogatu ezazu matrize hau ortogonala dela: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

26. Frogatu bi matrize ortogonalen biderkadura ortogonala dela.

27. Ebatzi $A\vec{x} = \vec{b}$ sistemak bi modutan, Rouché-Frobenius-en teorema eta Gauss-en metodoa erabiliz, non sistema horien $\widehat{A}$ matrize zabalduak hauek baitira:

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \end{array}\right].$

(*Em.: Sistema bateragarri determinatua;* $(21/13, 6/13, 7/13)$.)

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right].$

(*Em.: Sistema bateragarri indet.;* $\left\{\left(\frac{3z+4}{3}, \frac{3z+2}{3}, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$.)

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right].$

(*Em.: Sistema bateraezina.*)

28. Ebatzi sistema hau m parametroaren balioaren arabera:

$$\begin{aligned} x + my + z &= m+2 \\ x + y + mz &= -2(m+1) \\ mx + y + z &= m. \end{aligned}$$

(Em.: Hiru kasu hauek gerta daitezke:

(1) Baldin $m \neq 1$ eta $m \neq -2$ bada, sistema bateragarri determinatua da eta soluzioa $\left(\frac{m}{m-1}, \frac{m+2}{m-1}, \frac{-2m-2}{m-1}\right)$ da.

(2) Baldin $m = 1$ bada, sistema bateraezina da.

(3) Baldin $m = -2$ bada, sistema bateragarri indeterminatua da eta soluzio multzoa $\left\{\left(\frac{3z+4}{3}, \frac{3z+2}{3}, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$ da.)