



Integración Numérica

Introducción

La integración numérica es una herramienta esencial que se usa tanto en ciencia como en ingeniería para obtener valores aproximados de integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente ya sea porque la función que se trata de integrar no tiene primitiva o bien porque dicha función no se conoce en forma analítica sino que solo se dispone en forma tabulada, por ejemplo datos procedentes de un experimento.

El objetivo de este tema es desarrollar los principios básicos de la integración numérica.

Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio

Nuestro objetivo es aproximar la integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ evaluando $f(x)$ en un número finito de puntos.

Definición. Supongamos que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_M = b$. Una fórmula del tipo

$$Q[f] = \sum_{k=0}^M w_k f(x_k) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_M f(x_M)$$

de manera que

$$\int_a^b f(x) dx = Q[f] + E[f]$$

se llama fórmula de **integración numérica** o de **cuadratura**; el término $E[f]$ se llama **error de truncatura** de la fórmula; los valores $\{x_k\}_{k=0}^M$ se llaman nodos de **integración** o **nodos de cuadratura** y los valores $\{w_k\}_{k=0}^M$ se llaman **pesos** de la fórmula

Los nodos $\{x_k\}$ se eligen de diferentes maneras, dependiendo de la situación concreta en la que queramos aplicar una fórmula. Para la regla del trapecio o la regla de Simpson, los nodos se toman igualmente espaciados. Para las fórmulas de Gauss-Legendre, los nodos que se toman son raíces de polinomios de Legendre. Un aspecto importante en todas las aplicaciones será también el conocimiento del grado de precisión de la solución numérica.

La forma más sencilla de obtener una fórmula de cuadratura es sustituir la función $f(x)$ por el polinomio que interpola a $f(x)$ en los nodos:

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot l_i(x)$$

$$\int_a^b f(x) \approx \int_a^b p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \underbrace{\left(\int_a^b l_i(x) dx \right)}_{A_i}$$

El error cometido :

$|E_n(f)| = \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - p_n(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - p_n(x)| dx = \int_a^b |e(x)| dx$ A una fórmula de cuadratura obtenida de esta forma se denomina *fórmula de tipo interpolatorio*.

Definición. El **grado de precisión** de una fórmula de cuadratura es el número natural n que verifica :

$$E[P_i] = 0$$

para todos los polinomios $P_i(x)$ de grado $i < n$, y existe un polinomio $P_{n+1}(x)$ de grado $n+1$ tal que $E[P_{n+1}] \neq 0$.

Se puede demostrar que una fórmula de cuadratura es de tipo interpolatorio si y solo si, utilizando $n+1$ nodos, tiene grado de precisión " n ".

Integrando el término de error cometido en la interpolación se puede obtener el término de error correspondiente a las distintas fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio. La forma general del error de truncatura sea

$$E[f] = K f^{(n+1)}(c),$$

donde K es una constante adecuada y n es el grado de precisión de la fórmula.

Fórmulas de Newton Cotes

Las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes son fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio obtenidas para nodos igualmente espaciados. Tal como se ha explicado de forma general cada una de estas fórmulas se calcula integrando el polinomio interpolador correspondiente.

Existen dos tipos de fórmulas, las cerradas y las abiertas.

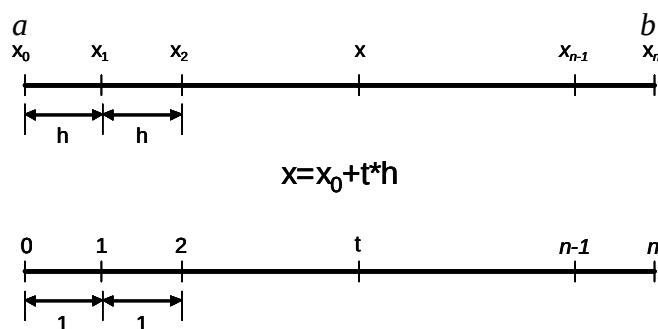
Las fórmulas cerradas son aquellas en las que los extremos del intervalo de integración son dos de los nodos utilizados para la obtención de la fórmula, es decir, a y b son dos de los nodos utilizados para calcular el polinomio interpolador que posteriormente será integrado. Las fórmulas abiertas son aquellas en las que los extremos del intervalo de integración no forman parte de la fórmula.

Fórmulas cerradas

En este apartado se desarrollará el método de cálculo de las fórmulas cerradas de forma general, y posteriormente se particularizará para obtener algunas de las fórmulas mas empleadas.

Tal como se explicó en apartados anteriores la integral definida entre a y b se puede expresar como: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx + R(f)$, de manera que se aproxima la integral definida mediante la integral del polinomio interpolador que pasa por $n+1$ puntos igualmente espaciados en el intervalo a, b . El error cometido se calcula integrando el error del polinomio interpolador en el mismo intervalo.

Para simplificar el cálculo y poder generalizarlo a cualquier intervalo a, b , se realiza un cambio de variable, tal como se hizo en el tema de interpolación para realizar el cálculo del polinomio interpolador por el método de Newton mediante diferencias finitas.



En el gráfico se puede ver que la distancia entre nodos viene determinada por el valor $h = \frac{b-a}{n}$ y que la relación entre la variable x y la variable t permite calcular $dx = h \cdot dt$.

Realizando este cambio de variable se tiene lo siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^n q(t) \cdot h \cdot dt + R(f) \Rightarrow I = \int_0^n q(t) \cdot h \cdot dt$$

Se debe calcular por tanto la integral $\int_0^n q(t) \cdot h \cdot dt = h \int_0^n q(t)dt$.

Siendo $q(t) = \sum_{i=0}^n \Delta^i f(x_0) \binom{t}{i} \Rightarrow h \int_0^n q(t)dt = h \sum_{i=0}^n \left(\Delta^i f(x_0) \int_0^n \binom{t}{i} dt \right)$. Así las fórmulas de integración de Newton Cotes cerradas se obtienen integrando los polinomios interpoladores de Newton mediante diferencias finitas.

En cuanto al error en la integral, éste se calcula a partir del error cometido al sustituir la función $f(x)$ por el polinomio $p(x)$. En el tema de interpolación se estudió el error cometido mediante la expresión

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \Pi(x).$$

El error en el cálculo de la integral será por tanto $R(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \Pi(x)dx$.

Al realizar este estudio. Aparecen dos situaciones distintas, en función del valor que toma n .

Para valores de n impar, se realiza el cálculo mediante el cambio de variable anteriormente explicado

$$R(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \Pi(x) dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \int_a^b \Pi(x) dx \quad . \quad \text{Basta saber que}$$

$\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ y que realizando el cambio de variable $x = x_0 + t \cdot h$, resulta:

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \Rightarrow (h \cdot t) \cdot h \cdot (t-1) \cdot h \cdot (t-2) \cdot \dots \cdot h \cdot (t-n)$$

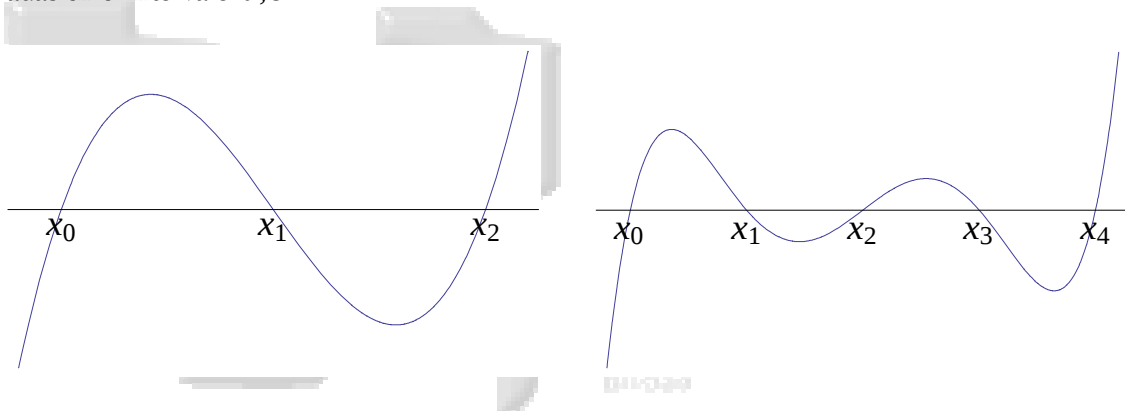
Por tanto:

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \int_a^b \Pi(x) dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \int_0^n h^{n+1} t(t-1)\dots(t-n) \cdot h \cdot dt = K \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} h^{n+2}$$

En el caso de fórmulas en las que n es par, si se realiza de la misma forma el cálculo,

$$R(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \Pi(x) dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \int_a^b \Pi(x) dx \quad . \quad \text{El resultado de la integral es cero. La integral}$$

$\int_a^b \Pi(x) dx$ se anula ya que se trata de integrar un polinomio que tiene $n+1$ raíces distintas, igualmente espaciadas en el intervalo a, b



Esto quiere decir que las fórmulas de integración de Newton Cotes en las que n es par, son de orden $n+1$, puesto que el error no es función de $f^{(n+1)}(\xi)$, sino que será función de $f^{(n+2)}(\xi)$.

El error no está en un polinomio de grado $n+1$ ($\Pi(x)$) sino en un polinomio de grado $n+2$. Este polinomio es $x \cdot \Pi(x)$.

$$\text{El error se calcula mediante la expresión : } R(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{n+2!} x \cdot \Pi(x) dx \quad .$$

Para realizar este cálculo se procede mediante el cambio de variable ya utilizado $x = x_0 + h \cdot t$, con lo que la

$$\text{expresión resultante es: } R(f) = \int_0^n \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{n+2!} (x_0 + h \cdot t) \cdot [h \cdot t \cdot h \cdot (t-1) \dots h \cdot (t-n)] h \cdot dt$$

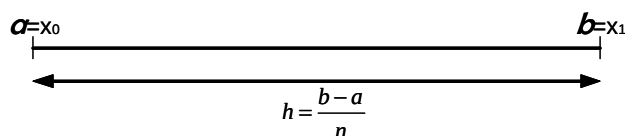
$$\begin{aligned}
 R(f) &= \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{n+2!} \int_0^n (x_0) \cdot [h \cdot t \cdot h \cdot (t-1) \dots h \cdot (t-n)] h \cdot dt \\
 &+ \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{n+2!} \int_0^n (h \cdot t) \cdot [h \cdot t \cdot h \cdot (t-1) \dots h \cdot (t-n)] h \cdot dt = \\
 &= 0 + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{n+2!} h^{n+3} \int_0^n t^2 \cdot (t-1) \dots (t-n) \cdot dt
 \end{aligned}$$

De este modo queda reducido el cálculo del error a resolver una integral definida en variable t :

$$R(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{n+2!} h^{n+3} \int_0^n t^2 \cdot (t-1) \dots (t-n) \cdot dt$$

Cálculo de las fórmulas.

$n=1$



En este caso se trata de una fórmula en que se dispone de dos nodos $a = x_0$ y $b = x_1$.

El cálculo de la fórmula se realiza, tal y como se ha explicado de forma general:

$$I = \int_0^1 q(t) \cdot h \cdot dt = h \int_0^1 \left(f(x_0) + \Delta f(x_0) \cdot t \right) \cdot dt = h \left[f(x_0) \cdot t + \Delta f(x_0) \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^1$$

$$I = h \left[f(x_0) + \frac{1}{2} \Delta f(x_0) \right] = h \left[f(x_0) + \frac{1}{2} (f(x_1) - f(x_0)) \right] = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1))$$

El error de la fórmula se obtiene como: $R(f) = \int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \Pi(x) dx = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \int_a^b (x-a)(x-b) dx$.

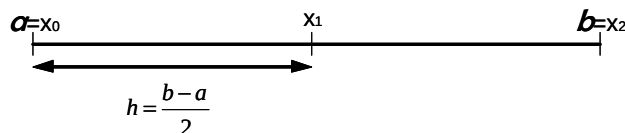
Haciendo el cambio de variable resulta:

$$R(f) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \int_0^1 h \cdot t \cdot h \cdot (t-1) \cdot h \cdot dt = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \cdot h^3 \int_0^1 t \cdot (t-1) \cdot dt = -\frac{h^3 \cdot f^{(2)}(\xi)}{12}$$

La fórmula completa es:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3 \cdot f''(\xi)}{12}$$

$n=2$



En este caso la distancia entre nodos es: $h = \frac{b-a}{2}$.

Cálculo de la fórmula:

$$I = \int_0^2 q(t) \cdot h \cdot dt = h \int_0^2 \left(f(x_0) + \Delta f(x_0) \cdot t + \Delta^2 f(x_0) \cdot \frac{t(t-1)}{2} \right) \cdot dt =$$

$$= h \left[f(x_0) \cdot t + \Delta f(x_0) \cdot \frac{t^2}{2} + \Delta^2 f(x_0) \cdot \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} \right) \right]_0^2$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

$$\Delta^2 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0) \text{ , sustituyendo en la expresión y operando resulta:}$$

$$I = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

En cuanto a la expresión del error, se debe tener en cuenta que se trata de una fórmula con n par. Esto implica que se trata de una fórmula de integración de orden $n+1$.

$$\text{La expresión de cálculo del error es por tanto: } R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} h^5 \int_0^2 t^2 \cdot (t-1)(t-2) \cdot dt.$$

$$\text{Operando en la expresión se obtiene: } R(f) = -\frac{h^5 \cdot f^{(iv)}(\xi)}{90}$$

La fórmula completa es:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5 \cdot f^{(iv)}(\xi)}{90}$$

Otras fórmulas cerradas

$$n=3 \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{3h}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)) - \frac{3 \cdot h^5 \cdot f^{(iv)}(\xi)}{80}$$

$$n=4 \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{2h}{45} (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)) - \frac{8 \cdot h^7 \cdot f^{(vi)}(\xi)}{945}$$

Cálculo con *Mathematica*:

Fórmulas de Newton - Cotes cerradas

```

formula[n_] := Integrate[h * InterpolatingPolynomial[Table[{i, f[xi]}, {i, 0, n}], t], {t, 0, n}] // Simplify // TraditionalForm

error[n_] := If[OddQ[n],
  h^{n+2} * D[f[x], {x, n+1}] /. x -> xi * Integrate[Product[(t-i), {i, 0, n}], {t, 0, n}] // Simplify // TraditionalForm,
  h^{n+3} * D[f[x], {x, n+2}] /. x -> xi * Integrate[Product[(t-i), {i, 0, n}] * t, {t, 0, n}] // Simplify // TraditionalForm]

Column[Table[formula[n] + error[n], {n, 1, 5}]]

```

$$\frac{1}{2} h (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{1}{12} h^3 f''(\xi)$$

$$\frac{1}{3} h (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

$$\frac{3}{8} h (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)) + \frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

$$\frac{2}{45} h (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)) + \frac{8}{945} h^7 f^{(6)}(\xi)$$

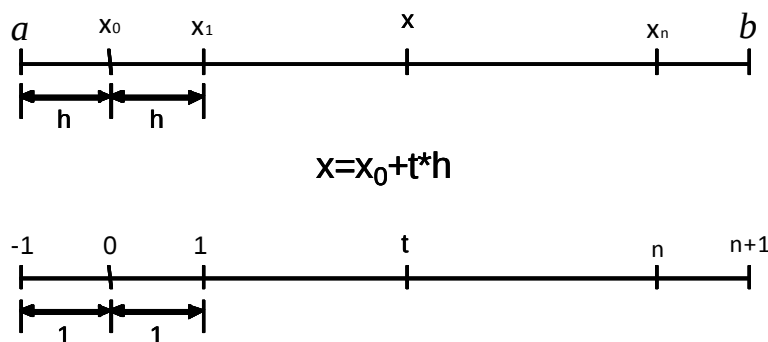
$$\frac{5}{288} h (19f(x_0) + 75f(x_1) + 50f(x_2) + 50f(x_3) + 75f(x_4) + 19f(x_5)) + \frac{275}{12096} h^7 f^{(6)}(\xi)$$

Fórmulas abiertas

Las fórmulas abiertas son aquellas en que los extremos del intervalo de integración no forman parte de la fórmula.

El proceso de cálculo de las fórmulas abiertas es idéntico al de las fórmulas cerradas, salvo en dos cuestiones. En primer lugar, dado que no interviene los extremos del intervalo en la fórmula, se puede comenzar trabajando con una fórmula en que solo intervenga un nodo ($n=0$). Por otro lado, dado que los extremos del intervalo no forman parte de la fórmula, al realizar el cambio de variable para integrar el polinomio interpolador, los extremos del intervalo no serán 0 y n como veremos más adelante.

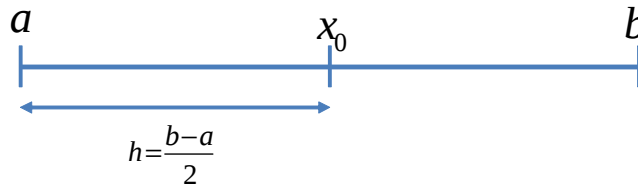
Para realizar el cálculo de las fórmulas, se cambia a la variable t . Los nodos están igualmente espaciados y separados una distancia h . De forma general, el valor de h se calcula como $h = \frac{b-a}{n+2}$ debido a que los extremos del intervalo no forman parte de la fórmula. Como el extremo inferior del intervalo no forma parte de la fórmula de integración, x_0 es por tanto $a+h$. Por tanto en la variable t el intervalo de integración va desde -1 hasta $n+1$.



En cuanto a la expresión del error cometido al realizar el cálculo de la integral, sucede lo mismo que en las fórmulas cerradas. Al tratarse de nodos igualmente espaciados, las fórmulas de integración con n par, son de orden $n+1$ mientras que las fórmulas de integración con n impar son de orden n . El cálculo se realiza de la misma manera que se realizó para las fórmulas cerradas, salvo que los extremos del intervalo de integración son -1 y $n+1$.

Cálculo de las fórmulas.

$n=0$



Solamente hay un nodo, por tanto el polinomio interpolador que se obtiene es una constante $q(t) = f(x_0)$.

Tal como se aprecia en el gráfico, el valor de h es $\frac{b-a}{2}$. En general, para cualquier fórmula abierta,

$$h = \frac{b-a}{2+n}.$$

La fórmula de integración se obtiene como:

$$I = \int_{-1}^1 q(t) \cdot h \cdot dt = h \cdot \int_{-1}^1 f(x_0) dt = h \cdot f(x_0) \cdot [t]_{-1}^1 = 2 \cdot h \cdot f(x_0).$$

El error en la fórmula se calcula como en las fórmulas en las que n es par:

$$R(f) = \int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} x \cdot \Pi(x) dx = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \int_a^b x(x-x_0) dx = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \int_{-1}^1 (x_0 + t \cdot h)(t \cdot h) \cdot h \cdot dt.$$

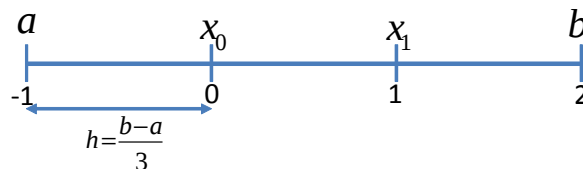
$$\text{Operando resulta: } R(f) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} h^2 \int_{-1}^1 (x_0) \cdot t \cdot dt + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} h^3 \int_{-1}^1 t^2 \cdot dt = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} h^3 \int_{-1}^1 t^2 \cdot dt.$$

$$\text{Por tanto } R(f) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} h^3 \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{h^3 \cdot f^{(2)}(\xi)}{3}.$$

$$\text{La fórmula completa para } n=0 \text{ es: } \int_a^b f(x) \cdot dx = 2 \cdot h \cdot f(x_0) + \frac{h^3 \cdot f^{(2)}(\xi)}{3}.$$

A esta fórmula se la conoce con el nombre de fórmula del punto medio.

$n=1$



$$\text{El polinomio interpolador en este caso, en variable } t \text{ es: } q(t) = f(x_0) \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta f(x_0) \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$q(t) = f(x_0) + (f(x_1) - f(x_0))t.$$

La fórmula de integración resulta por tanto: $I = \int_{-1}^2 (f(x_0) + (f(x_1) - f(x_0))t) \cdot h \cdot dt$

$$I = h \cdot \left[f(x_0) \cdot t + (f(x_1) - f(x_0)) \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^2 = \frac{3h}{2} (f(x_0) + f(x_1))$$

El error de la fórmula se obtiene como: $R(f) = \int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \Pi(x) dx = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \int_a^b (x - x_0)(x - x_1) dx.$

Haciendo el cambio de variable resulta:

$$R(f) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \int_{-1}^2 h \cdot t \cdot h \cdot (t-1) \cdot h \cdot dt = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \cdot h^3 \int_{-1}^2 t \cdot (t-1) \cdot dt = \frac{3 \cdot h^3 \cdot f^{(2)}(\xi)}{4}$$

La formula completa es: $\int_a^b f(x) \cdot dx = \frac{3h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{3 \cdot h^3 \cdot f^{(2)}(\xi)}{4}$

Cálculo con *Mathematica*:

Fórmulas de Newton - Cotes abiertas

```
n[1]= formula[n_]:=Integrate[h*InterpolatingPolynomial[Table[{i, f[xi]}, {i, 0, n}], t], {t, -1, n+1}]//Simplify//TraditionalForm
n[2]= error[n_]:=If[OddQ[n],
  h^n-2 * D[f[x], {x, n+1}]/(n+1)! * Integrate[(t-i), {t, -1, n+1}]//Simplify//TraditionalForm,
  h^n-3 * D[f[x], {x, n+2}]/(n+2)! * Integrate[(t-i) * t, {t, -1, n+1}]//Simplify//TraditionalForm]
n[3]= Column[Table[formula[n] + error[n], {n, 0, 5}]]
Out[3]=
2 h f(x0) + 1/3 h^3 f''(xi)
3/2 h (f(x0) + f(x1)) + 3/4 h^3 f''(xi)
4/3 h (2 f(x0) - f(x1) + 2 f(x2)) + 14/45 h^5 f^(4)(xi)
5/24 h (11 f(x0) + f(x1) + f(x2) + 11 f(x3)) + 95/144 h^5 f^(4)(xi)
3/10 h (11 f(x0) - 14 f(x1) + 26 f(x2) - 14 f(x3) + 11 f(x4)) + 41/140 h^7 f^(6)(xi)
7 h (611 f(x0) - 453 f(x1) + 562 f(x2) - 562 f(x3) - 453 f(x4) + 611 f(x5)) + 5257 h^7 f^(6)(xi)
1440 8640
```

Fórmulas de Newton Cotes compuestas

Tal como se ha podido ver en el estudio de las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes, cuando la fórmula de integración es de orden p , el error cometido es: $R(f) = \frac{K \cdot h^{p+2} \cdot f^{(p+1)}(\xi)}{p+1!}.$

El único valor sobre el que se puede actuar para disminuir el error es h . Para disminuir el error, por tanto se deberá disminuir el valor de h , lo que implica aumentar el número de nodos de la fórmula.

Sin embargo, tal y como ocurría en el caso de la interpolación, aumentar el número de nodos de la fórmula no implica disminuir el error, para un número elevado de nodos, el proceso de integración es inestable.

Debido a esto, la manera de disminuir el valor de h , no es creando fórmulas de integración con n elevado, sino que se realizan subintervalos dentro del intervalo de integración $[a,b]$, donde se aplican fórmulas de integración sencillas muchas veces.

Este proceso recuerda a la realización de procesos de interpolación polinómica a trozos. De modo que si se compone N veces la regla del trapecio, estaríamos creando N rectas que unen cada pareja de nodos e integraríamos todo el conjunto de rectas.

Si se compone N veces la primera regla de Simpson, se crean N funciones parabólicas y se integran todas ellas y así se continuaría sucesivamente.

Por tanto las formulas de Newton-Cotes compuestas se calculan de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^N I_i + \sum_{i=1}^N R_i(f)$$



Tal como se aprecia en el gráfico, cada una de las fórmulas I_i pueden ser diferentes, sin embargo si se utilizan fórmulas distintas, el orden de las fórmulas también será distinto, con lo que en unas zonas del intervalo, el error cometido será mayor que en otras. Para evitar esto, se utiliza la misma fórmula de integración repetida N veces a lo largo del intervalo, utilizando de este modo el mismo valor de h a lo largo del intervalo, lo que simplifica los cálculos. Este proceso también homogeniza el error cometido a lo largo de todo el intervalo $[a,b]$.

Cuando se aplican estas fórmulas, el error cometido es:

$$R(f) = \sum_{i=1}^N R_i(f) = \sum_{i=1}^N \frac{K \cdot h^{p+2} \cdot f^{(p+1)}(\xi_i)}{p+1!} = \frac{K \cdot h^{p+2}}{p+1!} \sum_{i=1}^N f^{(p+1)}(\xi_i).$$

En cada subintervalo existe un valor ξ_i para el que se calcula la derivada $p+1$. Se puede demostrar que en el intervalo total $[a,b]$ existe algún punto ξ para el cual $\sum_{i=1}^N f^{(p+1)}(\xi_i) = N \cdot f^{(p+1)}(\xi)$ con lo que la expresión de error queda de la forma:

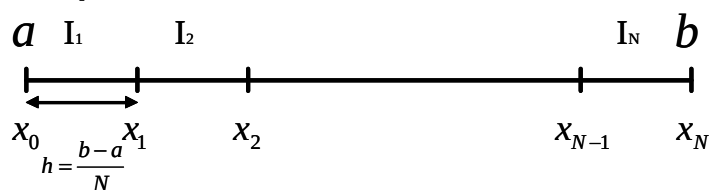
$$R(f) = N \frac{K \cdot h^{p+2}}{p+1!} f^{(p+1)}(\xi).$$

Posteriormente se modificará esta expresión dependiendo del tipo de

fórmula que se emplee, sabiendo que $h = \frac{b-a}{n}$ en las fórmulas cerradas y $h = \frac{b-a}{n+2}$ en las fórmulas abiertas.

Fórmulas cerradas.

n=1 Regla del trapecio compuesta.



La regla del trapecio es:
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3 \cdot f''(\xi)}{12}$$

Si se compone N veces en el intervalo [a,b], resulta:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2} (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + \frac{h}{2} (f(x_{N-1}) + f(x_N)) + R(f) \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)] + R(f)$$

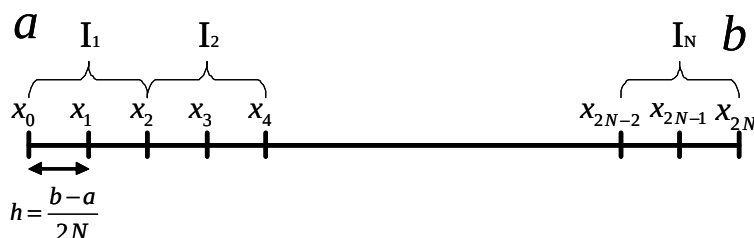
El error cometido será:
$$R(f) = \sum_{i=1}^N R_i(f) = \sum_{i=1}^N -\frac{h^3 \cdot f''(\xi_i)}{12} = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^N f''(\xi_i).$$

El valor de h en las fórmulas cerradas es $h = \frac{b-a}{N \cdot n}$ y en particular para la regla del trapecio compuesta será $h = \frac{b-a}{N}$, por lo que el error resulta:
$$R(f) = -N \frac{h^3}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi).$$

La formula trapezoidal compuesta es por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$$

n=2 Primera regla de Simpson compuesta.



La primera regla de Simpson es:
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5 \cdot f^{(iv)}(\xi)}{90}$$

Si se compone N veces en el intervalo [a,b], resulta:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2N-2}}^{x_{2N}} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{3} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \dots + \frac{h}{3} (f(x_{2N-2}) + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})) + R(f) \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{2N-2}) + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})] + R(f)$$

El error cometido será: $R(f) = \sum_{i=1}^N R_i(f) = \sum_{i=1}^N -\frac{h^5 \cdot f^{(iv)}(\xi)}{90} = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^N f^{(iv)}(\xi_i).$

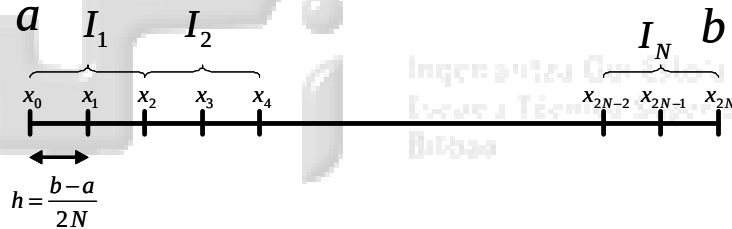
El valor de h en las fórmulas cerradas es $h = \frac{b-a}{N \cdot n}$ y en particular para la primera regla de Simpson

compuesta será $h = \frac{b-a}{2N}$, por lo que el error resulta: $R(f) = -N \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(iv)}(\xi).$

Fórmulas abiertas.

n=0 Regla del punto medio compuesta.

En las formulas abiertas, el valor de h es $h = \frac{b-a}{N \cdot (n+2)}$ y el gráfico que resulta para esta fórmula es:



La regla del punto medio es: $\int_{x_0}^{x_2} f(x) \cdot dx = 2 \cdot h \cdot f(x_1) + \frac{h^3 \cdot f^{(2)}(\xi)}{3}$

Si se compone N veces en el intervalo $[a, b]$, resulta:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2N-2}}^{x_{2N}} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h \cdot f(x_1) + 2h \cdot f(x_3) + \dots + 2h \cdot f(x_{2N-1}) + R(f) \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h [f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2N-1})] + R(f)$$

El error cometido será: $R(f) = \sum_{i=1}^N R_i(f) = \sum_{i=1}^N \frac{h^3 \cdot f^{(2)}(\xi)}{3} = \frac{h^3}{3} \sum_{i=1}^N f^{(2)}(\xi_i).$

El valor de h en las fórmulas abiertas es $h = \frac{b-a}{N*(n+2)}$ y en particular para $n=0$ será $h = \frac{b-a}{2N}$, por lo

que el error resulta: $R(f) = N \frac{h^3}{3} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\xi)$.

La formula del punto medio compuesta es por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = 2h [f(x_0) + f(x_2) + \dots + f(x_{2N-2})] + \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\xi)$$

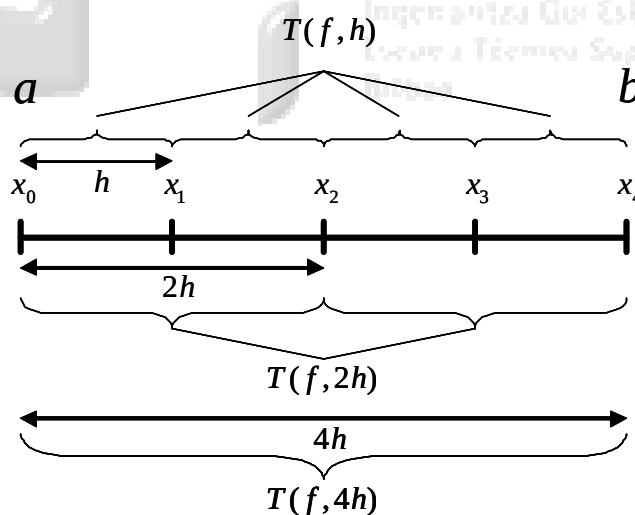
Siguiendo el mismo razonamiento se pueden calcular fórmulas compuestas para otros valores de n .

Reglas recursivas y método de Romberg

En este apartado se explicará cómo se pueden conseguir aproximaciones a la solución de una integral mediante la regla de Simpson utilizando combinaciones lineales de las aproximaciones obtenidas mediante la regla del trapecio.

Esto supone una mejora puesto que las reglas del trapecio son reglas de orden uno mientras que las reglas de Simpson son reglas de orden tres. A demás, a medida que se van utilizando un mayor número de nodos se disminuye el error, como ya se explicó en apartados anteriores.

Para realizar este proceso, en primer lugar se deben obtener reglas del trapecio sucesivas. Cada nueva aproximación se calcula utilizando una regla del trapecio compuesta en que el valor de h pasa a ser la mitad del anterior. Esto implica que en cada aproximación se duplica el número de subintervalos que se tenían en la aproximación anterior.



$$T(f, 4h) = \frac{4h}{2} (f(x_0) + f(x_4))$$

$$T(f, 2h) = \frac{2h}{2} (f(x_0) + 2f(x_2) + f(x_4))$$

$$T(f, h) = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4))$$

En general, en un intervalo $[a,b]$ se puede obtener una regla del trapecio compuesta con distancia entre nodos h a partir de la regla del trapecio con distancia entre nodos $2h$ mediante la expresión:

$$T(f, h) = \frac{T(f, 2h)}{2} + h \cdot \sum_{k=1}^M f(x_{2k-1}), \text{ siendo } M \text{ el valor que se obtiene mediante el cálculo de los}$$

subintervalos utilizados dentro del intervalo $[a,b]$. Si el intervalo $[a,b]$, se divide en 2^j subintervalos, entonces $2^j = 2 \cdot M$.

Ejemplo:

Trabajando con dos subintervalos : $j = 1 \Rightarrow 2^1 = 2 \cdot M \Rightarrow M = 1$;

$$T(f, 2h) = \frac{2h}{2} (f(x_0) + f(x_2))$$

$$T(f, h) = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2))$$

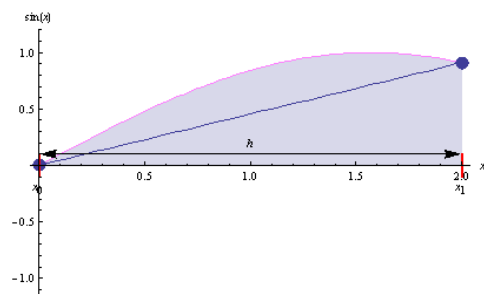
$$T(f, h) = \frac{\frac{2h}{2} (f(x_0) + f(x_2))}{2} + h \cdot f(x_1) = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2))$$

Trabajando con cuatro subintervalos : $j = 2 \Rightarrow 2^2 = 2 \cdot M \Rightarrow M = 2$;

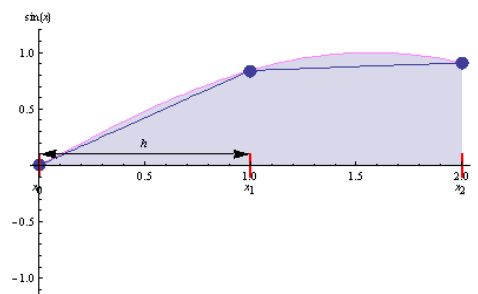
$$T(f, 2h) = \frac{2h}{2} (f(x_0) + 2f(x_2) + f(x_4))$$

$$T(f, h) = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4))$$

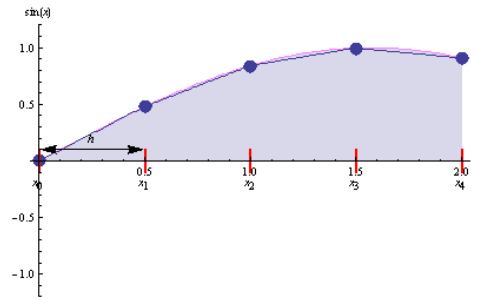
$$T(f, h) = \frac{\frac{2h}{2} (f(x_0) + 2f(x_2) + f(x_4))}{2} + h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_3).$$



$T(0)$ es el área correspondiente a $2^0 = 1$ trapecios



$T(1)$ es el área correspondiente a $2^1 = 2$ trapecios



$T(2)$ es el área correspondiente a $2^2 = 4$ trapecios.

Ejemplo:

Se desea calcular el valor de la integral $\int_0^2 \sin(x) dx$ mediante la utilización de la regla del trapecio $T(0)$, $T(1)$ y $T(2)$.

$T(0)$: en este caso $j=0$ hay un solo subintervalo, por tanto $h = \frac{b-a}{2^j} = b-a = 2$

$$T(0) = \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) = \frac{2}{2} (\sin(0) + \sin(2)) = 1(0 + 0.909297) = 0.909297$$

$T(1)$: en este caso $j=1$ hay dos subintervalos, por tanto $h = \frac{b-a}{2^j} = \frac{b-a}{2} = 1$

$$T(1) = \frac{T(0)}{2} + h \cdot \sin(1) = \frac{0.909297}{2} + 1 \cdot 0.841471 = 1.29612$$

$T(2)$: en este caso $j=2$ hay cuatro subintervalos, por tanto $h = \frac{b-a}{2^j} = \frac{b-a}{2^2} = \frac{1}{2}$

$$T(2) = \frac{T(1)}{2} + h \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\right) + h \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1.29612}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0.479426 + \frac{1}{2} \cdot 0.997495 = 1.38652$$

Calculando $T(3)$: se obtiene: $T(3) = 1.408763$

Partiendo de aproximaciones sucesivas de la regla del trapecio, se pueden realizar combinaciones lineales de las mismas para obtener aproximaciones al valor de la integral mediante reglas de Simpson.

En general se verifica la siguiente igualdad: $S(j) = \frac{4T(j) - T(j-1)}{3}$, donde $S(j)$ es la aproximación a la regla de Simpson con 2^j subintervalos obtenida a partir de $T(j)$, regla del trapecio compuesta con 2^j subintervalos en el intervalo $[a, b]$ de integración y $T(j-1)$ es la regla del trapecio compuesta con 2^{j-1} subintervalos.

Lo probaremos para $j=1$.

$$S(1) = \frac{4T(1) - T(0)}{3}.$$

$T(1)$ es la regla del trapecio compuesta dos veces en el intervalo $[a,b]$, por tanto $h = \frac{b-a}{2}$.

$$T(1) = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)).$$

$T(0)$ es la regla del trapecio simple, por tanto $h' = b - a = 2h$. $T(0) = \frac{2h}{2} (f(x_0) + f(x_2))$

$$S(1) = \frac{4T(1) - T(0)}{3} = \frac{4\left(\frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2))\right) - \frac{2h}{2}(f(x_0) + f(x_2))}{3} \Rightarrow$$

$$S(1) = \frac{h(2f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2)) - h(f(x_0) + f(x_2))}{3} = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

Ejemplo:

Partiendo de los valores conseguidos en el ejemplo anterior, $T(0)$, $T(1)$ y $T(2)$, se desea obtener nuevas aproximaciones al valor de la integral $\int_0^2 \sin(x) dx$, mediante las reglas recursivas de Simpson.

$$S(1) = \frac{4T(1) - T(0)}{3} = \frac{4 \cdot 1.29612 - 0.909297}{3} = 1.42506$$

$$S(2) = \frac{4T(2) - T(1)}{3} = \frac{4 \cdot 1.38652 - 1.29612}{3} = 1.41665$$

$$S(3) = \frac{4T(3) - T(2)}{3} = \frac{4 \cdot 1.40876 - 1.38652}{3} = 1.41617$$

Del mismo modo que se ha demostrado que a partir de una combinación lineal de reglas del trapecio se pueden conseguir reglas de Simpson, se puede demostrar que partiendo de reglas de Simpson, se pueden obtener reglas de Boole.

Suponiendo que $\{S(j)\}$ es una sucesión de aproximaciones dadas por la primera regla de Simpson, utilizando en cada caso 2^j subintervalos en el intervalo $[a,b]$, Si $j \geq 2$ y $B(j)$ es la aproximación al valor de la integral dado por la regla de Boole con 2^j subintervalos en el intervalo $[a,b]$, entonces $B(j)$ se puede calcular mediante la expresión: $B(j) = \frac{16 \cdot S(j) - S(j-1)}{15}$ para $j = 2, 3, \dots$

Ejemplo:

Obtener las aproximaciones a las reglas de Boole mediante combinaciones lineales de reglas de Simpson para la integral $\int_0^2 \sin(x)dx$.

$$B(2) = \frac{16 \cdot S(2) - S(1)}{15} = \frac{16 \cdot 1.41665 - 1.42506}{15} = 1.41609.$$

$$B(3) = \frac{16 \cdot S(3) - S(2)}{15} = \frac{16 \cdot 1.41617 - 1.41335}{15} = 1.41614$$

Se puede obtener todavía una mejor aproximación a la solución de la integral componiendo los dos últimos resultados:

$$\frac{64 \cdot B(3) - B(2)}{63} = \frac{64 \cdot 1.41614 - 1.41609}{63} = 1.41614$$

Método de Romberg.

A la vista de los resultados de las reglas recursivas explicadas en el punto anterior, se puede ver como mediante el cálculo de distintas reglas del trapecio (de orden uno), se pueden ir consiguiendo reglas de Simpson compuestas (de orden tres), a partir de éstas, reglas de Boole compuestas (de orden cinco) y así sucesivamente.

Tal como se ha explicado anteriormente, el error cometido en las reglas del trapecio compuesta depende de h^2 ($O(h^2)$), mientras que las reglas de Simpson compuestas dependen de h^4 ($O(h^4)$), y así sucesivamente a medida que aumenta el orden de la fórmula aumenta el orden en el término de error.

Esto implica como ventaja que se puede obtener resultados para fórmulas con gran cantidad de nodos sin tener que utilizar fórmulas de Newton-Cotes simples que a partir de cierto número de nodos tiene coeficientes negativos, lo que puede producir errores por pérdidas de cifras significativas en los redondeos.

Como inconveniente se tiene que para obtener una nueva aproximación del valor de la integral se debe duplicar el número de nodos en los que se evalúa la función.

A partir de lo visto en las reglas recursivas del punto anterior se puede obtener el esquema general del método de Romberg de la siguiente manera:

j	$R(j, 0)$ Regla del Trapecio	$R(j, 1)$ Regla de Simpson	$R(j, 2)$ Regla de Boole	$R(j, 3)$ Tercera mejora	$R(j, 4)$ Cuarta mejora
0	$R(0, 0)$				
1	$R(1, 0)$	$R(1, 1)$			
2	$R(2, 0)$	$R(2, 1)$	$R(2, 2)$		
3	$R(3, 0)$	$R(3, 1)$	$R(3, 2)$	$R(3, 3)$	
4	$R(4, 0)$	$R(4, 1)$	$R(4, 2)$	$R(4, 3)$	$R(4, 4)$

Analizando todos los resultados obtenidos en las reglas recursivas del punto anterior se llega a la conclusión que para obtener los elementos de la tabla que representa el método de Romberg, se deben realizar los cálculos de las sucesivas reglas del trapecio compuestas con 2^j subintervalos y que posteriormente se realiza el cálculo del resto de columnas siguiendo la regla general:

$$R(j, K) = \frac{4^K \cdot R(j, K-1) - R(j-1, K-1)}{4^K - 1} \quad \begin{cases} K \geq 1 \\ j \geq K \end{cases}$$

Ejemplo:

Se desea aplicar el método de Romberg para obtener una aproximación al valor de $\int_0^2 \sin(x) dx$ realizando cálculos hasta la quinta mejora, es decir hasta dividir el intervalo $[a, b]$ en 2^5 subintervalos.

Esto implica realizar el cálculo de reglas del trapecio compuestas hasta conseguir un valor de $h = \frac{b-a}{2^5} = \frac{2-0}{32} = \frac{1}{16}$

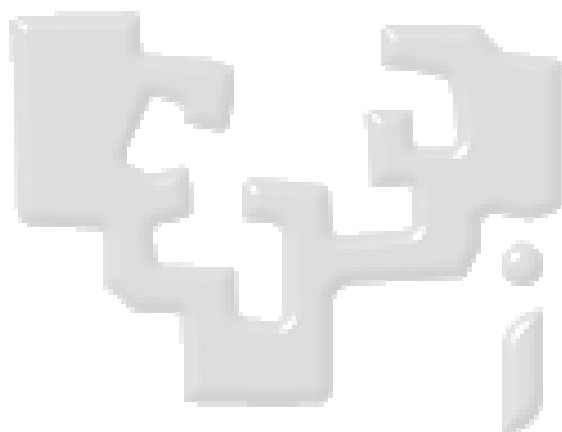
Una vez conseguidos los valores de las sucesivas reglas del trapecio compuestas, se realizará el cálculo del resto de columnas de la tabla utilizando la expresión indicada anteriormente.

En la siguiente tabla se pueden ver los resultados de utilizar el método de Romberg. A medida que se va bajando en cada una de las columnas la aproximación es mejor, puesto que se trata de fórmulas del un mismo orden con una valor de h decreciente. A medida que se calculan columnas hacia la derecha se obtienen mejores aproximaciones puesto que se obtiene fórmulas en las que la expresión del error cometido depende de potencias de h de grado mayor.

$$\int_0^2 \sin(x) dx$$

Valor exacto= 1.416146837

"n"	"h"	"R(n,0)"	"R(n,1)"	"R(n,2)"	"R(n,3)"	"R(n,4)"	"R(n,5)"
0	2	0.909297					
1	1	1.29612	1.42506				
2	$\frac{1}{2}$	1.38652	1.41665	1.41609			
3	$\frac{1}{4}$	1.40876	1.41618	1.41615	1.41615		
4	$\frac{1}{8}$	1.4143	1.41615	1.41615	1.41615	1.41615	
5	$\frac{1}{16}$	1.41569	1.41615	1.41615	1.41615	1.41615	1.41615



Ingeniaritza Gaitasun Teknikoa
 Eskola Tekniko Superior de Ingenieria
 Bilbao

Ejercicios

1.- Obtener una fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio así como los correspondientes términos de error siendo las fórmulas de la forma:

- $\int_0^1 f(x) dx \cong a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$
- $\int_{-h}^h f(x) dx \cong h \cdot [a_0 \cdot f(-h) + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f(h)]$
- $\int_0^1 f(x) dx \cong a_0 \cdot f\left[\frac{1}{4}\right] + a_1 \cdot f\left[\frac{1}{2}\right] + a_2 \cdot f\left[\frac{3}{4}\right]$
- $\int_{-1}^1 f(x) dx \cong a_0 \cdot f\left[-\frac{1}{2}\right] + a_1 \cdot f(0) + a_2 \cdot f\left[\frac{1}{2}\right]$

2.- Calcular

$$\int_1^3 \frac{dx}{x}$$

utilizando la regla de los trapecios compuesta con 2 y 4 subintervalos, y aplicando posteriormente extrapolación de Richardson para calcular una tercera aproximación.

3.- Evaluar

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$$

por medio de :

- la regla del trapecio.
- la primera regla de Simpson.
- la segunda regla de Simpson.

Acotar el error de truncatura en cada caso.

4.- Utilizando la regla de los trapecios y la primera regla de Simpson calcular

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5) dx$$

Obtener una cota del error cometido.

5.- Evaluar

$$\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5) dx$$

utilizando la regla trapezoidal y la fórmula abierta de integración de un punto cada una con grado de precisión 1

6.-Evaluar

$$\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5) dx$$

utilizando las fórmulas abiertas de Newton-Cotes de

- dos intervalos de integración.
- Cuatro intervalos de integración.

7.- Calcular

$$\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5) dx$$

aplicando

- la regla del trapecio dos veces
- la regla del trapecio cuatro veces.

8.- Calcular

$$\int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx$$

utilizando la fórmula de los trapecios compuesta, garantizando que el error de truncatura cometido sea menor que $\varepsilon = 0.03$.

9.- ¿Qué valor de h sería necesario considerar para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$$

con 5 decimales correctos utilizando la regla de Simpson compuesta?

10.- A partir de los datos de la siguiente tabla

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y(x)	1.000	1.284	1.649	2.117	2.718	3.490	4.482	5.755	7.389

Estimar

$$\int_0^2 y(x) dx$$

de la forma más adecuada. ¿Tendrá el resultado obtenido 3 cifras decimales correctas?

11.- Se desea calcular

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

- Utilizar la primera regla de Simpson con 9 nodos.
- Utilizar la segunda regla de Simpson con 4 nodos.
- Obtener cotas del error de truncatura

12.- Dada la integral

$$I = \int_2^3 (5 - x)^{-1} dx$$

determinar el número de veces que hay que componer la regla de Simpson para obtener el valor de I con un error $\varepsilon = 10^{-4}$.

Obtener dicha integral con la precisión pedida.

13.- Se desea calcular un valor aproximado de

$$\int_1^{1.3} \sqrt{x} dx$$

utilizando los datos de la siguiente tabla:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$\sqrt{x}$	1.0000	1.0247	1.0488	1.0724	1.0954	1.1180	1.1402

- a) Considerar la fórmula trapezoidal.
- b) Considerar la primera regla de Simpson.
- c) Considerar la fórmula trapezoidal compuesta.
- d) Considerar la fórmula de Simpson compuesta.
- e) Obtener cotas del error de truncatura en cada caso.

14.- Con los datos de la siguiente tabla

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	-3	-4	-3	0	5	12	21	32	45

Calcular

$$\int_1^9 f(x) dx$$

- a) Utilizando la primera regla de Simpson compuesta.
- b) Realizando dos aplicaciones de la fórmula abierta

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{4h}{3} \cdot (2f_1 - f_2 + 2f_3) + \frac{14h^5}{45} f^{(iv)}(\xi)$$

- c) ¿por qué coinciden los resultados?

15.- Sabiendo que

$$\int_0^{0.8} f(x) dx = 2$$

y

$$\max |f^{(iv)}(x)| \leq 3 \quad \text{en } [0, 0.8],$$

siendo conocida la función por los datos de la siguiente tabla

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8
f(x)	5	8	6	3	0	-3	-3	5

Emplear la primera regla de Simpson compuesta para estimar $f(0.7)$.

16.- La función

$$f(x) = 10 - 38.6x + 74.07x^2 - 40.1x^3$$

se usa en el cálculo de la siguiente tabla de datos:

x	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.95	1.20
f(x)	10.00	6.84	4.00	4.20	5.51	5.77	1.00

Evaluar

$$\int_0^{1.2} f(x) dx$$

utilizando de forma adecuada una combinación de las reglas primera y segunda de Simpson y de la regla de los trapecios para obtener la mayor precisión posible. Hallar una cota del error cometido.

17.-

- i) Obtener una fórmula de integración del tipo

$$\int_0^h y(x) dx = h \cdot [A_0 \cdot y(0) + A_1 \cdot y(h)] + h^2 \cdot [B_0 \cdot y'(0) + B_1 \cdot y'(h)] \quad (1)$$

para que sea lo más exacta posible.

ii) ¿Cuál es el grado de exactitud? Determinar la expresión del término de error correspondiente

iii) Realizar un cambio de variable que permita aplicar la fórmula (1) al cálculo de la integral de una función definida en un intervalo genérico $[a, b]$.

iv) Deducir la expresión que resulta al componer dicha fórmula N veces en un intervalo $[a, b]$.

v) Comentar ventajas e inconvenientes de esta fórmula con respecto a las fórmulas de Newton-Cotes de su mismo grado de exactitud.

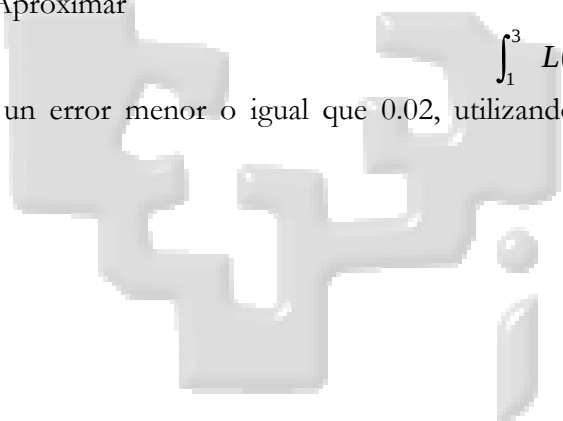
vi) Aplicar la fórmula compuesta al cálculo de

$$\int_0^2 e^x dx$$

18.- Aproximar

$$\int_1^3 L(x) dx$$

con un error menor o igual que 0.02, utilizando la fórmula abierta del punto medio compuesta.



Ingeniería Químico-Técnica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao