Problemas y Ejercicios Resueltos.
Tema 5: Determinantes.

Ejercicios

1.- *Demostrar que si* $f = (i_1 \dots i_r) \in \Sigma_n$, *entonces* $e_f = (-1)^{r-1}$.

Solución. Sabemos que $(i_1 \dots i_r) = (i_1\ i_r)(i_r\ i_{r-1})(i_{r-1}\ i_{r-2}) \cdots (i_3\ i_2)$, esto es, f se expresa como producto de $r-1$ trasposiciones. Por definición de signatura, se tiene que $e_f = (-1)^{r-1}$.

2.- *Calcular el productos de ciclos que aparecen en las siguiente expresión:*

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(2\ 4\ 3\ 7\ 5\ 6).$$

Solución. Al realizar el producto de ambos ciclos sale $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(2\ 4\ 3\ 7\ 5\ 6) = (1\ 4\ 6\ 5\ 2\ 7)$.

3.- *Obtener las descomposiciones en ciclos disjuntos de la siguiente permutación de* Σ_{10}*:*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 10 & 7 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Solución. Siguiendo el método explicado en el Apartado 1 del Tema 5, la descomposición en ciclos disjuntos es $(1\ 4)(2\ 3)(5\ 9\ 6\ 10\ 8)$.

4.- *Demostrar, utilizando las propiedades de los determinantes, que* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 160.$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{Sumamos todas las columnas a la primera}}{=} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Sacamos 10 factor comun de la columna primera}}{=} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Restamos la primera fila a las demás}}{=} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Desarrollamos por la primera columna}}{=} 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 160.$$

5.- *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ con columnas $A^{(i)}$ para $i = 1, \dots, 4$, tal que det$(A) = 4$, calcular razonadamente:*

(i) det(A^{-1}).

(ii) det$(2A)$.

Solución. (i) $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \dfrac{1}{4}$.

(ii) $\det(2A) = 2^4 \det(A) = 2^6$.

6.- *Demostrar que si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ tiene una fila (columna) en la que todas las entradas son 0_K, entonces det$(A) = 0$. (Pista: usar las propiedades de los determinantes).*

Solución. Es suficiente con escribir los elementos de la fila (columna) i con todas las entradas son 0_K como $0_K + 0_K$ y aplicar la propiedad 5 de los determinantes. Entonces, $\det(A) = 2\det(A)$, luego $\det(A) = 0_K$.

Problemas

1.- *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

(i) Demostrar que $AA^t = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) I_4$.

(ii) Empleando el apartado anterior, deducir cuánto vale $|A|$.

Solución. Para demostrar (i) es suficiente con observar que

$$AA^t = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

(ii) De (i) deducimos que $\det(AA^t) = \det((a^2+b^2+c^2+d^2)I_4) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$. Pero $\det(AA^t) = \det(A)\det(A^t) = \det(A)^2$, ya que $\det(A) = \det(A^t)$. Entonces, $\det(A) = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

2.- *Calcular el determinante de la matriz* $\begin{pmatrix} ab & b^2 & a^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ a^2 & ab & ab & b^2 \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. *Deducir cuál es su rango, según los diferentes valores de a y b.*

Solución. Es fácil ver que

$$\begin{vmatrix} ab & b^2 & a^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ a^2 & ab & ab & b^2 \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = -(a-b)^4(a+b)^4.$$

Por tanto, si $a \neq \pm b$, $\mathrm{rg}A = 4$. Si $a = b \neq 0$, entonces $\mathrm{rg}A = 1$. Si $a = b = 0$, $\mathrm{rg}A = 0$. Por último, si $a = -b \neq 0$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} -a^2 & a^2 & a^2 & -a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 & -a^2 \\ a^2 & -a^2 & -a^2 & a^2 \\ a^2 & -a^2 & -a^2 & a^2 \end{pmatrix},$$

que clarmente es de rango 1.

3.- *Calcular el determinante de* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *siendo* $A = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$.

Solución.

$$|A| \underset{A_{(i)}\to A_{(i)}-A_{(n)},i=1,\dots,n-1}{=} \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$$
$$= (1-n)(2-n)\cdots(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot n = (-1)^{n-1}n!.$$

4.- *Hallar, si es que existe, por dos métodos distintos la matriz inversa de:* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Solución. Si calculamos

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Por tanto, A es inversible. Podemos calcular su inversa mediante la fórmula $A^{-1} = \mathrm{adj}(A)^t|A|^{-1}$, y obtenemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

También podemos obtener A^{-1} como la solución a los sistemas de ecuaciones $AX = B_i$, $i = 1, \cdots, 4$, donde $B_i \in \mathrm{Mat}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ es la matriz que tiene en todas las posiciones 0, excepto en la i-ésima que es 1.