$\overline{}$ 10	+	$\overline{}$ 4	=	$\overline{}$ 14	CALIFICACION:	

Se desea estimar el siguiente modelo de regresión lineal que suponemos que cumple las hipótesis básicas:

$$(1) \qquad Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t \qquad t = 1, 2, \ldots, 250$$

La información muestral disponible sobre las variables proporciona los siguientes datos:

$$\sum X_{1t} = 501,20 \qquad \sum X_{2t} = 45 \qquad \sum Y_t^2 = 280657,225$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0717 & -0,0139 & -0,2211 \\ & 0,0061 & 0,0092 \\ & & 1,1252 \end{bmatrix} \qquad X'Y = \begin{bmatrix} 7812,5 \\ 17730 \\ 1377,5 \end{bmatrix}$$

PARTE 1 (10 puntos)

1. Interpretar los coeficientes β_0, β_1 y β_2.

   - β_0 : valor esperado de Y cuando las variables explicativas X_1 y X_2 toman el valor 0.
   - β_1 : la variación esperada en Y cuando la variable explicativa X_1 aumenta en una unidad manteniéndose constante la variable X_2.
   - β_2 : la variación esperada en Y cuando la variable explicativa X_2 aumenta en una unidad manteniéndose constante la variable X_1.

2. ¿Cuál es la función objetivo para estimar los coeficientes según el criterio de Mínimos Cuadrados Ordinarios?

$$\min_{\hat{\beta}} \sum_{t=1}^{250} \hat{u}_t^2 = \sum_{t=1}^{250} (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_2 X_{2t})^2$$

3. Deriva las ecuaciones normales y escríbelas sustituyendo los valores muestrales.

   Para minimizar la función objetivo se obtienen las primeras derivadas respecto de los parámetros y se igualan a cero.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sum_{t=1}^{250} \hat{u}_t^2}{\partial \hat{\beta}_0} &= -2 \sum_{t=1}^{250} (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_2 X_{2t}) = 0 \\
\frac{\partial \sum_{t=1}^{250} \hat{u}_t^2}{\partial \hat{\beta}_1} &= -2 \sum_{t=1}^{250} (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_2 X_{2t})\, X_{1t} = 0 \\
\frac{\partial \sum_{t=1}^{250} \hat{u}_t^2}{\partial \hat{\beta}_2} &= -2 \sum_{t=1}^{250} (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_2 X_{2t})\, X_{2t} = 0
\end{aligned}$$

Las ecuaciones normales son:

$$\begin{aligned}
\sum Y_t &= T\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1t} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2t} && \rightarrow \quad 7812,5 = 250\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\, 501,2 + \hat{\beta}_2\, 45 \\
\sum Y_t\, X_{1t} &= \hat{\beta}_0 \sum X_{1t} + \hat{\beta}_1 \sum X_{1t}^2 + \hat{\beta}_2 \sum X_{2t}\, X_{1t} && \rightarrow \quad 17730 = \hat{\beta}_0\ 501,2 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1t}^2 + \hat{\beta}_2 \sum X_{2t}\, X_{1t} \\
\sum Y_t\, X_{2t} &= \hat{\beta}_0 \sum X_{2t} + \hat{\beta}_1 \sum X_{1t}\, X_{2t} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2t}^2 && \rightarrow \quad 1377,5 = \hat{\beta}_0\, 45 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1t}\, X_{2t} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2t}^2
\end{aligned}$$

Para obtener los valores muestrales que faltan, se necesita conocer la matriz $X'X$. Invirtiendo su inversa, se obtiene:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0717 & -0,0139 & -0,2211 \\ & 0,0061 & 0,0092 \\ & & 1,1252 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad X'X = \begin{bmatrix} 250 & 501,2 & 45 \\ & 1178,08 & 89,365 \\ & & 9,04 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
7812,5 &= 250\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\, 501,2 + \hat{\beta}_2\, 45 \\
17730 &= \hat{\beta}_0\ 501,2 + \hat{\beta}_1\, 1177,08 + \hat{\beta}_2\, 89,365 \\
1377,5 &= \hat{\beta}_0\, 45 + \hat{\beta}_1\, 89,365 + \hat{\beta}_2\, 9,04
\end{aligned}$$

4. Estima los coeficientes del modelo por Mínimos Cuadrados Ordinarios.

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} 0,0717 & -0,0139 & -0,2211 \\ & 0,0061 & 0,0092 \\ & & 1,1252 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7812,5 \\ 17730 \\ 1377,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,144 \\ 12,2323 \\ -14,2648 \end{bmatrix}$$

5. Escribe la recta de regresión muestral.

$$\hat{Y}_t = 9,144 + 12,2323\, X_{1t} - 14,2648\, X_{2t} \qquad t = 1, 2, \ldots, 250$$

6. ¿Qué valor se estima para la variable endógena cuando la variable X_1 toma el valor 10 y la variable X_2 el valor 20.

$$\hat{Y}_t = 9,144 + 12,2323\, X_{1t} - 14,2648\, X_{2t} = 9,144 + 12,2323 \times 10 - 14,2648 \times 20 = -153,8285$$

7. Calcula el coeficiente de determinación e interprétalo.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u}_t^2}{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$\sum \hat{u}_t^2 = \sum Y_t^2 - \hat{\beta}' X'Y = 280657,225 - [9,144 \;\; 12,2323 \;\; -14,2648] \begin{bmatrix} 7812,5 \\ 17730 \\ 1377,5 \end{bmatrix} = 11991,625$$

$$\sum (Y_t - \bar{Y})^2 = \sum Y_t^2 - T\bar{Y}^2 = 280657,225 - 250 \times \left(\frac{7812,5}{250}\right)^2 = 36516,6$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u}_t^2}{\sum (Y_t - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{11991,625}{36516,6} = 0,6716$$

El 67,16 % de la variabilidad de Y en la muestra está explicada por las variaciones de las variables explicativas X_1 y X_2 en términos lineales.

8. Estima la varianza de las perturbaciones.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{T - (k+1)} = \frac{11991,625}{250 - 3} = 48,549$$

9. Estima la matriz de covarianzas de los estimadores MCO ¿Cuál es la varianza estimada de $\hat{\beta}_1$? ¿y la covarianza entre $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$?

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 \, (X'X)^{-1} = 48,549 \begin{bmatrix} 0,0717 & -0,0139 & -0,2211 \\ & 0,0061 & 0,0092 \\ & & 1,1252 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3480,96 & -0,6748 & -10,7341 \\ & 0,2961 & 0,4467 \\ & & 54,6273 \end{bmatrix}$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_1) = 0,2961 \qquad \widehat{cov}(\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2) = 0,4467$$

10. Si en el modelo (1) se incluye un nuevo regresor X_3 que en la muestra disponible toma el valor 7 para todas las observaciones, ¿cómo estimarías los parámetros del nuevo modelo?

En este caso la columna de la matriz X correspondiente a la nueva variable X_3 sería una columna de sietes, es decir, un múltiplo exacto de la columna de unos. Existiría colinealidad perfecta en la matriz X por lo que no se cumple uno de los supuestos del modelo de regresión lineal. El rango de la matriz $X'X$ no sería completo y no se podría invertir por lo que no se podrían calcular los estimadores MCO.

PARTE 2 (4 puntos)

1. Explica cómo estimarías el modelo (1) incluyendo la restricción $\beta_2 = 0$.

   Se trata de estimar el modelo:

   $$(2) \quad Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t \qquad s.a.\ \beta_2 = 0$$

   Este modelo se puede estimar por Mínimos Cuadrados Restringidos:

   a) Se especifica el modelo restringido.

   $$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + u_t \qquad t = 1, 2, \ldots, 250$$

   b) Se estima el modelo restringido por MCO:

   $$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0^R \\ \hat{\beta}_1^R \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} T & \sum X_{1t} \\ \sum X_{1t} & \sum X_{1t}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum Y_t X_{1t} \end{bmatrix}$$

   Estimadores MCR del modelo (2): $[\hat{\beta}_0^R \quad \hat{\beta}_1^R \quad 0]$

2. ¿Y cómo estimarías el modelo (1) incluyendo las restricciones $\beta_0 = 2$ y $\beta_1 = 2\beta_2$?

   Mínimos Cuadrados Restringidos:

   a) Se especifica el modelo restringido.

   $$\begin{aligned} Y_t &= 2 + 2\beta_2 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t \\ Y_t - 2 &= \beta_2(2X_{1t} + X_{2t}) + u_t \\ Y_t^* &= \beta_2 X_t^* + u_t \end{aligned}$$

   b) Se estima el modelo restringido por MCO:

   $$\hat{\beta}_2^R = \frac{\sum Y_t^* X_t^*}{\sum X_t^{*2}}$$

   Estimadores MCR del modelo (2): $[2 \quad 2\hat{\beta}_2^R \quad \hat{\beta}_2^R]$

3. ¿La suma de cuadrados de los residuos en el modelo restringido será mayor o menor que el de modelo (1)? ¿Depende este resultado de si la restricción es cierta o no?

   Independientemente de si la restricción es cierta o no, la suma de cuadrados de los residuos del modelo restringido siempre es mayor que la del modelo no restringido al introducir una restricción en la estimación.

4. ¿Cuáles son las propiedades del estimador $\hat{\beta}^R$? ¿Dependen de si la restricción es cierta o no?

   Las propiedades del estimador $\hat{\beta}^R$ en el modelo restringido dependen directamente de si la restricción es cierta o no. Si la restricción es cierta el estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos es insesgado y tiene menor varianza que el estimador MCO. Si la restricción es falsa el estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos es sesgado aunque su varianza siga siendo menor que la del estimador MCO. Por lo tanto, si la restricción es cierta se eligiría el estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos y si es falsa el estimador MCO.