4

Cálculo de raíces de ecuaciones no lineales.

Introducción.

La resolución de ecuaciones en una variable es uno de los problemas clásicos de la aproximación numérica. Se trata de hallar una raíz de una ecuación de la forma $f(x)=0$ para una función dada *f*. Al valor de *x* que verifica la ecuación se lo suele llamar también *cero* .

Todos los métodos necesitan comenzar por una aproximación inicial a partir de la cual generan una sucesión que converge a la raíz de la ecuación.

Si [*a* , *b*] es un intervalo en el que la función cambia de signo, y *f* es continua en dicho intervalo, entonces existe un valor *c* perteneciente al intervalo (*a* , *b*) en el que la función se anula. Los métodos de bisección y de falsa posición parten de dicho intervalo para construir una sucesión que siempre converge a la raíz. Estos dos métodos se denominan "métodos cerrados".

Los "métodos abiertos" son aquellos en los que el proceso iterativo de cálculo de la raíz de la ecuación $f(x)=0$ se realiza sin considerar en cada etapa intervalos dentro del cuales se encuentre constantemente "encajada" la raíz.

Por tanto los métodos abiertos, a diferencia de los métodos cerrados, no aseguran la convergencia a la solución del problema.

De los distintos métodos abiertos para la resolución de una ecuación no lineal se verán el método de punto fijo, el de Newton-Raphson y el de la secante.

Método de bisección.

Se trata de un método cerrado, en el que el punto *p*, raíz de la ecuación $f(x)=0$, se encuentra siempre dentro del intervalo de trabajo $[a,b]$.

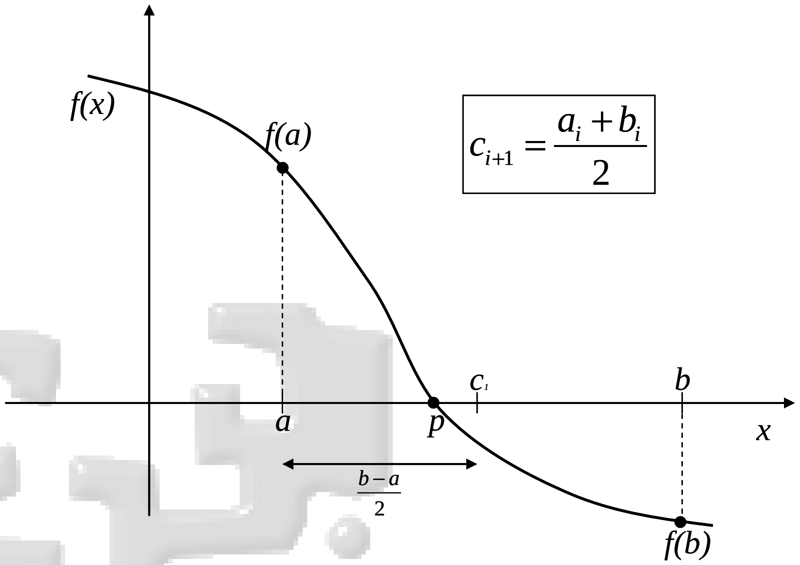
No es un método de cálculo de la raíz estrictamente, sino que es un método mediante el cual se consigue disminuir progresivamente la anchura del intervalo hasta que sea suficientemente pequeña.

En este método en cada etapa se divide el intervalo por la mitad, obteniendo un punto $c=\dfrac{a+b}{2}$.

A continuación se analiza en cuál de los dos subintervalos $[a,c]$ o $[c,b]$ se encuentra la raíz.

Aplicando el teorema de Bolzano, si $f(a)\cdot f(c)<0$, la raíz está en el intervalo $[a,c]$ de manera que se renombran los extremos del intervalo $a=a$; $b=c$. En caso que $f(a)\cdot f(c)>0$ la raíz está en el subintervalo $[c,b]$, con lo que se renombran los extremos del intervalo $a=c$; $b=b$.

Este proceso se continúa hasta que la longitud del intervalo resultante $[a,b]$ sea tan pequeña como se desee.



Esquema del método de bisección

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

Proceso de cálculo:

Primera etapa: $c_1=\dfrac{a+b}{2}\begin{cases}\textbf{Si } f(a)\cdot f(c_1)<0\Rightarrow\begin{cases}a_1=a\\ b_1=c\end{cases}\\ \textbf{Si } f(a)\cdot f(c_1)>0\Rightarrow\begin{cases}a_1=c\\ b_1=b\end{cases}\end{cases}$

Etapa enésima: $c_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\begin{cases}\textbf{Si } f(a_{n-1})\cdot f(c_n)<0\Rightarrow\begin{cases}a_n=a_{n-1}\\ b_n=c_n\end{cases}\\ \textbf{Si } f(a_{n-1})\cdot f(c_n)>0\Rightarrow\begin{cases}a_n=c_n\\ b_n=b_{n-1}\end{cases}\end{cases}$

Teorema de convergencia del método de bisección.

Dada una función $f(x)$, continua en un intervalo $[a,b]$, si $f(a)\cdot f(b)<0$, la sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ de los puntos medios de los intervalos generados por el método de bisección, convergen a una raíz *p* de la ecuación $f(x)=0$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=p$.

Además $\left|p-c_n\right| \le \frac{b-a}{2^n}$ para n=1, 2, …

Demostración:

La cota máxima de error cometida en la primera etapa será $\left|p-c_1\right| \le \frac{b-a}{2}$

La cota máxima de error cometida en la segunda etapa será: $\left|p-c_2\right| \le \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$

Por inducción se puede demostrar que la cota de error en la etapa enésima será $\left|p-c_n\right| \le \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$.

Tomando límites: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|p-c_n\right| \le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left|p-c_n\right| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} c_n = p$

Ejemplo:

Se desea calcular la raíz de la función $f(x)=\sin(x)-x+\frac{3}{2}$, que se encuentra en el intervalo $[2,3]$ mediante el método de bisección.

En primer lugar comprobamos que la raíz se encuentra dentro del intervalo.

Para ello se calcula el valor de la función en los extremos del intervalo y se aplica el teorema de Bolzano. $\left.\begin{matrix} f(2)=0.409297 \\ f(3)=-1.35888 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(2)\cdot f(3)<0$

Primera etapa: $c=\frac{a+b}{2}=\frac{2+3}{2}=2.5$.

A partir de este punto *c* se busca el nuevo intervalo $[a,b]$.

$$f(2.5)=-0.401528;\ f(2)\cdot f(2.5)<0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2.5 \end{cases}$$

Segunda etapa: $c=\frac{a+b}{2}=\frac{2+2.5}{2}=2.25$.

Se calcula el nuevo intervalo, $f(2.25)=0.0280732;\ f(2)\cdot f(2.25)>0 \Rightarrow \begin{cases} a=2.25 \\ b=2.5 \end{cases}$

De esta manera se consigue una sucesión de valores c que van acercándose progresivamente al valor de la raíz.

Después de dieciséis iteraciones resulta $c = 2.26717$, evaluando la función en ese punto resulta $f(2.26717) = 3.2971 \times 10^{-6}$ muy próximo a cero.

En el siguiente apartado se ha realizado el cálculo con el programa Mathematica, realizando un total de veinte iteraciones.

Ejemplo con *Mathematica*.

```
In[1]:= f[x_] = Sin[x] - x + 3/2

Out[1]= 3/2 - x + Sin[x]

In[2]:= a = 2; b = 3;

In[3]:= Do[c = (a + b)/2; iz[i] = a; der[i] = b; x[i] = c; If[f[a] * f[c] < 0, b = c, a = c], {i, 1, 20}]

In[4]:= Table[{i, iz[i] // N, x[i] // N, der[i] // N}, {i, 1, 20}];

In[5]:= Prepend[%, {k, "Extremo izquierdo", "Punto medio", "Extremo derecho"}];

In[6]:= TableForm[%]

Out[6]//TableForm=
```

k	Extremo izquierdo	Punto medio	Extremo derecho
1	2.	2.5	3.
2	2.	2.25	2.5
3	2.25	2.375	2.5
4	2.25	2.3125	2.375
5	2.25	2.28125	2.3125
6	2.25	2.26563	2.28125
7	2.26563	2.27344	2.28125
8	2.26563	2.26953	2.27344
9	2.26563	2.26758	2.26953
10	2.26563	2.2666	2.26758
11	2.2666	2.26709	2.26758
12	2.26709	2.26733	2.26758
13	2.26709	2.26721	2.26733
14	2.26709	2.26715	2.26721
15	2.26715	2.26718	2.26721
16	2.26715	2.26717	2.26718
17	2.26717	2.26717	2.26718
18	2.26717	2.26717	2.26717
19	2.26717	2.26717	2.26717
20	2.26717	2.26717	2.26717

El método de bisección nos permite conocer a priori el número de etapas que hay que realizar para que el error cometido sea menor que una cantidad determinada.

La cota de error cometido en la etapa enésima, como se explicó previamente es $|p - c_n| \le \frac{b-a}{2^n}$, de modo que si se pretende que esa cota sea menor que una cantidad determinada ε, se tiene: $\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon \Rightarrow \frac{2^n}{b-a} \ge \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 2^n \ge \frac{b-a}{\varepsilon}$.

Tomando logaritmos es la expresión, se puede despejar el valor de n.

$$n \cdot \ln(2) \ge \ln(b-a) - \ln(\varepsilon) \Rightarrow \boxed{n \ge \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}}$$

Como se puede apreciar en el ejemplo anterior, cuando se desea que el error sea menor que 1×10^{-3}, el número de iteraciones que se debe realizar es: $n \geq \dfrac{\ln(3-2)-\ln(1\times10^{-3})}{\ln(2)} \simeq 9.96$, por lo tanto como *n* debe ser un número entero, son necesarias n=10 iteraciones para que el error sea menor que 1×10^{-3}.

Efectivamente, $\left|c_{10}-c_9\right| = \left|2.2666-2.26758\right| = 9.8\times10^{-4} < 1\times10^{-3}$

Método de falsa posición.

El método de bisección es útil para obtener una raíz en un intervalo $[a,b]$ con una cierta precisión, sin embargo, el número de etapas que se deben realizar para llegar a dicha precisión es elevado. Por otro lado, en cada iteración se debe evaluar la función en el punto c, aunque posteriormente solamente se utiliza ese resultado para determinar el subintervalo en que se encuentra la raíz de la ecuación, mediante el teorema de Bolzano.

Para mejorar el método se pretende utilizar los datos conocidos en cada iteración para conseguir una mejor aproximación en la siguiente etapa.

Parece razonable pensar que si el valor de la función $f(x)$ es más próximo a cero cerca del punto a que del punto b, la raíz de la ecuación $f(x)=0$ esté también más próxima al extremo a del intervalo.

De esta manera se consigue utilizar el valor de la función $f(x)$ en los extremos del intervalo $[a,b]$ para obtener el nuevo punto c.

El punto c se obtiene calculando el punto de intersección de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con el eje de abscisas.

Recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$: $y - f(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

La intersección de dicha recta con el eje de abscisas, c, se obtiene despejando x para el valor de $y=0$.

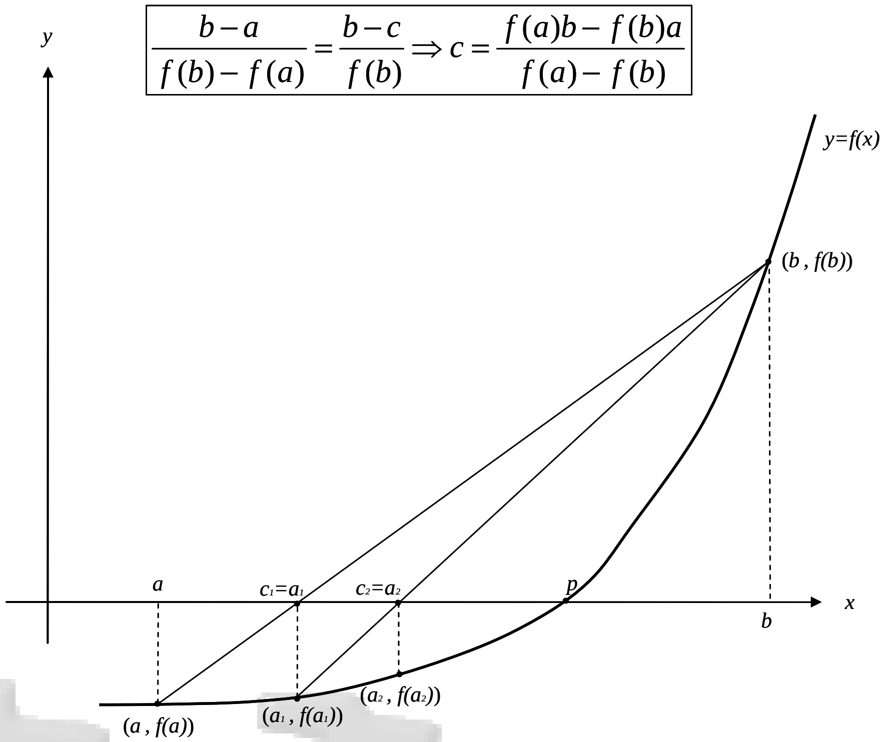
$$f(a)\frac{a-b}{f(b)-f(a)} = c-a \Rightarrow c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

$$c = a - \frac{f(a)\cdot b - f(a)\cdot a}{f(b)-f(a)} = \frac{f(b)\cdot a - f(a)\cdot a - f(a)\cdot b + f(a)\cdot a}{f(b)-f(a)};$$

$$\boxed{c = \frac{f(b)\cdot a - f(a)\cdot b}{f(b)-f(a)}}$$

También se puede obtener esta expresión mediante semejanza de triángulos como se indica en la figura siguiente.

$$\boxed{\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{b-c}{f(b)} \Rightarrow c = \frac{f(a)b - f(b)a}{f(a)-f(b)}}$$



Esquema del método de falsa posición

Ejemplo:

Se desea calcular la raíz de la función $f(x) = \sin(x) - x + \frac{3}{2}$, que se encuentra en el intervalo $[2,3]$ mediante el método de falsa posición.

En primer lugar comprobamos que la raíz se encuentra dentro del intervalo.

Para ello se calcula el valor de la función en los extremos del intervalo y se aplica el teorema de Bolzano. $\left.\begin{array}{l} f(2) = 0.409297 \\ f(3) = -1.35888 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)\cdot f(3) < 0$

Primera etapa: $c = \dfrac{f(b)\cdot a - f(a)\cdot b}{f(b)-f(a)} = \dfrac{(-1.35888)\cdot 2 - 0.409297\cdot 3}{(-1.35888) - 0.409297} = 2.23148$.

A partir de este punto *c* se busca el nuevo intervalo $[a,b]$.

$$f(2.23148) = 0.0580929;\ f(2)\cdot f(2.23148) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2.23148 \\ b = 3 \end{cases}$$

Segunda etapa: $c = \dfrac{f(b)\cdot a - f(a)\cdot b}{f(b)-f(a)} = \dfrac{(-1.35888)\cdot 2.23148 - 0.0580929\cdot 3}{(-1.35888) - 0.0580929} = 2.26299$.

Se calcula el nuevo intervalo,

$$f(2.26299)=0.00685781;\ f(2.23148)\cdot f(2.26299)>0 \Rightarrow \begin{cases} a=2.26299 \\ b=3 \end{cases}$$

De esta manera se consigue una sucesión de valores c que van acercándose progresivamente al valor de la raíz.

Después de seis etapas, el error cometido es $|c_6 - c_5| = 5,61827\times 10^{-6}$

En el siguiente apartado se ha realizado el cálculo con el programa Mathematica, realizando un total de seis iteraciones.

Ejemplo con *Mathematica*.

Método de Falsa Posición

```
In[1]:= f[x_] = Sin[x] - x + 3/2

Out[1]= 3/2 - x + Sin[x]

In[2]:= a = 2; b = 3;

In[3]:= Do[c = (f[a] * b - f[b] * a)/(f[a] - f[b]); iz[i] = a; der[i] = b; x[i] = c; If[f[a] * f[c] < 0, b = c, a = c],
        {i, 1, 6}]

In[4]:= Table[{i, iz[i] // N, x[i] // N, der[i] // N}, {i, 1, 6}];

In[5]:= Prepend[%, {k, "Extremo izquierdo", "Punto intermedio", "Extremo derecho"}];

In[6]:= TableForm[%]

Out[6]//TableForm=
```

k	Extremo izquierdo	Punto intermedio	Extremo derecho
1	2.	2.23148	3.
2	2.23148	2.26299	3.
3	2.26299	2.26669	3.
4	2.26669	2.26712	3.
5	2.26712	2.26717	3.
6	2.26717	2.26717	3.

Método de punto fijo o de aproximaciones sucesivas.

Este método sustituye el cálculo de la raíz de la función $f(x)$, por el cálculo de un punto fijo de la función g(x). De modo que la raíz *p* que cumple *f*(*p*)=0, cumple simultáneamente g(*p*)=*p*

Función de punto fijo.

El punto *p*, se dice que es **punto fijo** de la función $g(x)$ si $g(p)=p$.

Para resolver la ecuación $f(x)=0$, se debe encontrar funciones $g(x)$ que cumplan que cuando $f(p)=0$, también $g(p)=p$.

En general la función $g(x)$ se puede obtener como $g(x)=x+h(x)\cdot f(x)$; de modo que cuando se evalúa la función $g(x)$ en el punto p, resulta: $g(p)=p+h(p)\cdot f(p)$.

Como el punto *p* es raíz de la función $f(x)$, $f(p)=0$, de modo que la función $g(x)$ tiene un punto fijo en *p* $g(p)=p+h(p)\cdot 0 \Rightarrow g(p)=p$.

Como se puede apreciar en la expresión de cálculo de la función $g(x)$, existen infinitas funciones que cumplen la condición de tener un punto fijo en *p* cuando $f(p)=0$. Basta con utilizar diferentes funciones $h(x)$ para conseguir distintas funciones $g(x)$.

Cálculo del punto fijo

Como se acaba de explicar, calcular el punto fijo de $g(x)$ es equivalente a calcular la raíz de la función $f(x)$.

El punto fijo de $g(x)$ se calcula mediante aproximaciones sucesivas (de ahí el nombre del método). Se parte de una aproximación inicial a la solución del problema, x_0 y se obtiene una nueva aproximación, $x_1 = g(x_0)$, así se continua sucesivamente de manera que el cálculo de la aproximación x_{i+1} se realiza mediante la expresión $x_{i+1} = g(x_i)$.

Si el proceso es convergente, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = p$.

Por tanto el cálculo de la raíz *p* de la función $f(x)$, se puede realizar mediante aproximaciones sucesivas a través de la función $g(x)$.

Para realizar este proceso, previamente, se debe analizar si la función $g(x)$ que se ha elegido, de entre las infinitas posibles, tiene un punto fijo en *p*, si es único y además si el proceso de cálculo es convergente.

Por tanto, deberemos analizar, la existencia y unicidad del punto fijo, y posteriormente la convergencia del método a partir de la función $g(x)$.

Teorema del punto fijo.

1. Si $g(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $g(x)\in[a,b] \quad \forall x\in[a,b]$, entonces existe al menos un punto fijo *p* en el intervalo $[a,b]$ tal que $g(p)=p$.

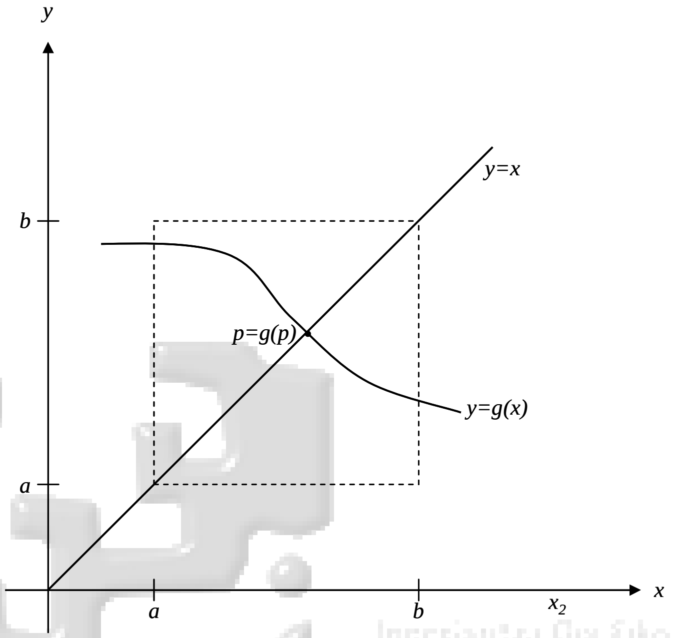
2. Si además la función $g(x)$ es derivable en el intervalo $[a,b]$ y se cumple que: $\exists\, \mathbf{K}<1 \;\; / \;\; |g'(x)| \le \mathbf{K} \;\; \forall x\in[a,b]$, entonces el punto fijo p de la función $g(x)$ en el intervalo $[a,b]$, es único.

Demostración de (i):

Si $g(a)=a$ ó $g(b)=b$ la conclusión es cierta, al menos existe un punto fijo en *a* ó en *b* respectivamente.

Supongamos que no se cumple ninguna de esas dos condiciones. En ese caso, para que se cumpla el teorema $a < g(a) \le b$ y $a \le g(b) < b$.

Por tanto, si se considera una función auxiliar $h(x) = x - g(x)$, se cumple que $h(a) = a - g(a) < 0$ y $h(b) = b - g(b) > 0$, por el teorema de Bolzano, esto implica que la función $h(x)$ tiene una raíz en el intervalo $[a,b]$, por tanto $\exists p \in [a,b] / h(p) = p - g(p) = 0 \Rightarrow p = g(p)$. Es decir existe al menos un punto fijo en el intervalo $[a,b]$.



Esquema de la existencia de punto fijo

Demostración de (ii):

Supongamos que en lugar de un solo punto fijo existen dos, p_1 y p_2, aplicando el teorema del valor medio, se deduce que existe un punto $c \in [a,b]$ tal que $g'(c) = \dfrac{g(p_2) - g(p_1)}{p_2 - p_1}$, dado que p_1 y p_2 son puntos fijos, $g(p_1) = p_1$ y $g(p_2) = p_2$, por tanto, $g'(c) = \dfrac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} = 1$, lo que contradice la hipótesis de partida, de que $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [a,b]$, así que no es posible que existan dos puntos fijos en el intervalo, por tanto, $g(x)$ tiene un único punto fijo en el intervalo $[a,b]$.

Teorema de la convergencia del método de punto fijo.

Dada una función $g(x)$, definida en un intervalo $[a,b]$ y que cumple las siguientes condiciones:

- - $g(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $g(x) \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b]$.
- - $g'(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$.

Entonces , si $\left|g'(x)\right| \leq \mathbf{K} < 1 \;\; \forall x \in [a,b]$, para cualquier valor $x_0 \in [a,b]$, la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ converge al punto fijo *p*.

Demostración:

Para demostrarlo, se planteará el error cometido en la enésima iteración:

$\left|x_n - p\right| = \left|g(x_{n-1}) - p\right| = \left|g(x_{n-1}) - g(p)\right|$, aplicando el teorema del valor medio resulta, $\left|x_n - p\right| = \left|g(x_{n-1}) - g(p)\right| = \left|g'(c)*(x_{n-1} - p)\right| = \left|g'(c)\right|\left|x_{n-1} - p\right| \leq \mathbf{K}\left|x_{n-1} - p\right|$

Esto implica que x_n está más próximo a *p* que x_{n-1}, ya que K<1.

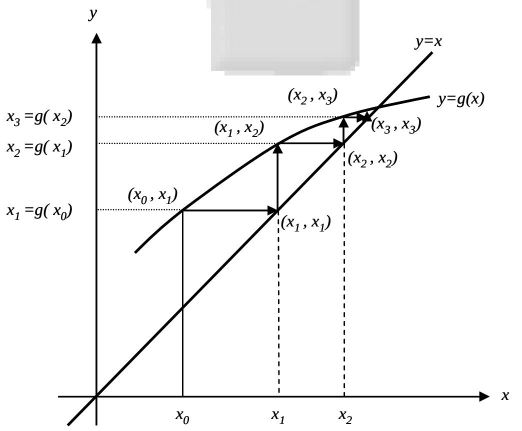
Ahora se demostrará que $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n - p\right| = 0$.

Por inducción se puede demostrar que $\left|x_n - p\right| \leq \mathbf{K}^n\left|x_0 - p\right|$.

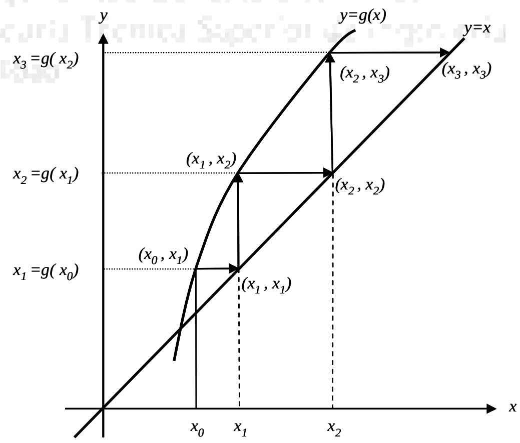
Como $0 < \mathbf{K} < 1$, $\mathbf{K}^n$ tiende a cero cuando n tiende a infinito y por tanto, $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n - p\right| \leq \lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{K}^n\left|x_0 - p\right|$, así, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n - p\right| = 0$, lo que implica que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$.

Interpretación gráfica del método de aproximaciones sucesivas.

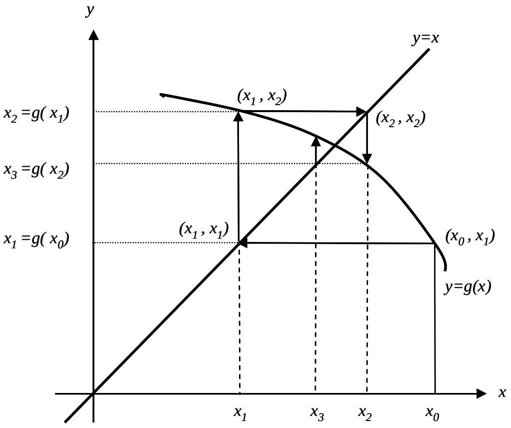
A continuación se presentan las situaciones posibles que se pueden dar aplicando el método del punto fijo, tanto las convergentes como las divergentes:



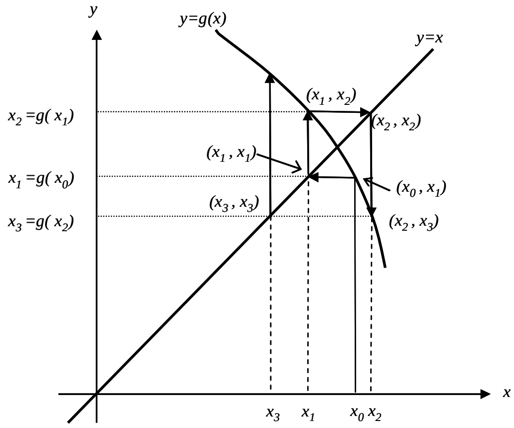
Caso convergente, derivada positiva $0 < g'(x) < 1$



Caso divergente, derivada positiva $g'(x) > 1$



Caso convergente, derivada negativa $-1<g'(x)<0$



Caso divergente, derivada negativa $g'(x) < -1$

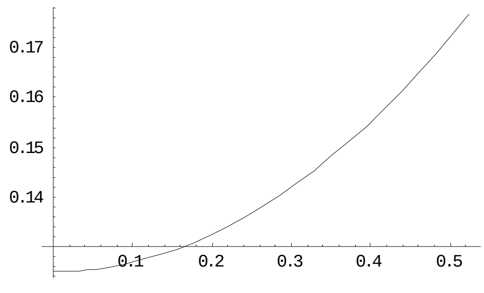
En las figuras que representan las situaciones en que el método es convergente, se puede apreciar como en el caso en que $g'(x)$ es positiva, el proceso converge a la solución a partir del punto x_0 de forma monótona, mientras que cuando el proceso es convergente con $g'(x)$ negativa, las aproximaciones sucesivas oscilan a izquierda y derecha del punto fijo *p* solución del problema.

Ejemplo:

Se desea conocer la raíz de función $f(x) = 8x - cos(x) - 2x^2$, que se encuentra en el intervalo $[0, \pi/6]$, aplicando para ello el método de aproximaciones sucesivas a la función $g(x) = \dfrac{\cos(x) + 2x^2}{8}$.

En primer lugar se analizarán las condiciones de existencia y unicidad del punto fijo y la convergencia del método, para ello se debe comprobar que $g(x) \in [0, \pi/6] \quad \forall x \in [0, \pi/6]$ y que $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [0, \pi/6]$

Evaluamos $g(0) = 0$ y $g(\pi/6) = 0.176792$, además el gráfico de la función $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi/6]$ es el siguiente:

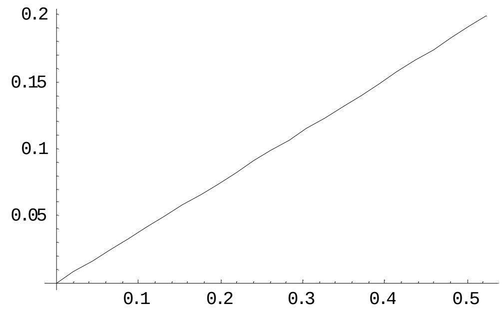


Representación de la función $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi/6]$

Evaluamos la derivada de $g(x)$; $g'(x)=\dfrac{4x-\sin(x)}{8}$.

$g'(0)=0$ y $g'(\pi/6)=0.199299$, ambos valores son menores que uno, lo que asegura la convergencia del método de manera monótona.

La función derivada en el intervalo $[0,\pi/6]$ se representa así:



Representación de la derivada $g'(x)$ en el intervalo $[0,\pi/6]$

Se comenzará el proceso de cálculo $x_1=g(x_0)$ utilizando como aproximación inicial el punto medio del intervalo: $x_0=\dfrac{0+\pi/6}{2}=\dfrac{\pi}{12}$

Primera etapa: $x_1=g(x_0)=g(\pi/12)=0.137875$; el error cometido será el valor absoluto de la diferencia $error=|x_1-x_0|=0.123924$.

Segunda etapa: $x_2=g(x_2)=g(0.137875)=0.128566$; $error=|x_2-x_1|=0.00930927$.

Después de seis iteraciones se llega a una solución con error < 10^{-6} y solución $x_6=0.128077$.

Ejemplo con *Mathematica*.

Método de Punto Fijo

```
In[1]:= f[x_] = 8 x - Cos[x] - 2 x^2
Out[1]= 8 x - 2 x^2 - Cos[x]
In[2]:= g[x_] = (Cos[x] + 2 x^2)/8
Out[2]= 1/8 (2 x^2 + Cos[x])
In[3]:= x0 = (0 + Pi/6)/2; error = 1; Itermax = 100; i = 0;
        While[error > 10^-6 && i < Itermax, x1 = g[x0]; error = Abs[x1 - x0]; x0 = x1; i++;
         Print["iteración ", i, "    x̄=", x0 // N, "  error=", error // N];]
        iteración 1   x̄=0.137875  error=0.123924
        iteración 2   x̄=0.128566  error=0.00930927
        iteración 3   x̄=0.128101  error=0.000465529
        iteración 4   x̄=0.128078  error=0.0000224241
        iteración 5   x̄=0.128077  error=1.07809×10^-6
        iteración 6   x̄=0.128077  error=5.18269×10^-8
In[5]:= FindRoot[f[x] == 0, {x, 0.1}]
Out[5]= {x → 0.128077}
```

Convergencia de la iteración de punto fijo. Orden de convergencia.

Supongamos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p y sea $E_n = p - x_n$ para cada $n \geq 0$. Si existen dos constantes positivas $A > 0$ y $R > 0$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p - x_{n+1}|}{|p - x_n|^R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|E_{n+1}|}{|E_n|^R} = A$$

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

entonces se dice que la sucesión converge a p con orden de convergencia R, y el número A se llama constante asintótica del error. Los casos $R = 1, 2$ merecen especial consideración:

Si $R = 1$ la convergencia de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ se llama **lineal**

Si $R = 2$, la convergencia de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ se llama **cuadrática**.

Si R es grande, entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge rápidamente a p; esto es, para valores grandes de n tenemos la aproximación $E_{n+1} \approx A\,|E_n|^R$. Por ejemplo, si $R = 2$ y $|E_n| \approx 10^{-2}$, entonces cabe esperar que $E_{n+1} \approx A \cdot 10^{-4}$.

Algunas sucesiones convergen con un orden que no es un número natural. Por ejemplo, el orden de convergencia del método de la secante es $R = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618033989$.

Orden de convergencia de la iteración de punto fijo.

Cuando $g'(p) \neq 0$:

$$|E_{n+1}| = |x_{n+1} - p| = |g(x_n) - g(p)| = |g'(\xi)(x_n - p)| = |g'(\xi)||x_n - p| = |g'(\xi)||E_n|$$

con ξ comprendido entre x_n y p. Cuando $n \to \infty$, $g'(\xi) \to g'(p) \neq 0$, y siendo g' continua, $g'(\xi)$ se mantendrá, a partir de cierto *n*, suficientemente cerca de $g'(p)$, de modo que

$$|E_{n+1}| \approx |g'(p)||E_n|$$

con lo que la convergencia es **lineal**.

Cuando $g'(p) = 0$, escribiendo el polinomio de Taylor con resto de orden 2 de g:

$$g(x_n) = g(p) + g'(p)(x_n - p) + \frac{g''(\xi)}{2!}(x_n - p)^2 = g(p) + 0 + \frac{g''(\xi)}{2!}(x_n - p)^2$$

$$\Rightarrow \quad |E_{n+1}| = |x_{n+1} - p| = |g(x_n) - g(p)| = \left|\frac{g''(\xi)}{2!}(x_n - p)^2\right| = \frac{|g''(\xi)|}{2!}|E_n|^2$$

y si $g''(p) \neq 0$, cuando $n \to \infty$: $|E_{n+1}| \approx \frac{|g''(p)|}{2!}|E_n|^2$

con lo que la convergencia es **cuadrática**.

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

Método de Newton-Raphson

Este método es un caso particular del método de punto fijo, en el que se busca que la derivada de la función $g(x)$, valga cero en el punto fijo *p* $g'(p) = 0$. Con esto se consigue mejorar la velocidad de convergencia del método ya que se obtiene una convergencia cuadrática.

Cualquier función de punto fijo, como se explicó en el apartado anterior es una expresión del tipo $g(x) = x + h(x) \cdot f(x)$ de modo que evaluada en *p*, raíz de la función $f(x)$, $g(p) = p$. Esto se cumple independientemente de la función $h(x)$ que se utilice.

En este apartado, se buscará una función $h(x)$ que haga que $g'(p) = 0$, además de existir un punto fijo en *p* cuando $f(p) = 0$.

Desarrollo:

$g(x) = x + h(x) \cdot f(x)$; derivando esta expresión:

$g'(x) = 1 + h(x) \cdot f'(x) + h'(x) \cdot f(x)$; evaluando la expresión en el punto *p* e igualándola a cero resulta:

$$g'(p) = 1 + h(p)\cdot f'(p) + h'(p)\cdot f(p) = 1 + h(p)\cdot f'(p) = 0$$

$$\Rightarrow h(p) = -\frac{1}{f'(p)}$$

Existen infinitas funciones $h(x)$ que cumplen esa condición en el punto *p*, de entre todas ellas tomamos la mas sencilla que es $h(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$.

Como consecuencia de esto, la función $g(x)$ de punto fijo del método de Newton-Raphson es: $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, y el método de aproximaciones sucesivas aplicando la expresión de Newton-Raphson resulta: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Interpretación gráfica del método de Newton-Raphson.

Transformando la expresión obtenida para el método de Newton-Raphson, se obtiene ecuación de una recta.

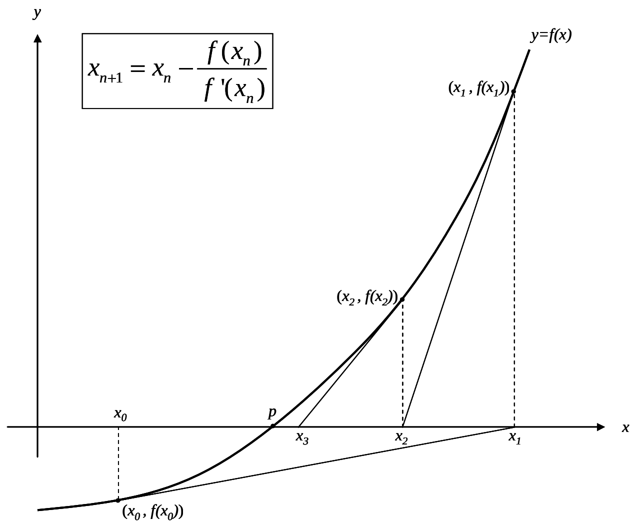
$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \boxed{f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = (0 - f(x_n))}.$$

Esta expresión representa la recta que pasa por el punto $(x_n, f(x_n))$, tiene una pendiente igual a la derivada de la función en el punto x_n, $pendiente = f'(x_n)$, y pasa también por el punto $(x_n, 0)$.

De esta manera se puede determinar el nuevo punto x_{n+1}, a partir del punto $(x_n, f(x_n))$ de la siguiente manera:

Trazar la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto x_n y obtener el nuevo punto x_{n+1} como la intersección de dicha recta con el eje de abscisas.

Repitiendo esta construcción varias veces la sucesión de valores obtenidos se va aproximando a la solución del problema, el punto *p* raíz de la ecuación $f(x) = 0$, tal y como se represent en el siguiente gráfico.



Interpretación gráfica del método de Newton-Raphson

Ejemplo:

Se desea calcular la raíz de la ecuación $\sin(x) - x + \frac{3}{2} = 0$, que se encuentra en el intervalo $[2,3]$, con un error menor que 1×10^{-6} mediante el método de Newton-Raphson.

En primer lugar se calcula la derivada de la función $f(x) = sen(x) - x + 3/2$: $f'(x) = \cos(x) - 1$.

Aplicando la expresión del método de Newton-Raphson $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, y sustituyendo función y derivada por su valor resulta:

$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin(x_n) - x_n + 3/2}{\cos(x_n) - 1}$, expresión a utilizar en el método de aproximaciones sucesivas.

Primera etapa: Se considera como aproximación inicial x_0 el punto medio del intervalo donde se encuentra la raíz: $x_0 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$.

Se calcula a continuación el siguiente término de la sucesión:

$$x_1 = x_0 - \frac{\sin(x_0) - x_0 + 3/2}{\cos(x_0) - 1} = \frac{5}{2} - \frac{\sin(5/2) - 5/2 + 3/2}{\cos(5/2) - 1} = 2.27707$$

El error cometido en esta primera etapa es $error = |x_1 - x_0| = |2.27707 - 5/2| = 0.222929$.

Realizando cuatro iteraciones el valor aproximado de la raíz es $x_4 = 2.26717$ y el error cometido en esta etapa es del orden de 1.2×10^{-10}.

Ejemplo con *Mathematica.*

Método de Newton-Raphson

```
In[1]:= f[x_] = Sin[x] - x + 3/2

Out[1]= 3/2 - x + Sin[x]

In[2]:= df[x_] = D[f[x], x]

Out[2]= -1 + Cos[x]

In[3]:= a = 2; b = 3;

In[4]:= x0 = (a + b)/2; error = 1; i = 1; MaxIter = 100;
        While[error > 10^-6 && i < MaxIter, x1 = x0 - f[x0]/df[x0]; error = Abs[x1 - x0]; x0 = x1;
         Print["Iteración ", i, "     x̃=", x0 // N, "    error=", error // N]; i++;]

        Iteración  1     x̃=2.27707    error =0.222929
        Iteración  2     x̃=2.26719    error =0.00987593
        Iteración  3     x̃=2.26717    error =0.0000226659
        Iteración  4     x̃=2.26717    error =1.20054 × 10^-10
```

Método de la secante.

El método de Newton-Raphson es un método muy empleado para el cálculo de raíces de ecuaciones no lineales. Sin embargo tiene un inconveniente fundamental que es el cálculo y la evaluación de la derivada de la función $f(x)$.

Para la mayoría de las funciones, el cálculo de la derivada, aunque no es complicado de realizar, implica que la posterior evaluación de la misma tendrá un gran número de operaciones.

Por este motivo, se buscó un método que pudiera evitar la evaluación de la derivada en el punto para obtener el valor de la nueva aproximación a la solución del problema.

Así surge el método de la secante.

Se sustituye el valor de la derivada de la función en el punto, (pendiente de la recta tangente), por el valor de la pendiente de la recta secante a la función en dos puntos muy próximos, que es un valor aproximado de la pendiente de la tangente.

Si los resultados de las dos últimas iteraciones están suficientemente próximos, se puede aproximar el valor de la derivada mediante la expresión: $f'(x_n) \simeq \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$.

Con lo que la fórmula del método de Newton-Raphson se transforma en :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

La expresión que se ha obtenido evita tener que evaluar la derivada de la función en el punto x_n, y utiliza valores ya conocidos previamente de etapas anteriores, salvo $f(x_n)$, que se evalúa para realizar la nueva etapa.

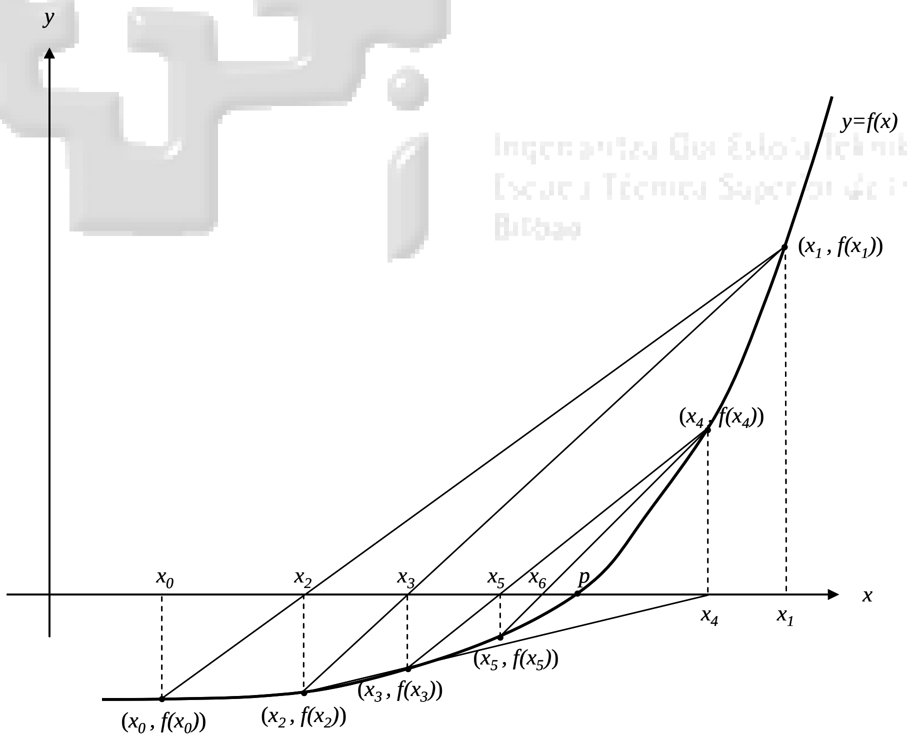
Disminuye por tanto el número de operaciones que se deben realizar, pero converge más lentamente que el método de Newton-Raphson debido a la simplificación que se ha realizado. Se puede demostrar que el orden de convergencia del método de la secante es $R = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618033989$.

Debe ponerse de manifiesto también que el método de la secante no es un método de punto fijo, puesto que para obtener el valor de x_{n+1} se emplean los valores ya conocidos de dos etapas previas $(x_n, f(x_n))$ y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$.

Por este motivo, al iniciar el proceso de cálculo es necesario utilizar dos valores iniciales x_0 y x_1 a diferencia de los métodos de punto fijo que solo utilizan uno x_0

Interpretación gráfica del método de la secante.

Tal y como se ha indicado, el método de la secante modifica el de Newton-Raphson empleando la recta secante que pasa por dos puntos $(x_n, f(x_n))$ y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ en lugar de la tangente a la curva en el punto $(x_n, f(x_n))$.



Interpretación gráfica del método de la secante

En cada etapa del método se traza la secante entre dos puntos sucesivos y posteriormente se calcula el nuevo punto como la intersección de dicha secante con el eje de abscisas.

Como se ve en el grafico, para calcular x_4, tercera etapa, se utiliza la recta que pasa por los puntos $(x_2, f(x_2))$ y $(x_3, f(x_3))$, obteniéndose en el punto de corte de esa recta con el eje de abscisas el punto x_4.

Ejemplo:

Se desea calcular la raíz de la ecuación $\sin(x) - x + 3/2 = 0$, que se encuentra en el intervalo $[2,3]$, con un error menor que 1×10^{-6} mediante el método de la secante.

El método de la secante necesita de dos aproximaciones iniciales para comenzar el proceso, por tanto, tomaremos los extremos del intervalo como valores iniciales; $x_0 = 2$ y $x_1 = 3$.

Partiendo de este resultado se calcula el valor de x_2.

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) = 3 - \frac{3-2}{f(3) - f(2)} f(3) = 2.23148.$$

El error cometido es: $error = |x_2 - x_1| = |2.23148 - 3| = 0.76852$

Realizando cinco iteraciones el valor de la raíz es $x_5 = 2.26717$ y el error cometido en esta etapa es del orden de 3.5×10^{-8}.

Comparando con los resultados del método de Newton-Raphson se necesita una iteración mas para obtener la solución y el error cometido en esta iteración es mayor que el cometido en cuatro iteraciones del método de Newton-Raphson.

Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

Ejemplo con *Mathematica.*

Método de la secante

In[1]:= $f[x\_] = \text{Sin}[x] - x + \frac{3}{2}$

Out[1]= $\frac{3}{2} - x + \text{Sin}[x]$

In[2]:=
```
x0 = 2; x1 = 3; error = 1; i = 1; MaxIter = 100;
While[error > 10^-6 && i < MaxIter, x2 = x1 - (x1 - x0)/(f[x1] - f[x0]) f[x1]; error = Abs[x2 - x1]; x0 = x1;
 x1 = x2;
 Print["Iteración ", i, "     x̃=", x1 // N, "   error=", error // N]; i++;]
```

```
Iteración 1     x̃=2.23148    error=0.76852
Iteración 2     x̃=2.26299    error=0.0315078
Iteración 3     x̃=2.26721    error=0.00421996
Iteración 4     x̃=2.26717    error=0.0000356548
Iteración 5     x̃=2.26717    error=3.49041×10^-8
```

Ejercicios

1.- Determinar el número de raíces reales de la ecuación no lineal: $x + e^x = 0$

2.- Resolver gráficamente la ecuación: $x \cdot Log_{10}(x) = 1$

3.- Utilizando el método de bisección resolver la ecuación no lineal : $e^{-x} - x = 0$, partiendo del intervalo inicial [0 , 1].

4.- Determinar la raíz real de la función: $f(x) = x \cdot e^x - 1$

5.- Aplicando el método de la bisección a la ecuación: $x^3 - 3 = 0$, localizar la raíz cúbica de 3 sobre un intervalo de longitud menor o igual a 0.1.

6.- Empezando con el intervalo [2,3] realizar tres iteraciones del método de falsa posición a la función: $f(x) = 4x^4 - 9x^3 + 1$

7.- Resolver la ecuación no lineal $f(x) = e^{-x} - x = 0$ con el método de falsa posición, sabiendo que la raíz exacta es r = 0.56714329, partiendo del intervalo inicial $[0, 1]$.
Obtener, trabajando con redondeo a cuatro cifras decimales, la aproximación de la raíz con un error relativo inferior al 1%.

8.- Resolver, con un error relativo inferior al 0.05%, la ecuación no lineal $f(x) = e^{-x} - x = 0$, mediante el método de la secante, tomando como valores iniciales $x_{-1} = 0$, $x_0 = 1$, sabiendo que r = 0.56714329. Trabajar con cuatro cifras decimales y redondeo simétrico.

9.- La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una única raíz en $[1, 2]$. Obtener diversas funciones de iteración g (x) estudiando la convergencia en cada caso.

10.- La función $f(x) = x - e^{x/5}$ tiene dos raíces. Hallarlas por el método de aproximaciones sucesivas, trabajando con redondeo a cuatro cifras decimales.

11.- Hallar, con un error no superior a 0.1, la única raíz real de la ecuación algebraica $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$, utilizando el método de aproximaciones sucesivas.
Nota: Seleccionar los valores iniciales de x en el intervalo $[1, 2]$ y trabajar con cinco cifras decimales.

12.-Efectuar la iteración del método de Newton-Raphson para resolver la ecuación no lineal $f(x) = x - 0.2 \cdot sen(x)$ partiendo del valor inicial $x_0 = 0.5$. Trabajar con redondeo a cuatro decimales.

13.- Realizar tres iteraciones del método de Newton-Raphson para hallar la raíz de la función $f\ (x) = e^{-x} - x$, utilizando como aproximación inicial de la raíz buscada $x_0 = 0$ y trabajando con redondeo a seis cifras decimales.

14.- Encontrar una raíz aproximada de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo $[1,\ 2]$, con precisión de 10^{-5}, primero por el método de Newton y luego por el método de la secante.

15.- Resolver la ecuación $4 \cdot \cos(x) = e^x$ con una exactitud de 10^{-4}, usando:
- El método de Newton con $x_0 = 1$.
- El método de la secante con $x_0 = \pi/4$ y $x_1 = \pi/2$.

16.- Determinar, trabajando con redondeo a cinco cifras decimales, la raíz positiva de la ecuación $\sin(x) - x/2 = 0$, utilizando los métodos de falsa posición y de la secante.

17.- En el intervalo $[0.5,1]$ la función $f(x) = x - 0.2\sin(x) - 0.5$ tiene una raíz $[f(0.5 = -0.0959,\ f(1) = 0.3317]$.
Aplicar los métodos de bisección, falsa posición, secante y Newton para determinar dicha raíz con una precisión de 10^{-3} .($|f(x)| \langle\ 10^{-3}$).

18.- Calcular la raíz de la ecuación $Log_{10}(x^2+2) + x = 5$ con tres cifras decimales exactas, mediante la aplicación de la técnica de Newton-Raphson.

19.- Determinar, con una precisión $\varepsilon = 10^{-6}$ $\left(|f(x)| < 10^{-6}\right)$, las raíces cuadradas de 0.5 utilizando el método de Newton-Raphson, y definir los dos intervalos (uno para cada raíz) en los que el método es convergente.

20.- Deducir una ley de recurrencia que permita obtener $\sqrt{c}$. Aplicarla al valor c = 10

21.- Deducir una ley de recurrencia que permita calcular $\sqrt[n]{c}$. Aplicarla al cálculo de $\sqrt[7]{59}$.

22.- Resolver la ecuación no lineal $x - 4\sin(x) = 0$ sabiendo que un valor aproximado de la raíz es $x_0 = 2.5$.

23.- Siendo $f(x) = 8x - \cos(x) - 2x^2$, y sabiendo que $f\ (0) < 0\ y\ f\ (\pi/6) > 0$, justificar que la expresión $g(x_n) = \dfrac{\cos(x_n)}{8} + \dfrac{(x_n)^2}{4}$ permitirá obtener una sucesión cuyo límite sea una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Hallar la raíz con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$

24.- Determinar la raíz cuadrada negativa de 0.5 con cuatro decimales considerando la función $F(x) = x^2 - 0.5$ y resolviendo la ecuación $x = x^2 + x - 0.5$ mediante el método de aproximaciones sucesivas, tomando $x_0 = -0.6$. ¿Puede determinarse la raíz cuadrada positiva por este método?

25.- Compruébese de forma gráfica que la ecuación $4\sin(x) = 1 + x$ tiene tres raíces reales $r_1 < r_2 < r_3$.
Determínese, con una precisión 10^{-3} y trabajando con redondeo a seis cifras decimales:
- r_1 utilizando el método de la secante
- r_2 utilizando el método de bisección
- r_3 utilizando el método de Newton

Comparar estos métodos.

26.- Hacer una representación gráfica aproximada de las funciones $f(x) = 2\cdot\cos(x)$ y $g(x) = e^x$ para obtener unas estimaciones iniciales de las raíces de la ecuación $2\cdot\cos(x) - e^2 = 0$ ¿Cuántas raíces tiene? ¿Cuántas son positivas?
- Determinar las raíces positivas con una precisión $|f(r)| \langle 10^{-3}$ utilizando:

i) el método de la secante
ii) el método de Newton-Raphson

Notas: Utilizar 3 cifras decimales. Trabajar en <u>radianes</u>.

27.- Dada la ecuación $x = 5^{-x}$

a) Realizar una representación gráfica aproximada para determinar el número localización de sus raíces.

b) Determinar el intervalo $[a,b]$ en el cual el proceso iterativo de punto fijo verifique la condición de convergencia.

c) Tomando como aproximación inicial el valor 0.5 aplicar el proceso iterativo para obtener la solución con una precisión $\varepsilon = 10^{-2}$.

Nota: Trabajar con cuatro decimales y redondeo.