INTRODUCCIÓN A LA ECONOMETRÍA

3er curso LE y LADE

Tema 3b

Dpto. de Econometría y Estadística (EA3)

UPV—EHU

3.3 Contraste General para Restricciones Lineales.

Contraste de Restricciones Lineales: Ejemplo 1

- Recuérdese el MRLG sujeto a q restricciones lineales:

$$\underset{(T\times 1)}{Y} = \underset{(T\times K{+}1)}{X}\ \underset{(K{+}1\times 1)}{\beta} + \underset{(T\times 1)}{u},$$
$$H_0 : \underset{(q\times K{+}1)}{R}\ \underset{(K{+}1\times 1)}{\beta} = \underset{(q\times 1)}{r}.$$

- contrastes previos $\equiv$ casos especiales de R.L.s:
  1. Sea el MRLG con
     $q = 1$, $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ y $r = 0$:

$$H_0 : R\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_K \end{pmatrix} = \beta_2$$
$$= r = 0$$

es decir, $H_0 : \beta_2 = 0$;

el contraste de significatividad individual de X_2 .

Contraste de Restricciones Lineales: Ejemplo 2

- $H_0 : \underset{(q\times K{+}1)}{R}\ \underset{(K{+}1\times 1)}{\beta} = \underset{(q\times 1)}{r}.$
  3. Sean $q = 2$ restricciones tales que
     $R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ y $r = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$:
-

$$H_0 : R\beta = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_K \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2\beta_1 + 3\beta_2 \\ \beta_0 - 2\beta_3 \end{bmatrix}$$
$$= r = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

es decir, el MRLG bajo $H_0 : \begin{cases} 2\beta_1 + 3\beta_2 = 5 \\ \beta_0 - 2\beta_3 = 3 \end{cases}$

Contraste de Restricciones Lineales: Ejemplo 3

- $H_0 : \underset{(q\times K{+}1)}{R}\ \underset{(K{+}1\times 1)}{\beta} = \underset{(q\times 1)}{r}.$
  2. Sean $q = K$ restricciones tales que

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & | & \mathbf{I}_K \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \text{ y } r = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

-

$$H_0 : R\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_K & | & \mathbf{I}_K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta^\star \end{pmatrix} = \beta^\star$$
$$= r = \mathbf{0}$$

es decir, $H_0 : \beta^\star = \mathbf{0}$;

el contraste de significatividad conjunta de la regresión.

Contrastes de Restricciones Lineales: dn

- . . . entonces, ¿podemos tener un estadístico de contraste general que cubra todas las hipótesis de la forma

$$H_0: \underset{(q\times K+1)}{R}\ \underset{(K+1\times 1)}{\beta} = \underset{(q\times 1)}{r} \quad ?$$

- Dado que $\quad \widehat{\beta} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1}), \quad$ tenemos que

$$R\widehat{\beta} \sim \mathcal{N}(R\beta, \sigma^2 R(X'X)^{-1}R')$$

- Como antes, estandarizando $R\widehat{\beta}$ y escribiendo la SC,

$$\frac{(R\widehat{\beta} - R\beta)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\widehat{\beta} - R\beta)}{\sigma^2} \sim \chi^2(q)$$

- Por lo tanto (recouérdese que cambiar $\sigma^2 \to \widehat{\sigma}^2$):

$$\boxed{\frac{(R\widehat{\beta} - R\beta)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\widehat{\beta} - R\beta)/q}{\widehat{\sigma}^2} \sim \mathcal{F}^q_{T-K-1}}$$

Contraste General de Restric Lineales: regla

- ¿Qué Contraste? $\left\{ H_0 : R\beta = r \right.$
- **Recuérdese:** Hipótesis $\rightsquigarrow$ estadístico $\rightsquigarrow$ regla. . .
- Contraste de restricciones lineales:
  - Hipótesis: $H_0 : R\beta = r$ frente a $H_a : R\beta \neq r$
  - Estadístico:

$$F = \frac{(R\widehat{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\widehat{\beta} - r)/q}{\widehat{\sigma}^2} \sim \mathcal{F}^q_{T-K-1} \text{ bajo } H_0 :$$

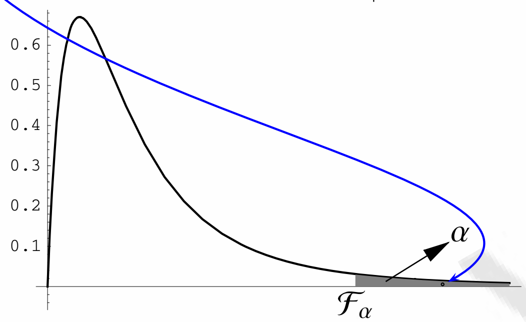
  - Regla: $\quad F > \mathcal{F}_\alpha(q, T–K–1) \quad \Rightarrow \quad$ rechazar H_0 :
    $\Rightarrow \quad$ restricciones lineales no son (conjuntamente) ciertas.

Contraste General de Restric Lineales: regla (co

- Regla: $F > \mathcal{F}_\alpha(q, T–K–1) \quad \Rightarrow \quad$ rechazar H_0 :
-

nivel de significación $\alpha = 5\,\% = 0{,}05$

región de confianza | región critica



región de confianza | región critica

3.4 Contrastes basados en la Suma de Cuadrados Residuales.

Contraste General de Restric Lineales: regla 2

- Hipótesis: $H_0 : R\beta = r$ frente a $H_a : R\beta \neq r$
- Estadístico:

$$F = \frac{(R\widehat{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\widehat{\beta} - r)/q}{\widehat{\sigma}^2}$$

- utilizando el resultado $\widehat{\beta}_R = (I - AR)\widehat{\beta} + Ar$, el numerador es la diferencia entre SCs:

$$F = \frac{(\text{SCR}_R - \text{SCR})/q}{\text{SCR}/(T\text{–}K\text{–}1)} \sim \mathcal{F}^q_{T\text{-}K\text{-}1} \text{ bajo } H_0 :$$

- Regla: $F > \mathcal{F}_\alpha(q, T\text{–}K\text{–}1) \quad \Rightarrow$ rechazar H_0 :
  $\Rightarrow$ restricciones lineales no son (conjuntamente) ciertas.

Contraste General de Restric Lineales: Resumen

- Hipótesis: $H_0 : R\beta = r$ frente a $H_a : R\beta \neq r$
- Estadístico:

$$F = \frac{(R\widehat{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\widehat{\beta} - r)/q}{\widehat{\sigma}^2}$$
$$= \frac{(\text{SCR}_R - \text{SCR})/q}{\text{SCR}/(T\text{–}K\text{–}1)} \sim \mathcal{F}^q_{T\text{-}K\text{-}1} \text{ bajo } H_0 :$$

- Regla: $F > \mathcal{F}_\alpha(q, T\text{–}K\text{–}1) \quad \Rightarrow$ rechazar H_0 :
  $\Rightarrow$ restricciones lineales no son ciertas (conjuntamente).
- Nota: la forma SC necesita estimar la regresión dos veces: una con restricciones y otra sin ellas.
- y, por supuesto, también puede utilizarse para contrastar la significatividad individual, la significatividad conjunta, restricciones informativas, etc.

Contraste basado en SC: Ej Cobb-Douglas

- Hipótesis: $H_0 : \beta_L + \beta_K = 1$ frente a $H_a : \beta_L + \beta_K \neq 1$
- Estadístico:
  - $$\widehat{\nu} = \widehat{\beta}_L + \widehat{\beta}_K$$
    $$= 0{,}67 + 0{,}27 = 0{,}89$$
  - $$S_{\widehat{\nu}} = \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{\beta}_L) + \widehat{\text{Var}}(\widehat{\beta}_K) + 2\widehat{\text{Cov}}(\widehat{\beta}_L, \widehat{\beta}_K)}$$
    $$= \widehat{\sigma}\sqrt{a_{11} + a_{22} + 2a_{12}}$$
    $$= 2\sqrt{4 + 7 + 2(-1)} = 2\sqrt{9} = 6$$
  - $$t = \frac{\widehat{\nu} - 1}{S_{\widehat{\nu}}}$$
    $$= \frac{0{,}89 - 1}{6} = \frac{-0{,}11}{6} = -0{,}018.$$
- Regla: $|t| = 0{,}018 < t_{0{,}025}(50) = 2{,}01 \quad \Rightarrow$ no rechazar H_0 :
  $\Rightarrow$ la hipótesis de "rendimientos de escala constantes.[es] apoyada por los datos.

Contraste basado en SC: Ej Cobb-Douglas (2)

- Alternativamente, utilizar forma SC para calcular este ratio t:
  sin restricciones:
  $\log Y = \alpha + \beta_L \log L + \beta_K \log K + u, \quad \rightsquigarrow \quad \text{SCR} = 200$
- restringido: $\log Y = \alpha + \beta_L \log L + (1 - \beta_L) \log K + u$
  $$\log(Y/K) = \alpha + \beta_L \log(L/K) + u, \quad \rightsquigarrow \quad \text{SCR}_R = 200{,}001296$$
- $$F = \frac{(\text{SCR}_R - \text{SCR})/q}{\text{SCR}/(T\text{–}K\text{–}1)}$$
  $$= \frac{(200{,}001296 - 200)/1}{200/50} = \frac{,001296}{4} = 0{,}000324$$
  $$< \mathcal{F}_{0{,}05}(1, 50) = 4{,}04$$
- o (recuérdese que $t(m) = \sqrt{\mathcal{F}(1, m)}$)
  $$t = \sqrt{F} = \sqrt{0{,}000324} = 0{,}018$$
  $$< t_{0{,}05}(50) = 2{,}01$$

Contraste General: Ejemplo 2

- MRLG con $q=2$, $R=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & 0 & -2 & \dots & 0\end{bmatrix}$ y $r=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$:

$$R\widehat{\beta}=\begin{bmatrix}d_1'\widehat{\beta}\\ d_2'\widehat{\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\widehat{\beta}_1+3\widehat{\beta}_2\\ \widehat{\beta}_0-2\widehat{\beta}_3\end{bmatrix}$$

-

$$R(X'X)^{-1}R'=\begin{bmatrix}d_1'(X'X)^{-1}d_1 & d_1'(X'X)^{-1}d_2\\ d_2'(X'X)^{-1}d_1 & d_2'(X'X)^{-1}d_2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4a_{11}+9a_{22}+12a_{12} & 2a_{10}-4a_{13}+3a_{02}-6a_{23}\\ & a_{00}+4a_{33}-4a_{03}\end{bmatrix}$$

- Por lo tanto $F=$
$$\frac{\begin{bmatrix}2\beta_1+3\beta_2-5 & \beta_0-2\beta_3-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4a_{11}+9a_{22}+12a_{12} & 2a_{10}-4a_{13}+3a_{02}-6a_{23}\\ & a_{00}+4a_{33}-4a_{03}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\beta_1+3\beta_2-5\\ \beta_0-2\beta_3-3\end{bmatrix}/2}{\widehat{\sigma}^2}$$
$\sim \mathcal{F}^2_{T-K-1}$ bajo H_0 :
- *es decir*, un estadístico “F” para contrastar dos restricciones lineales conjuntamente.

Contraste General: Ejemplo 2

- Alternativamente (más fácil), utilizar forma SC para calcular este estadístico F:

$$H_0:\begin{cases}2\beta_1+3\beta_2=5\\ \beta_0-2\beta_3=3\end{cases}$$
$$\beta_1=\frac{5-3\beta_2}{2},\qquad \beta_0=3+2\beta_3$$

- sin restricciones:
$$Y=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\beta_3X_3+\beta_4X_4\dots+u \rightsquigarrow \text{SCR}$$
- restringido:
$$Y=(3+2\beta_3)+(2{,}5-1{,}5\beta_2)X_1+\beta_2X_2+\beta_3X_3+\beta_4X_4\dots+u$$
$$\underbrace{Y-3-2{,}5X_1}_{Y^*}=\beta_2\underbrace{(X_2-1{,}5X_1)}_{X_2^*}+\beta_3\underbrace{(X_3+2)}_{X_3^*}+\beta_4X_4\dots+u$$
$$Y^*=\beta_2X_2^*+\beta_3X_3^*+\beta_4X_4\dots+u \rightsquigarrow \text{SCR}_R$$
- y $F=\frac{(\text{SCR}_R-\text{SCR})/q}{\text{SCR}/(T-K-1)}$, etc.

Contraste General: Ejemplo 3

- MRLG con $q=K$, $R=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_K & | & \mathbf{I}_K\end{bmatrix}$ y $r=\mathbf{0}_K$:

$$R\widehat{\beta} \rightsquigarrow \text{selecciona } \beta^\star$$
$$R(X'X)^{-1}R' \rightsquigarrow \text{selecciona } \begin{bmatrix}a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0K}\\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1K}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{K0} & a_{K1} & \dots & a_{KK}\end{bmatrix}=(x'x)^{-1}$$

- Por lo tanto:
$$F=\frac{(\widehat{\beta}^\star-0)'[(x'x)^{-1}]^{-1}(\widehat{\beta}^\star-0)/K}{\widehat{\sigma}^2}=\frac{\widehat{\beta}^{\star\prime}\,x'x\,\widehat{\beta}^\star/K}{\widehat{\sigma}^2}$$
- *es decir*, el estadístico“F” habitual para contrastar la significación conjunta de la regresión.

Contraste General: Ejemplo 3

- Alternativamente, utilizar forma SC para calcular esta F:

sin restricciones: $Y=\beta_0+\beta_1X_1+\dots+\beta_KX_K+u \rightsquigarrow$ SCR

restringido: $Y=\beta_0+u \rightsquigarrow \text{SCR}_R=\text{SCT}$

- Estadístico:
$$F=\frac{(\text{SCR}_R-\text{SCR})/q}{\text{SCR}/(T-K-1)}=\frac{(\text{SCT}-\text{SCR})/K}{\text{SCR}/(T-K-1)}=\frac{\text{SCE}/K}{\text{SCR}/(T-K-1)}=\frac{R^2/K}{(1-R^2)/(T-K-1)}$$

obteniendo la misma formula que antes.

3.5 Predicción por Punto e Intervalo de Predicción.

Predicción

- Capítulos anteriores: **Especificación, Estimación y Validación**.
- Este capítulo: Fase final: **Uso = Predicción**.
- Punto de partida: modelo apropiado para describir el comportamiento de la variable Y:

Especificación del Modelo
$\Downarrow$
Estimación de los Parámetros
$\Downarrow$
Validación y Contraste de Hipótesis

-

$\Downarrow$

resultado no satisfactorio	resultado satisfactorio
$\Downarrow$	$\Downarrow$
re-especificar modelo	ir a la fase de predicción

Concepto

- Series temporales: predicción (de valores futuros) $\Rightarrow$ Previsión
- Sección cruzada: predicción (de los valores no observados) $\Rightarrow$ Simulación
- En general: predicción $\Rightarrow$ respuesta a preguntas del tipo…“¿y si…?”, *es decir ¿qué valor tomaría Y si $X = X_p$?*

Elementos Básicos

- Modelo o FRP:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \cdots + \beta_K X_{Kt} + u_t$$
$$Y_t = X_t'\beta + u_t, \quad t = 1, \ldots, T.$$

- Modelo estimado o FRM:

$$\widehat{Y}_t = X_t'\widehat{\beta}, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{8}$$

- Observación a predecir: con subíndice $p =$ (normalmente $p \notin [1, T]$):

$$Y_p = X_p'\beta + u_p. \tag{9}$$

- Perturbaciones aleatorias u_p:

$$\mathsf{E}(u_p) = 0, \quad \mathsf{E}(u_p^2) = \sigma^2, \quad \mathsf{E}(u_p u_s) = 0 \quad \forall s \neq p.$$

- Valor conocido del vector X_p' .

Predicción por Punto

- Sustituyendo en FRM (8):

$$\boxed{\widehat{Y}_p = X_p' \, \widehat{\beta}.} \qquad (10)$$

es decir, valor numérico como aproximación al valor desconocido.

Error de Predicción

- El error cometido (al tomar $\widehat{Y}_p$ en vez del verdadero Y_p) es

$$e_p = Y_p - \widehat{Y}_p,$$

- que puede expresarse como:
- una función de las dos fuentes de error introducidas en la predicción.
- Bajo normalidad:

$$(\widehat{\beta} - \beta) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 (X'X)^{-1}), \quad \text{y} \quad u_p \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

- de modo que

$$\boxed{e_p \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)},$$

- donde la varianza del error de predicción es:

$$\sigma_e^2 = X_p' \underbrace{\text{Var}(\widehat{\beta})}_{\sigma^2 (X'X)^{-1}} X_p + \underbrace{\text{Var}(u_p)}_{\sigma^2} + \underbrace{\text{Cov}(\widehat{\beta}, u_p)}_{0}$$
$$= \sigma^2 (1 + X_p' (X'X)^{-1} X_p).$$

Intervalo de Predicción

- Error de predicción estandarizado:

$$\frac{e_p - 0}{\sigma_e} = \frac{e_p}{\sigma \sqrt{1 + X_p'(X'X)^{-1} X_p}} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

- Recuérdese como al cambiar $\sigma \to \widehat{\sigma} \quad \Rightarrow \quad$!¡$\mathcal{N}(0,1) \to t$!!, luego

$$\frac{e_p}{\widehat{\sigma}_e} = \frac{e_p}{\widehat{\sigma} \sqrt{1 + X_p'(X'X)^{-1} X_p}} \sim t(T\text{–}K\text{–}1).$$

- Por lo tanto: $$Pr(-t_{\alpha/2} \leq \frac{e_p}{\widehat{\sigma}_e} \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha,$$

- y despejando Y_p :

$$Pr(\widehat{Y}_p - \widehat{\sigma}_e t_{\alpha/2} \leq Y_p \leq \widehat{Y}_p + \widehat{\sigma}_e t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

- Luego, el intervalo de confianza $(1 - \alpha)$ para Y_p es:

$$IC(Y_p)_{(1-\alpha)} = \left[\widehat{Y}_p \pm \widehat{\sigma}_e \, t_{\alpha/2} \right],$$

el cual mide la precisión de la predicción por punto.

Predicción: Ejemplo

- en el ejemplo anterior (fn Cobb-Douglas linealizada :)

$$\widehat{\log Y}_t = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}_L \log L_t + \widehat{\beta}_K \log K_t, \quad T = 53;$$
$$\widehat{\log Y}_t = 2{,}10 + 0{,}67 \log L_t + 0{,}32 \log K_t, \quad \widehat{\sigma}^2 = 4$$

- "¿Qué valor tomaría Y_p si $\log L_p = 2{,}5; \log K_p = 2{,}0$?":
- $X_p' = \begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 & 2{,}0 \end{bmatrix}$
-

$$\widehat{\log Y_p} = X_p' \widehat{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 & 2{,}0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}10 \\ 0{,}67 \\ 0{,}32 \end{bmatrix}$$
$$= 2{,}10 + 0{,}67 \cdot 2{,}5 + 0{,}32 \cdot 2{,}0 = 4{,}42$$

Predicción: Ejemplo

- Construir un IC del $95\,\%$ para el verdadero Y_p:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_e^2 &= \sigma^2(1 + X_p'(X'X)^{-1}X_p) \\
&= 4\left(1 + \begin{bmatrix}1 & 2{,}5 & 2{,}0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 7\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 2{,}5 \\ 2{,}0\end{bmatrix}\right) \\
&= 4\left(1 + \begin{bmatrix}2 & 8 & 11{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 2{,}5 \\ 2{,}0\end{bmatrix}\right) \\
&= 4\,(1 + 45) = 4 \cdot 46 = 184
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
CI(\log Y_p)_{0{,}95} &= \left[\widehat{\log Y_p} \pm \widehat{\sigma}_e\, t_{0{,}025}(50)\right] \\
&= \left[4{,}42 \pm \sqrt{184} \cdot 2{,}01\right] \\
&= [4{,}42 \pm 27{,}25] \\
&= [-22{,}84 \quad ; \quad 31{,}68]
\end{aligned}
$$