6

Aproximación mínimo-cuadrática.

Introducción.

La aproximación consiste en ajustar una función *f* mediante otra función *f** mas manejable desde el punto de vista matemático, dentro de cierto intervalo. En otras ocasiones, se pretende ajustar una serie de datos experimentales mediante una curva.

Cuando se trata de ajustar una función *f* mediante otra *f** en un intervalo [a,b], se trata de un problema de aproximación de tipo continuo.

Cuando el objetivo es ajustar una serie de datos experimentales mediante una curva, se trata de resolver un problema de aproximación de tipo discreto.

Desde el punto de vista conceptual, la resolución de un problema discreto o continuo es idéntica, por lo que estudiaremos el problema de manera general y posteriormente particularizaremos para cada caso.

Planteamiento matemático general.

Para abordar un problema de aproximación se debe trabajar con espacios vectoriales normados.

En un espacio vectorial E en el que se ha definido una norma $\| \ \|$, se tiene un vector **x**. Dentro del espacio vectorial E se tiene un subespacio vectorial S, de manera que se pretende obtener el vector $\mathbf{u} \in S$ tal que la distancia d(**x**,**u**) sea mínima.

La distancia entre dos vectores de un espacio vectorial es la norma del vector diferencia.

Por tanto se pretende calcular:

$$\mathbf{u} \in S / . \ \|\mathbf{x}-\mathbf{u}\| = d(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \mathrm{Inf} \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| \ \forall \mathbf{v} \in S$$

De este modo se pretende aproximar el vector **x** mediante el vector **u**, que es su mejor aproximación dentro del subespacio S.

Esta mejor aproximación varía en función de la norma que se emplee para realizar el cálculo.

En este capítulo aplicaremos la norma euclídea, de manera que realizaremos el estudio de la aproximación mínimo-cuadrática.

Existencia y Unicidad.

Teorema 1: Dado un espacio vectorial euclídeo E y un subespacio vectorial S de dimensión finita, para todo vector $\mathbf{x}\in E$ existe un vector $\mathbf{u}\in S$ mejor aproximación de **x** sobre S.

Teorema 2: Dado S, un subespacio de dimensión finita de un espacio vectorial euclídeo E y **x** un vector de E. La mejor aproximación a **x** de S es el vector **u**, proyección ortogonal de **x** sobre S. Como mejor aproximación se quiere decir que para todo vector $\mathbf{w}\neq\mathbf{u}$ en S se tiene que $\|\mathbf{x}\text{-}\mathbf{u}\| < \|\mathbf{x}\text{-}\mathbf{w}\|$

Demostración:

Para cualquier vector $\mathbf{w}\in S$ se puede escribir: $\mathbf{x}-\mathbf{w}=(\mathbf{x}-\mathbf{u}) + (\mathbf{u}-\mathbf{w})$.

El vector $(\mathbf{u}-\mathbf{w})$ es un vector que pertenece a S puesto que es diferencia de dos vectores de S.

El vector $(\mathbf{x}-\mathbf{u})$ pertenece al subespacio ortogonal a S que llamaremos a partir de ahora $S^{\perp}$ que es la componente de **x** ortogonal a S y que por lo tanto es ortogonal a cualquier vector de S.

Asi que $(\mathbf{u}-\mathbf{w})\in S$ y $(\mathbf{x}-\mathbf{u}) \in S^{\perp}$ son vectores ortogonales.

$\|\mathbf{x}-\mathbf{w}\|^2 = <\mathbf{x}-\mathbf{w}, \mathbf{x}-\mathbf{w}> = <(\mathbf{x}-\mathbf{u}) + (\mathbf{u}-\mathbf{w}), (\mathbf{x}-\mathbf{u}) + (\mathbf{u}-\mathbf{w})> = <(\mathbf{x}-\mathbf{u}),(\mathbf{x}-\mathbf{u})>+<(\mathbf{x}-\mathbf{u}),(\mathbf{u}-\mathbf{w})> + <(\mathbf{u}-\mathbf{w}),(\mathbf{x}-\mathbf{u})>+<(\mathbf{u}-\mathbf{w}),(\mathbf{u}-\mathbf{w})> = <(\mathbf{x}-\mathbf{u}),(\mathbf{x}-\mathbf{u})>+0+0+<(\mathbf{u}-\mathbf{w}),(\mathbf{u}-\mathbf{w})> \Rightarrow$

$\|\mathbf{x}-\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2 \Rightarrow \|\mathbf{x}-\mathbf{w}\| > \|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|$

Por tanto el vector **u** es la mejor aproximación de **x** en S.

Teorema 3: El vector **u** mejor aproximación de **x** en S es único.

Demostración: Dado que los subespacios vectoriales S y $S^{\perp}$ son suplementarios, todo vector $\mathbf{x} \in E$ se puede descomponer de forma única como suma de un vector $\mathbf{u}\in S$ y un vector $(\mathbf{x}-\mathbf{u}) \in S^{\perp}$. Es decir , el vector $\mathbf{u}\in S$ es único.

Esta caracterización, es la que permite calcular el vector **u**.

Cálculo del vector mejor aproximación.

S es un subespacio vectorial de E de dimensión finita n.

Una base de S será. $B_S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}\}$, por tanto el vector **u** es combinación lineal de los vectores de la base de S, $\mathbf{u}= u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} +\ldots+ + u_n\mathbf{e_n}$.

$\mathbf{x}-\mathbf{u}\in S^{\perp}$ por tanto es ortogonal a todos los vectores de S y en particular a los vectores de la base B_S $<\mathbf{x}-\mathbf{u}\ , \mathbf{e_i}>=0\ \forall\ i=1,\ldots, n$. Esta expresión representa un sistema de n ecuaciones con n incógnitas (las coordenadas del vector **u** en la base B_S).

$\mathbf{x}-\mathbf{u} = \mathbf{x}- (u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} +\ldots+ + u_n\mathbf{e_n})$

$$\left.\begin{array}{l}<\mathbf{x}-\mathbf{u},\mathbf{e_1}>=0 \Rightarrow <\mathbf{x}-u_1\,\mathbf{e_1}-u_2\,\mathbf{e_2}-\ldots-u_n\,\mathbf{e_n},\mathbf{e_1}>=0\\ <\mathbf{x}-\mathbf{u},\mathbf{e_2}>=0 \Rightarrow <\mathbf{x}-u_1\,\mathbf{e_1}-u_2\,\mathbf{e_2}-\ldots-u_n\,\mathbf{e_n},\mathbf{e_2}>=0\\ \cdots\\ <\mathbf{x}-\mathbf{u},\mathbf{e_n}>=0 \Rightarrow <\mathbf{x}-u_1\,\mathbf{e_1}-u_2\,\mathbf{e_2}-\ldots-u_n\,\mathbf{e_n},\mathbf{e_n}>=0\end{array}\right\}$$

Desarrollando la expresión queda:

$$\left.\begin{array}{l}<\mathbf{x},\mathbf{e_1}>-<u_1\,\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}>-<u_2\,\mathbf{e_2},\mathbf{e_1}>-\ldots-<u_n\,\mathbf{e_n},\mathbf{e_1}>=0\\ <\mathbf{x},\mathbf{e_2}>-<u_1\,\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}>-<u_2\,\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}>-\ldots-<u_n\,\mathbf{e_n},\mathbf{e_2}>=0\\ \cdots\\ <\mathbf{x},\mathbf{e_n}>-<u_1\,\mathbf{e_1},\mathbf{e_n}>-<u_2\,\mathbf{e_2},\mathbf{e_n}>-\ldots-<u_n\,\mathbf{e_n},\mathbf{e_n}>=0\end{array}\right\}$$

Aplicando las propiedades del producto escalar, transformando la expresión y representándola matricialmente resulta:

$$\begin{pmatrix}<\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}> & <\mathbf{e_2},\mathbf{e_1}> & \cdots & <\mathbf{e_n},\mathbf{e_1}>\\ <\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}> & <\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}> & \cdots & <\mathbf{e_n},\mathbf{e_2}>\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ <\mathbf{e_1},\mathbf{e_n}> & <\mathbf{e_2},\mathbf{e_n}> & \cdots & <\mathbf{e_n},\mathbf{e_n}>\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}<\mathbf{x},\mathbf{e_1}>\\ <\mathbf{x},\mathbf{e_2}>\\ \vdots\\ <\mathbf{x},\mathbf{e_n}>\end{pmatrix}$$

Este es el sistema de n ecuaciones con n incógnitas que permite calcular el vector **u** mejor aproximación a **x** en el subespacio vectorial S.

A este sistema se le conoce como sistema de ecuaciones normales y su solución son las coordenadas del vector **u** en la base B_S.

Si la base B_S fuera ortogonal, entonces $<\mathbf{e_i},\mathbf{e_j}>=0\ \forall i\neq j$, de manera que la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones normales sería diagonal.

$$\begin{pmatrix}<\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}> & 0 & \cdots & 0\\ 0 & <\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}> & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & <\mathbf{e_n},\mathbf{e_n}>\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}<\mathbf{x},\mathbf{e_1}>\\ <\mathbf{x},\mathbf{e_2}>\\ \vdots\\ <\mathbf{x},\mathbf{e_n}>\end{pmatrix}$$

De modo que resulta muy sencillo despejar el valor de cada una de las coordenadas del vector **u**, $u_i=\dfrac{<\mathbf{x},\mathbf{e_i}>}{<\mathbf{e_i},\mathbf{e_i}>}$ $\forall$i=1,…,n, lo que simplifica la resolución del problema.

Aproximación mínimo-cuadrática continua.

En este apartado se particularizará el desarrollo matemático expuesto en el apartado anterior para ajustar funciones mediante polinomios en un cierto intervalo [a,b].

Dado el espacio vectorial euclideo E de todas las funciones reales de variable real continuas en un cierto intervalo [a,b], se pretende ajustar un vector **f(x)** de este espacio vectorial mediante un polinomio **p(x)** de grado menor o igual a n.

El espacio euclídeo E tiene definido por tanto un producto escalar. Este producto escalar se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \to & \mathbb{R} \\ (\mathrm{f},\mathrm{g}) & \to & <\mathrm{f},\mathrm{g}>=\int_a^b \mathrm{f}(\mathrm{x})\,\mathrm{g}(\mathrm{x})dx \end{array}$$

El subespacio sobre el que se proyecta la función **f(x)** es el de los polinomios de grado menor o igual a n cuya base usual es $\mathrm{B_S}=\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$.

Aplicando los conceptos explicados en el apartado anterior, el problema se reduce a encontrar las coordenadas del polinomio **p(x)**, mejor aproximación de **f(x)** en el subespacio de los polinomios de grado menor o igual a n.

$\mathrm{p(x)}=a_0(1)+a_1(x)+a_2(x^2)+\cdots+a_n(x^n)$. El problema es la obtención de los coeficientes a_i i=0,…,n.

El sistema de ecuaciones normales que resulta aplicando la teoría general será:

$$\begin{pmatrix} <1,1> & <1,\mathbf{x}> & \cdots & <1,\mathbf{x^n}> \\ <\mathbf{x},1> & <\mathbf{x},\mathbf{x}> & \cdots & <\mathbf{x},\mathbf{x^n}> \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <\mathbf{x^n},1> & <\mathbf{x^n},\mathbf{x}> & \cdots & <\mathbf{x^n},\mathbf{x^n}> \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} <\mathrm{f(x)},1> \\ <\mathrm{f(x)},\mathbf{x}> \\ \vdots \\ <\mathrm{f(x)},\mathbf{x^n}> \end{pmatrix}$$

Utilizando la definición de producto escalar para el caso continuo en un intervalo [a,b] se obtiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} \int_a^b 1\bullet 1dx & \int_a^b 1\bullet xdx & \cdots & \int_a^b 1\bullet x^n dx \\ \int_a^b x\bullet 1dx & \int_a^b x\bullet xdx & \cdots & \int_a^b x\bullet x^n dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b x^n\bullet 1dx & \int_a^b x^n\bullet xdx & \cdots & \int_a^b x^n\bullet x^n dx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \int_a^b \mathrm{f(x)}\bullet 1dx \\ \int_a^b \mathrm{f(x)}\bullet xdx \\ \vdots \\ \int_a^b \mathrm{f(x)}\bullet x^n dx \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Dada la función f(x)=-Cos(π(x+1)), realizar un ajuste mínimo-cuadrático de f(x) mediante una parábola en el intervalo [1,3].

El subespacio sobre el que se desea realizar el ajuste es el de los polinomios degrado menor o igual que dos , cuya base usual es: $B_S = \{1, x, x^2\}$. El polinomio que se busca es combinación lineal de los vectores de la base B_S , $p(x)=a_0(1)+a_1\, x+a_2\, x^2$.

Aplicando la teoría del apartado, el sistema de ecuaciones normales que resulta es:

$$\begin{pmatrix} \int_1^3 1\cdot 1dx & \int_1^3 1\cdot xdx & \int_1^3 1\cdot x^2dx \\ \int_1^3 x\cdot 1dx & \int_1^3 x\cdot xdx & \int_1^3 x\cdot x^2dx \\ \int_1^3 x^2\cdot 1dx & \int_1^3 x^2\cdot xdx & \int_1^3 x^2\cdot x^2dx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_1^3 (-Cos(\pi(x+1))\cdot 1dx \\ \int_1^3 (-Cos(\pi(x+1))\cdot xdx \\ \int_1^3 (-Cos(\pi(x+1))\cdot x^2dx \end{pmatrix}$$

Calculando las integrales:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & \frac{26}{3} \\ 4 & \frac{26}{3} & 20 \\ \frac{26}{3} & 20 & \frac{242}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-4}{\pi^2} \end{pmatrix}.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones resulta:

$$a_0 = \frac{-165}{2\pi^2};\quad a_1 = \frac{90}{\pi^2};\quad a_3 = \frac{-45}{2\pi^2}.$$

El polinomio resultante es: $p(x) = -\frac{165}{2\pi^2} + \frac{90}{\pi^2}x - \frac{45}{2\pi^2}x^2$

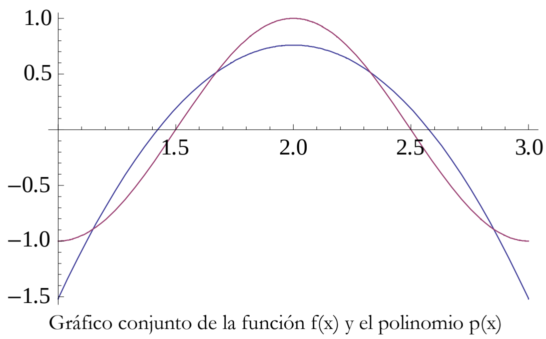


Gráfico conjunto de la función f(x) y el polinomio p(x)

Ejemplo con *Mathematica.*

Ajuste mínimo-cuadrático continuo.

In[1]:= `f[x_] = -Cos[Pi * (x + 1)]`

Out[1]= $-\mathrm{Cos}[\pi\ (1 + x)]$

In[2]:= `base = {1, x, x^2}`

Out[2]= $\{1, x, x^2\}$

In[5]:= `a = 1; b = 3;`

In[6]:= $\mathtt{Mat = Table}\left[\int_a^b (\mathtt{base[[i]] * base[[j]]})\, dx, \{i, 1, \mathtt{Length[base]}\}, \{j, 1, \mathtt{Length[base]}\}\right]$

Out[6]= $\left\{\left\{2, 4, \frac{26}{3}\right\}, \left\{4, \frac{26}{3}, 20\right\}, \left\{\frac{26}{3}, 20, \frac{242}{5}\right\}\right\}$

In[7]:= $\mathtt{Ind = Table}\left[\int_1^3 (\mathtt{base[[i]]\ f[x]})\, dx, \{i, 1, \mathtt{Length[base]}\}\right]$

Out[7]= $\left\{0, 0, -\frac{4}{\pi^2}\right\}$

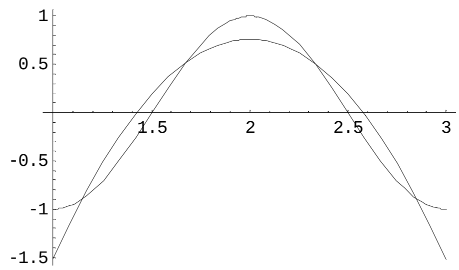
In[9]:= `sol = LinearSolve[Mat, Ind]`

Out[9]= $\left\{-\frac{165}{2\,\pi^2}, \frac{90}{\pi^2}, -\frac{45}{2\,\pi^2}\right\}$

In[10]:= `p[x_] = sol.base`

Out[10]= $-\frac{165}{2\,\pi^2} + \frac{90\,x}{\pi^2} - \frac{45\,x^2}{2\,\pi^2}$

In[11]:= `Plot[{p[x], f[x]}, {x, 1, 3}]`



Out[11]= - Graphics -

Aproximación mínimo-cuadrática discreta.

El problema que se pretende resolver en este apartado es ajustar un conjunto de puntos (x_i , y_i) dato de alguna práctica experimental mediante una función f(x).

Comenzaremos el estudio ajustando ese conjunto de puntos mediante polinomios.

Este problema es semejante al problema de interpolación estudiado en capítulos anteriores, pero es distinto , dado que para realizar una interpolación polinomial mediante un polinomio de grado n se necesitan n+1 puntos , mientras que en este caso, se dispondrá de un numero m de puntos para ajustarlos mediante un polinomio de grado n siendo m>n+1.

Si se intenta realizar el cálculo del polinomio tal y como se planteó en el capitulo de interpolación se obtiene un sistema de m ecuaciones con n+1 incógnitas, siendo m>n+1 , por tanto el sistema de ecuaciones lineales resultante no tiene por que tener solución.

Cuando no se pueda conseguir una solución para dicho sistema, se aplicará el ajuste mediante mínimos cuadrados.

Para aplicar el método de aproximación mínimo-cuadrática, seguiremos el planteamiento general desarrollado anteriormente.

Se pretende ajustar mediante un polinomio de grado n un conjunto de m puntos (x_i , y_i) i=1,….m. Es decir, se pretende proyectar el vector **y** sobre el subespacio de los polinomios de grado menor o igual que n

En este caso, el espacio euclideo n el que estamos trabajando es el espacio vectorial $\mathbb{R}^m$. El subespacio vectorial S de los polinomios de grado menor o igual que n tiene una base formada por n+1 vectores que pertenecen a E.

$$\mathrm{B_S} = \left\{1, x, x^2, \cdots, x^n\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_{m-1}^2 \\ x_m^2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_{m-1}^n \\ x_m^n \end{pmatrix} \right\}$$

De esta manera se puede calcular el polinomio $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$.

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^m$ se ha definido un producto escalar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \to & <\mathbf{x}, \mathbf{y}> = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \end{array}.$$

Aplicando las ecuaciones normales del ajuste mínimo cuadrático a este problema resulta:

$$\begin{pmatrix} <1,1> & <1,x> & \cdots & <1,x^n> \\ <x,1> & <x,x> & \cdots & <x,x^n> \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <x^n,1> & <x^n,x> & \cdots & <x^n,x^n> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} <\mathbf{y},1> \\ <\mathbf{y},x> \\ \vdots \\ <\mathbf{y},x^n> \end{pmatrix}$$

Utilizando la definición de producto escalar en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$, el sistema de ecuaciones normales anterior se transforma en:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} 1 & \sum_{i=1}^{m} x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_i^n \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^n & \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen las n+1 coordenadas del polinomio que se pretendía calcular.

Ejemplo:

Ajustar el conjunto de puntos siguiente mediante un polinomio de grado menor o igual que dos.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1.5	1	0.73	0.6	0.3	0.2	0.1	0.08

Se pretende conseguir un polinomio de la forma: $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$.

La base del subespacio de los polinomios de grado menor o igual que dos es:

$$\mathrm{B_S} = \{1, x, x^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ 49 \\ 64 \end{pmatrix} \right\}.$$

El sistema de ecuaciones normales que resulta de aplicar la teoría de aproximación minimo-cuadrática es:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{8} 1 & \sum_{i=1}^{8} x_i & \sum_{i=1}^{8} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{8} x_i & \sum_{i=1}^{8} x_i^2 & \sum_{i=1}^{8} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{8} x_i^2 & \sum_{i=1}^{8} x_i^3 & \sum_{i=1}^{8} x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{8} y_i \\ \sum_{i=1}^{8} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{8} y_i x_i^2 \end{pmatrix}$$

Para realizar el cálculo de todos estos sumatorios planteamos la siguiente tabla:

	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$y_i\, x_i$	$y_i\, x_i^2$
	1	1.5	1	1	1	1.5	1.5
	2	1	4	8	16	2	4
	3	0.73	9	27	81	2.19	6.57
	4	0.6	16	64	256	2.4	9.6
	5	0.3	25	125	625	1.5	7.5
	6	0.2	36	216	1296	1.2	7.2
	7	0.1	49	343	2401	0.7	4.9
	8	0.08	64	512	4096	0.64	5.12
Σ	36	4.51	204	1296	8772	12.13	46.39

El sistema de ecuaciones lineales resultante es:

$$\begin{pmatrix} 8 & 36 & 204 \\ 36 & 204 & 1296 \\ 204 & 1296 & 8772 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.51 \\ 12.13 \\ 46.39 \end{pmatrix}$$

cuya solución son las coordenadas del polinomio de grado dos, a_0=1.87339; a_1=-0.4553; a_2=0.02899.

Por tanto el polinomio resultante es: $p(x)= 1.87339-0.4553x+0.02899x^2$.

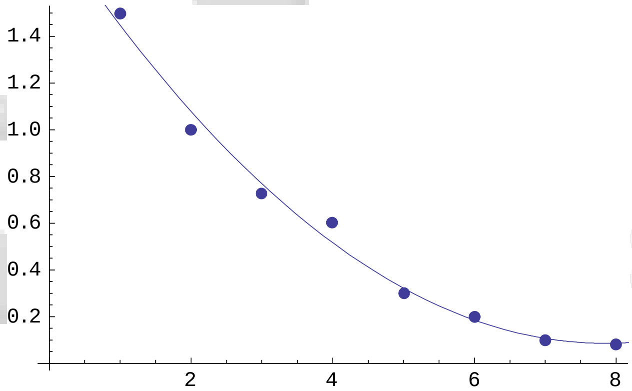


Gráfico del ajuste polinómico realizado

Ejemplo con *Mathematica*.

Ajuste mínimo-cuadrático discreto.

- Datos del ajuste

```
In[1]:= b = {1.5, 1, 0.73, 0.6, 0.3, 0.2, 0.1, 0.08};

In[2]:= datos = Table[{i, b[[i]]}, {i, 1, Length[b]}]

Out[2]= {{1, 1.5}, {2, 1}, {3, 0.73}, {4, 0.6}, {5, 0.3}, {6, 0.2}, {7, 0.1}, {8, 0.08}}

In[3]:= base = Table[{1, i, i^2}, {i, 1, Length[b]}]

Out[3]= {{1, 1, 1}, {1, 2, 4}, {1, 3, 9}, {1, 4, 16}, {1, 5, 25}, {1, 6, 36}, {1, 7, 49}, {1, 8, 64}}
```

- base del subespacio de los polinomios de grado menor o igual que dos

```
In[4]:= base = Transpose[base]

Out[4]= {{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64}}

In[5]:= coef = Table[base[[i]].base[[j]], {i, 1, Length[base]}, {j, 1, Length[base]}]

Out[5]= {{8, 36, 204}, {36, 204, 1296}, {204, 1296, 8772}}
```

- Matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones normales

```
In[6]:= coef // MatrixForm
```

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 8 & 36 & 204 \\ 36 & 204 & 1296 \\ 204 & 1296 & 8772 \end{pmatrix}$$

- Vector de términos independientes

```
In[8]:= ind = Table[b.base[[i]], {i, 1, Length[base]}]

Out[8]= {4.51, 12.13, 46.39}

In[9]:= solucion = LinearSolve[coef, ind]

Out[9]= {1.87339, -0.455298, 0.0289881}
```

- Polinomio que ajusta la nube de puntos

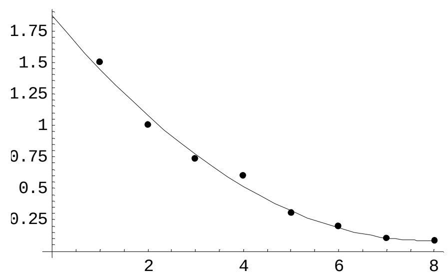
```
In[10]:= p[x_] = solucion.{1, x, x^2}
```

Out[10]= $1.87339 - 0.455298\, x + 0.0289881\, x^2$

```
In[20]:= g1 = ListPlot[b, PlotStyle → PointSize[0.02], DisplayFunction → Identity]

Out[20]= - Graphics -

In[17]:= g2 = Plot[p[x], {x, 0, 8}, DisplayFunction → Identity]

Out[17]= - Graphics -
```

- Gráfico comparativo

```
In[21]:= Show[g1, g2, DisplayFunction → $DisplayFunction]
```




```
Out[21]= - Graphics -
```

Ajuste mínimo-cuadrático por funciones especiales susceptibles de linealizar

En los apartados anteriores se han presentado ajustes polinómicos de los que forma parte un ajuste lineal y=a+bx. Sin embargo, no todos los fenómenos físicos, químicos, mecánicos, etc, se ajustan mediante expresiones polinómicas y mucho menos mediante expresiones lineales. En muchos casos, existe la posibilidad de convertir un ajuste inicialmente no lineal en uno lineal mediante un cambio de variable.

Se trata de ajustar una tabla de datos $\{(x_i, y_i),\ i = 1,2\cdots n\}$ mediante una función del tipo exponencial, $y = C\cdot x^A$ **.** Esta función no es lineal**,** sin embargo tomando logaritmos $\ln(y) = A\cdot\ln(x) + \ln(C)$ y haciendo el cambio: $X = \ln(x)\ y\ Y = \ln(y)$, la nueva función que liga a X e Y será $Y = A\cdot X + B,\quad B = \ln(C)$ que es lineal.

En resumen, se transforman los datos iniciales en otros que tienen las mismas abscisas y cuyas ordenadas son los logaritmos de las ordenadas iniciales, y se realiza un ajuste lineal con estos datos, obteniendo la función : $Y = A\cdot X + B$. La función exponencial de ajuste de los datos iniciales sera: $y = C\cdot x^A$ con $C = e^B$. Este procedimiento se puede considerar como una "linealización de los datos".

La siguiente tabla muestra otros casos en los que es posible, mediante un adecuado cambio de variable, obtener la función de ajuste deseada mediante una linealización de los datos.

Función	Forma linealizada Y=AX+B	Cambio de variables y de constantes
$y = \frac{A}{x} + B$	$y = A\left(\frac{1}{x}\right) + B$	$X = \frac{1}{x}; Y = y$
$y = \frac{D}{x+C}$	$\frac{1}{y} = \frac{1}{D}x + \frac{C}{D}$	$X = x; Y = \frac{1}{y}; D = \frac{1}{A}; C = \frac{B}{D}$
$y = \frac{1}{Ax+B}$	$\frac{1}{y} = Ax + B$	$X = x; Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{A+Bx}$	$\frac{1}{y} = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}; Y = \frac{1}{y}$
$y = A\cdot\ln(x) + B$	$y = A\cdot\ln(x) + B$	$X = \ln(x); Y = y$
$y = (Ax+B)^{-2}$	$y^{-\frac{1}{2}} = Ax + B$	$X = x; Y = y^{-\frac{1}{2}}$
$y = C\cdot x\cdot e^{-A\cdot x}$	$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = -D\cdot x + \ln(C)$	$X = x; Y = \ln\left(\frac{y}{x}\right); C = e^B$
$y = \frac{1}{1+Ce^{Ax}}$	$\ln\left(\frac{1}{y} - 1\right) = Ax + \ln(C)$	$X = x; Y = \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right); C = e^B$

Ejemplo:

Ajustar el conjunto de puntos siguiente mediante una función del tipo $y = Ce^{Ax}$

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1.5	1	0.73	0.6	0.3	0.2	0.1	0.08

Para transformar la función en una expresión lineal, se toman logaritmos neperianos y resulta: $\ln(y) = \ln(C) + Ax$, con lo que si se hace un cambio de variable Y=ln(y) la expresión se transforma en $Y = Ax + B$, siendo B=ln(C).

El problema se resuelve a continuación como cualquier otro problema de ajuste mínimo-cuadrático discreto.

El sistema de ecuaciones normales que resulta es:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{8} 1 & \sum_{i=1}^{8} x_i \\ \sum_{i=1}^{8} x_i & \sum_{i=1}^{8} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{8} Y_i \\ \sum_{i=1}^{8} Y_i x_i \end{pmatrix}$$

Para realizar el cálculo de todos estos sumatorios planteamos la siguiente tabla:

	x_i	y_i	$Y_i=\ln(y_i)$	x_i^2	$Y_i x_i$
	1	1.5	0.405465	1	0.405465
	2	1	0	4	0
	3	0.73	-0.314711	9	-0.944132
	4	0.6	-0.510826	16	-2.0433
	5	0.3	-1.20397	25	-6.01986
	6	0.2	-1.60944	36	-9.65663
	7	0.1	-2.30259	49	-16.1181
	8	0.08	-2.52573	64	-20.2058
Σ	36		-8.0618	204	-54.5824

El sistema de ecuaciones lineales resultante es:

$$\begin{pmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 204 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.0618 \\ -54.5824 \end{pmatrix}$$

Y su solución es: B=0.953451 y A=-0.435817.

La recta que ajusta a los puntos $\{x_i, \ln(y_i)\}$ es: $r(x) = 0.953451 - 0.435817x$

Deshaciendo el cambio de variable resulta que los puntos $\{x_i, y_i\}$ se ajustan a la función: $f(x) = e^{r(x)} = e^{0.953451-0.435817x} = 2.59465e^{-0.435817x}$

Error cometido en el ajuste mínimo-cuadrático.

El concepto básico utilizado en este capítulo es el de calcular una función cuya distancia a otra sea mínima.

El error cometido al utilizar la nueva función f^* en lugar de la función dato del problema se puede evaluar mediante el cálculo de la distancia entre ambas.

Así el error cometido en el ajuste mínimo-cuadrático en general será: $d\left(f, f^*\right) = \left\| f - f^* \right\|$. Por lo tanto, para evaluar el error cometido basta calcular el vector diferencia entre la función dato del problema y la función del ajuste y posteriormente calcular su norma.

Para el caso continuo o el caso discreto se aplicará la norma inducida por el producto escalar utilizado.

-Caso continuo. Error: $\left\| f - f^* \right\| = \sqrt{\int_a^b \left(f(x) - f^*(x)\right) \cdot \left(f(x) - f^*(x)\right) dx}$

- Caso discreto. Error: $\left\| f - f^* \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f^*(x_i)\right)^2}$

Ejemplo 1:

En el caso discreto resolvimos el siguiente problema:

Ajustar la función f(x)=-Cos(π(x+1)) en el intervalo [1,3] mediante una parábola.

El resultado del ajuste fue: $\mathrm{p(x)} = -\frac{165}{2\pi^2} + \frac{90}{\pi^2} x - \frac{45}{2\pi^2} x^2$.

El error cometido se calcula de la siguiente manera:

1º.- Calcular el vector diferencia: $f(x) - p(x) = Cos\left(\pi(x+1)\right) - \left(-\frac{165}{2\pi^2} + \frac{90}{\pi^2} x - \frac{45}{2\pi^2} x^2\right)$.

2º.- Calcular la norma de este vector diferencia que será el error cometido en el ajuste:

$$d\left(f(x), p(x)\right) = \left\| f(x) - p(x) \right\| = \sqrt{\int_1^3 \left(Cos\left(\pi(x+1)\right) - \left(-\frac{165}{2\pi^2} + \frac{90}{\pi^2} x - \frac{45}{2\pi^2} x^2\right)\right)^2 dx} = 3.77182$$

Ejemplo 2:

Ajustar el conjunto de puntos siguiente mediante un polinomio de grado menor o igual que dos.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1.5	1	0.73	0.6	0.3	0.2	0.1	0.08

El polinomio resultante es: p(x)= 1.87339-0.4553x+0.02899x^2.

En el caso discreto, se debe calcular la distancia entre el vector **y** y el polinomio p(x), es decir la norma del vector diferencia: $\left\| \boldsymbol{y} - p(x) \right\|$, que es un vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes serán $\left\{ y_i - p(x_i) \right\}$.

Para hacer esta operación se utiliza una tabla al igual que se hizo para el cálculo del polinomio p(x)

	x_i	y_i	$p(x_i)$	$y_i - p(x_i)$	$(y_i - p(x_i))^2$
	1	1.5	1.44708	0.05292	0.00280053
	2	1	1.07875	-0.07875	0.00620156
	3	0.73	0.7684	-0.0384	0.00147456
	4	0.6	0.51603	0.08397	0.00705096
	5	0.3	0.32164	-0.02164	0.00046829
	6	0.2	0.18523	0.01477	0.000218153
	7	0.1	0.1068	-0.0068	0.00004624
	8	0.08	0.08635	-0.00635	0.0000403225
Σ	36	4.51			0.0183006

El error es la norma del vector diferencia: $\sqrt{\sum_{i=1}^{8}\left(y_i - p(x_i)\right)^2} = \sqrt{0.0183006} = 0.13528$

Apéndice I: Polinomios ortogonales. Aproximación mínimo-cuadrática continua.

Cuando se realiza un ajuste minimo-cuadrático, el sistema de ecuaciones normales es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} <\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}> & <\mathbf{e_2},\mathbf{e_1}> & \cdots & <\mathbf{e_n},\mathbf{e_1}> \\ <\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}> & <\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}> & \cdots & <\mathbf{e_n},\mathbf{e_2}> \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <\mathbf{e_1},\mathbf{e_n}> & <\mathbf{e_2},\mathbf{e_n}> & \cdots & <\mathbf{e_n},\mathbf{e_n}> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} <\mathbf{x},\mathbf{e_1}> \\ <\mathbf{x},\mathbf{e_2}> \\ \vdots \\ <\mathbf{x},\mathbf{e_n}> \end{pmatrix},$$

donde **x** es el vector que se desea aproximar y los $\mathbf{e_i}$, son los vectores de la base correspondiente al subespacio sobre el que se desea realizar la proyección ortogonal.

En el caso del ajuste mínimo-cuadrático continuo mediante polinomios, la expresión se transforma en la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \int_a^b 1\bullet 1dx & \int_a^b 1\bullet xdx & \cdots & \int_a^b 1\bullet x^n dx \\ \int_a^b x\bullet 1dx & \int_a^b x\bullet xdx & \cdots & \int_a^b x\bullet x^n dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b x^n\bullet 1dx & \int_a^b x^n\bullet xdx & \cdots & \int_a^b x^n\bullet x^n dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b \mathrm{f(x)}\bullet 1dx \\ \int_a^b \mathrm{f(x)}\bullet xdx \\ \vdots \\ \int_a^b \mathrm{f(x)}\bullet x^n dx \end{pmatrix},$$

donde f(x) es la función que se desea aproximar mediante un polinomio de grado menor o igual que n.

En general, el sistema de ecuaciones normales es un sistema denso, es decir, la mayor parte, si no todos, los coeficientes de la matriz del sistema son no nulos, por lo que hay que resolver el sistema mediante alguno de los métodos clásicos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Para simplificar esa resolución se puede transformar el sistema hasta conseguir uno que sea diagonal. Esto se consigue si en lugar de utilizar la base usual de vectores del subespacio de los polinomios de grado menor o igual que n, se utiliza una base ortogonal en el intervalo [a,b] en el que se desea realizar el ajuste. En ese caso el sistema de ecuaciones normales queda representado de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \int_a^b \mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_1}dx & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \int_a^b \mathbf{e_2}\cdot\mathbf{e_2}dx & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \int_a^b \mathbf{e_{n+1}}\cdot\mathbf{e_{n+1}}dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b \mathrm{f(x)}\bullet\mathbf{e_1}dx \\ \int_a^b \mathrm{f(x)}\bullet\mathbf{e_2}dx \\ \vdots \\ \int_a^b \mathrm{f(x)}\bullet\mathbf{e_{n+1}}dx \end{pmatrix}.$$

Resolviendo este sistema se obtiene el polinomio del ajuste mínimo cuadrático:

$$p(x) = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} + \cdots + u_{n+1}\mathbf{e_{n+1}}.$$

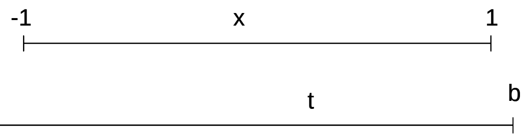
Para conseguir esto, solo se necesita elegir la base de vectores $\mathbf{e}_i$ adecuada que sea ortogonal en el intervalo [a,b].

Polinomios ortogonales de Legendre

Existe una familia de polinomios que son ortogonales en el intervalo [-1,1] para el producto escalar usual $<\mathrm{f},\mathrm{g}>=\int_{-1}^{1}\mathrm{f(x)}\,\mathrm{g(x)}dx$. Esta familia de polinomios se conoce con el nombre de polinomios ortogonales de Legendre y son los siguientes:

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$
$$P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$$
$$P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$$
$$P_6(x)=\frac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right)$$

Si el problema de ajuste se debe resolver en el intervalo [-1,1], se tomará la base del subespacio de entre los polinomios ortogonales de Legendre que se han indicado anteriormente. En caso que el intervalo [a,b], no coincida con el intervalo [-1,1], habra que calcular una base de polinomios ortogonales, realizando un desplazamiento y un cambio de escala respecto del intervalo [-1,1].



La relación entre la variable t y la variable x se calcula mediante la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que relacionan los extremos del intervalo [-1,1] en variable x con el intervalo [a,b] en la variable t.

$$t=\alpha+\beta\cdot x\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{a}=\alpha+\beta\cdot(-1)\\ \mathrm{b}=\alpha+\beta\cdot(1)\end{cases}\Rightarrow t=\frac{1}{2}\left(\left(\mathrm{a+b}\right)+\left(\mathrm{b\text{-}a}\right)\cdot x\right).$$

En la expresión se puede apreciar como el origen se ha desplazado al punto $(\mathrm{a+b})/2$ y la relación de escalas entre los segmentos es $(b-a)/2$.

De esta manera, sustituyendo x por su valor en los polinomios de Legendre , conseguimos otra familia de polinomios, en variable t, que son ortogonales en el intervalo [a,b].

Estos nuevos vectores nos permiten realizar el ajuste mínimo-cuadrático continuo mediante un sistema de ecuaciones normales que es diagonal.

Ejemplo:

Dada la función $f\left(x\right)=-\cos\left(\pi((x+1)\right)$, realizar un ajuste mínimo-cuadrático de f(x) mediante una parábola en el intervalo [1,3], utilizando polinomios ortogonales.

En el intervalo [-1,1], los polinomios ortogonales son:$1,\ x,\ \left(3x^2-1\right)/2$, para obtener los polinomios ortogonales en el intervalo [1, 3], se resuelve el siguiente sistema:

$$x=\alpha+\beta\cdot t\Rightarrow\begin{cases}-1=\alpha+\beta\cdot 1\\ 1=\alpha+\beta\cdot 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=1\end{cases}\Rightarrow x=t-2\,.$$

El nuevo intervalo está desplazado dos unidades respecto del [-1, 1] y la amplitud es la misma.

Sustituyendo x en los polinomios de Legendre se obtiene una nueva base ortogonal en el intervalo [1,3]

$$P_0(t)=1$$
$$P_1(t)=-2+t$$
$$P_2(t)=\frac{1}{2}\left(3\left(-2+t\right)^2-1\right)=\frac{1}{2}\left(11-12t+3t^2\right)$$

El problema consiste ahora en calcular el polinomio de grado dos que mejor se ajusta a $f\left(t\right)=-\cos\left(\pi((t+1)\right)$ en el intervalo [1,3] a partir de la base de polinomios ortogonales $P_0(t)\,,P_1(t)$ y $P_2(t)$.

El sistema de ecuaciones normales resultante es:

$$\begin{pmatrix}\int_1^3 1\cdot 1dt & 0 & 0\\ 0 & \int_1^3(-2+t)^2\,dt & 0\\ 0 & 0 & \int_1^3\left(\frac{1}{2}\left(11-12t+3t^2\right)\right)^2 dt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_1^3(-Cos(\pi(t+1))\cdot 1dt\\ \int_1^3(-Cos(\pi(t+1))\cdot\left(-2+t\right)dx\\ \int_1^3(-Cos(\pi(t+1))\cdot\left(\frac{1}{2}\left(11-12t+3t^2\right)\right)dx\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{-6}{\pi^2}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}u_0=0\\ u_1=0\\ u_2=\frac{-15}{\pi^2}\end{cases}\;;$$

el polinomio que mejor se ajusta a la función es por tanto: $p(t)=u_0\cdot P_0(t)+u_1\cdot P_1(t)+u_2\cdot P_2(t)$

$$p(t)=\frac{-15}{\pi^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(11-12t+3t^2\right)\right)=-\frac{165}{2\pi^2}+\frac{90}{\pi^2}t-\frac{45}{2\pi^2}t^2\,.$$

Ejercicios

1.- Hallar el polinomio que mejor se ajuste a los datos de la tabla siguiente, utilizando la técnica de mínimos cuadrados (sin utilizar polinomios ortogonales).

x	1	2	3	4	5	6	7
y	4	7	9	10	9	7	4

2.- Encontrar la recta que mejor se ajusta a los datos de la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	2	4	3	6	5	7	9	8

3.- Dada la siguiente tabla de datos, obtenida experimentalmente, hallar la constante g que relaciona las variables t y d $(d \cong \frac{1}{2} \cdot gt^2)$

t	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
d	0.1960	0.7850	1.7665	3.1405	4.9075

4.-Ajustar los datos de la tabla siguiente mediante una parábola considerando el método de mínimos cuadrados. Determinar el error mínimo cuadrático.

x_i	0.00	0.25	0.5	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

Nota: Trabajar con cuatro cifras decimales y redondeo simétrico

5.- Dada la siguiente tabla

x	1	2	3
y	7	9	11

Encontrar una curva por el procedimiento de mínimos cuadrados, que se ajuste a los datos, de la siguiente forma:

a) $y = a \cdot x$

b) $y = a \cdot x + b$

6.- Dada la tabla

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

Utilizar la técnica de mínimos cuadrados para obtener un ajuste aproximado a estos valores.

Nota: Trabajar con cinco cifras decimales y redondeo simétrico.

7.- Hallar la parábola que mejor se ajuste a los siguientes datos:

x	1	2	3	4
y	2	4	6	8

8.- Encontrar una curva de la forma

$$y = \frac{1}{A \cdot x + B}$$

que se ajuste a los datos de la tabla:

x_i	-1	0	1	2	3
y_i	6.62	3.94	2.17	1.35	0.89

b) Obtener el error mínimo cuadrático y el error cometido por el ajuste anterior al aproximar los valores y_i por la curva y.

Nota: Trabajar con cuatro cifras decimales y redondeo simétrico.

9.- Repetir el ejercicio anterior, trabajando con dos cifras decimales y redondeo simétrico, para los datos

x_i	0	1	2	3
y_i	1.01	0.34	0.20	0.14

10.- Repetir el ejercicio número 8, trabajando con dos cifras decimales y redondeo simétrico, con los datos de la tabla

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	3	20	87	100

11.- Aproximar la función

$$f(x) = L(x)$$

por una recta en el intervalo $[1, 2]$,

12.- Encontrar la aproximación polinómica de mínimos cuadrados de grado uno de f (x) en el intervalo indicado:

a) $f(x) = x^3 - 1 \quad en\ [0,2]$

b) $f(x) = \cos(\pi x) \quad en\ [0,1]$