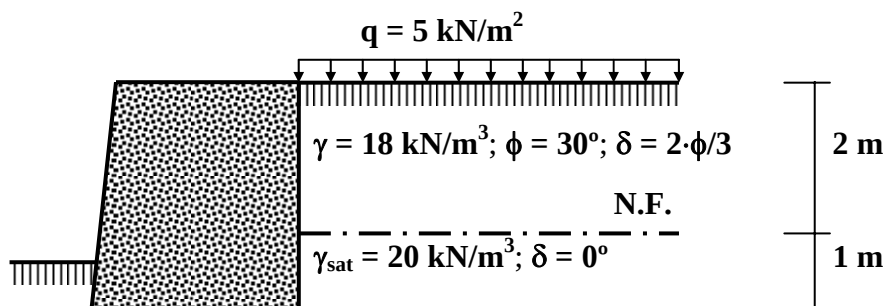


EJERCICIO RESUELTO

El muro de gravedad de la figura sostiene un terreno granular cuyos datos son conocidos.

Se pide:

1. Utilizando la teoría de Rankine, calcular y dibujar el diagrama de presiones del terreno sobre el muro.
2. Utilizando la teoría de Coulomb, calcular las componentes horizontal y vertical del empuje del terreno, así como su punto de aplicación.



1. Según la teoría de Rankine todo el terreno en contacto con el trasdós del muro se encuentra en el estado límite activo. Además, no se toma en consideración el rozamiento entre terreno y muro.

Por lo tanto, bajo estas condiciones y en este problema, las presiones del terreno sobre el muro son horizontales. En primer lugar se analiza el terreno que se encuentra sobre el nivel freático.

La ley de presiones del terreno vendrá dada por la expresión:

$$\sigma'_{Ha1} = \sigma'_v \cdot \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) = K_a \cdot \sigma'_v \quad (1)$$

en donde se ha eliminado la aportación de la cohesión al tratarse de un terreno granular.

En un punto cualquiera situado a una profundidad z_1 (Fig. 1), la tensión efectiva vertical, σ'_v , será

$$\sigma'_v = \sigma_v = \gamma \cdot z_1 + q \quad (2)$$

por encontrarse por encima del nivel freático.

Llevando esta expresión a (1) se tiene

$$\sigma'_{Ha1} = K_a \cdot (\gamma \cdot z_1 + q) \quad (3)$$

e introduciendo los datos conocidos $\phi = 30^\circ$, $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ y $q = 5 \text{ kN/m}^2$, resultan los siguientes valores para el coeficiente de empuje activo, K_a , y para la ley de presiones horizontales, σ'_{Ha1}

$$K_a = \frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\sigma'_{Ha1} = 6 \cdot z_1 + 1'67 \quad (5)$$

Se trata de una ley lineal cuyos valores extremos son:

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } z_1 = 0, \sigma'_{Ha1} = 1'67 \text{ kN/m}^2 \\ \text{para } z_1 = 2 \text{ m, } \sigma'_{Ha1} = 13'67 \text{ kN/m}^2 \end{array} \right\} \quad (6)$$

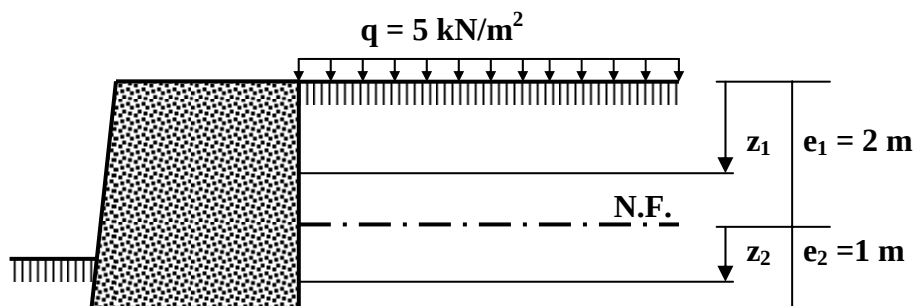


Fig. 1. Cotas de posición z_1 y z_2 .

Por debajo del nivel freático el terreno se encuentra saturado y sobre el muro existirá una presión horizontal debida a las partículas sólidas a la que hay que añadir la presión hidrostática del agua intersticial, perpendicular al muro, es decir, también horizontal.

La presión ejercida por las partículas sólidas vendrá dada por

$$\sigma'_{Ha2} = \sigma'_v \cdot \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = K_a \cdot \sigma'_v \quad (7)$$

En un punto cualquiera situado a una profundidad z_2 (Figura 1), la tensión efectiva vertical, σ'_v , será

$$\sigma'_v = \sigma_v - u = [(\gamma \cdot e_1 + \gamma_{\text{sat}} \cdot z_2) + q] - \gamma_w \cdot z_2 = \gamma' \cdot z_2 + (\gamma \cdot e_1 + q) \quad (8)$$

o bien

$$\sigma'_v = \gamma' \cdot z_2 + q_{\text{TOTAL}} \quad (9)$$

en donde

$$q_{\text{TOTAL}} = \gamma \cdot e_1 + q \quad (10)$$

Llevando (9) a (7) se tiene

$$\sigma'_{\text{Ha2}} = K_a \cdot (\gamma' \cdot z_2 + q_{\text{TOTAL}}) \quad (11)$$

y como $\phi = 30^\circ$, $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$, $\gamma_{\text{sat}} = 20 \text{ kN/m}^3$, $\gamma_w = 9.8 \text{ kN/m}^3$, $e_1 = 2 \text{ m}$ y $q = 5 \text{ kN/m}^2$, resultan los siguientes valores

$$q_{\text{TOTAL}} = 41 \text{ kN/m}^2 \quad (12)$$

$$\gamma' = \gamma_{\text{sat}} - \gamma_w = 20 - 9.8 = 10.2 \text{ kN/m}^3 \quad (13)$$

$$\sigma'_{\text{Ha2}} = 3.4 \cdot z_2 + 13.67 \quad (14)$$

También se trata de una ley lineal cuyos valores extremos son:

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } z_2 = 0, \sigma'_{\text{Ha}} = 13.67 \text{ kN/m}^2 \\ \text{para } z_2 = 1 \text{ m}, \sigma'_{\text{Ha2}} = 17.07 \text{ kN/m}^2 \end{array} \right\} \quad (15)$$

Por último, la presión hidrostática del agua se expresará como

$$p_{\text{wH}} = \gamma_w \cdot z_2 = 9.8 \cdot z_2 \quad (16)$$

ley lineal cuyos valores extremos son:

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } z_2 = 0, p_{\text{wH}} = 0 \text{ kN/m}^2 \\ \text{para } z_2 = 1 \text{ m}, p_{\text{wH}} = 9.8 \text{ kN/m}^2 \end{array} \right\} \quad (17)$$

En definitiva, bajo el nivel freático, las presiones sobre el muro resultan ser la suma de las presiones debidas a las partículas sólidas – expresión (14) – y al agua – expresión (16) –, es decir,

$$p_H = 13'2 \cdot z_2 + 13'67 \quad (18)$$

cuyos valores extremos son:

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } z_2 = 0, p_H = 13'67 \text{ kN/m}^2 \\ \text{para } z_2 = 1 \text{ m}, p_H = 26'87 \text{ kN/m}^2 \end{array} \right\} \quad (19)$$

y que se puede representar gráficamente tal como se muestra en la figura 2.

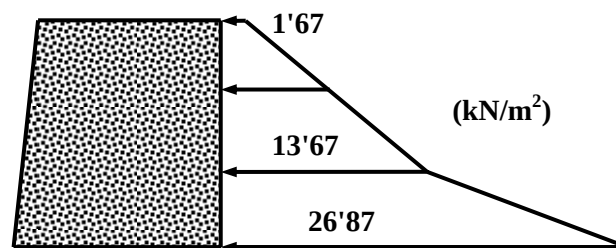


Figura 2. Diagrama de presiones sobre el muro.

- El cálculo del empuje mediante la teoría de Coulomb también se realiza por estratos. Además, en el caso del estrato inferior habrá que tener en cuenta que, por encontrarse por debajo del nivel freático, existen dos empujes: el debido a las partículas sólidas del suelo, y el del agua.

Estrato 1

En primer lugar se determinan los coeficientes de empuje activo, λ_{H1} y λ_{V1} , para lo que es necesario conocer los siguientes ángulos: α , β , ϕ y δ . Sus valores son:

$$\alpha = 90^\circ, \beta = 0^\circ, \phi = 30^\circ, \delta_1 = \frac{2 \cdot \phi}{3} = 20^\circ \quad (20)$$

que llevando a las expresiones generales de λ_H y λ_V , dan como resultado

$$\lambda_{H1} = 0'2794, \lambda_{V1} = 0'1017 \quad (21)$$

Las componentes horizontal y vertical del empuje activo de este estrato se determinan según

$$\left. \begin{aligned} E_{aH1} &= \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot e_1^2 + q \cdot e_1 \right) \cdot \lambda_{H1} \\ E_{aV1} &= \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot e_1^2 + q \cdot e_1 \right) \cdot \lambda_{V1} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

en donde $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$, $e_1 = 2 \text{ m}$ y $q = 5 \text{ kN/m}^2$. Así, sustituyendo valores se tiene

$$E_{aH1} = 12'85 \text{ kN}, E_{aV1} = 4'68 \text{ kN} \quad (23)$$

que, como es sabido, se calculan por cada metro lineal de muro.

Por último, el punto de aplicación de este empuje se encontrará a una profundidad, tomada desde la coronación del muro de

$$\bar{z}_1 = e_1 \cdot \frac{2 \cdot \gamma \cdot e_1 + 3 \cdot q}{3 \cdot \gamma \cdot e_1 + 6 \cdot q} \quad (24)$$

en la que sustituyendo los valores antes mencionados se obtiene $\bar{z}_1 = 1'26 \text{ m}$.

Estrato 2

Tal como se ha comentado previamente, en primer lugar se calcula el empuje debido a las partículas sólidas.

De nuevo es necesario determinar los coeficientes de empuje activo ya que, en comparación con el estrato 1, el ángulo de rozamiento terreno-muro ha cambiado, y ahora es $\delta_2 = 0^\circ$. Es decir, para obtener los nuevos coeficientes de empuje activo, λ_{H2} y λ_{V2} , hay que introducir los siguientes ángulos:

$$\alpha = 90^\circ, \beta = 0^\circ, \phi = 30^\circ, \delta_2 = 0^\circ \quad (25)$$

que llevados a las expresiones generales de λ_H y λ_V , dan como resultado

$$\lambda_{H2} = 0'3333, \lambda_{V1} = 0'0000 \quad (26)$$

Lo único que indica que el coeficiente λ_{V2} sea nulo es que no hay rozamiento entre terreno y muro ($\delta_2 = 0^\circ$) y, por tanto, no existe componente vertical del empuje. Es decir, bajo estas condiciones la teoría de Coulomb y la de Rankine conducen a los mismos resultados.

Además, para utilizar las expresiones que proporcionan los valores de las componentes del empuje y su punto de aplicación hay que utilizar el peso específico sumergido de este estrato

$$\gamma' = \gamma_{\text{sat}} - \gamma_w = 20 - 9'8 = 10'2 \text{ kN/m}^3 \quad (27)$$

y la carga repartida resultante de sumar a la carga superficial el peso del estrato 1, según

$$q_{\text{TOTAL}} = q + \gamma \cdot e_1 = 5 + 18 \cdot 2 = 41 \text{ kN/m}^2 \quad (28)$$

de forma similar a lo realizado en el apartado 1 con la teoría de Rankine.

Por lo tanto, el empuje (horizontal) producido por las partículas sólidas será

$$E_{\text{aH2}} = \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma' \cdot e_2^2 + q_{\text{TOTAL}} \cdot e_2 \right) \cdot \lambda_{\text{H2}} \quad (29)$$

en donde $e_2 = 1 \text{ m}$. Dando valores se obtiene $E_{\text{aH2}} = 15'37 \text{ kN}$, mientras que el punto de aplicación de este empuje se encontrará a una profundidad, tomada desde la coronación del muro de

$$\bar{z}_2 = e_1 + e_2 \cdot \frac{2 \cdot \gamma' \cdot e_2 + 3 \cdot q_{\text{TOTAL}}}{3 \cdot \gamma' \cdot e_2 + 6 \cdot q_{\text{TOTAL}}} \quad (30)$$

en la que sustituyendo los valores antes mencionados se obtiene $\bar{z}_2 = 2'52 \text{ m}$.

Por otra parte, el agua ejerce una presión hidrostática, perpendicular al muro, cuya ley ya se ha calculado en el apartado anterior

$$p_{\text{wH}} = \gamma_w \cdot z_2 = 9'8 \cdot z_2 \quad (31)$$

que proporciona una distribución triangular de presiones cuyos valores extremos son:

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } z_2 = 0, p_{\text{wH}} = 0 \text{ kN/m}^2 \\ \text{para } z_2 = 1 \text{ m, } p_{\text{wH}} = 9'8 \text{ kN/m}^2 \end{array} \right\} \quad (32)$$

y que da lugar a una resultante sobre el muro

$$E_w = \frac{1}{2} \cdot \gamma_w \cdot e_2^2 = 4'9 \text{ kN} \quad (33)$$

situada a una profundidad, tomada desde la coronación del muro, de

$$\bar{z}_w = e_1 + \frac{2}{3} \cdot e_2 = 2'67 \text{ m} \quad (34)$$

Empuje total

Para determinar el empuje total, es decir, la resultante de este sistema de fuerzas coplana-rias (Fig. 3a), realmente hay que reducirlo al sistema indicado en la figura 3b, o lo que es lo mismo, obtener un sistema equivalente de fuerzas formado por las componentes del empuje total (E_H y E_V).

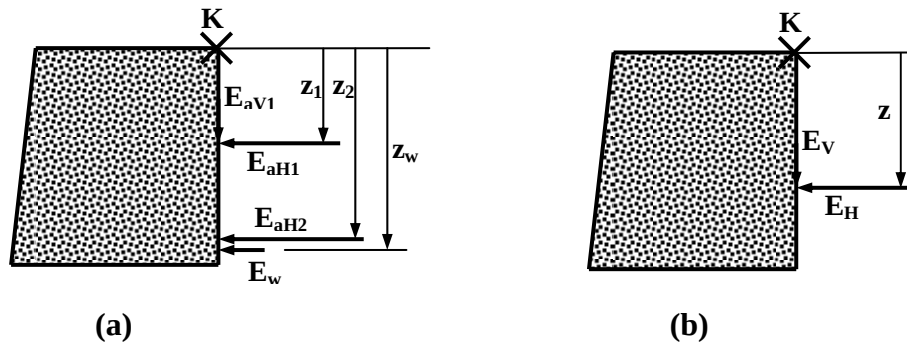


Fig. 3. Obtención del empuje total sobre el muro.

Para ello se emplean las siguientes expresiones:

$$\sum F_{H1} = \sum F_{H2} \Rightarrow E_H = E_{aH1} + E_{aH2} + E_w = 33'12 \text{ kN} \quad (35)$$

$$\sum F_{V1} = \sum F_{V2} \Rightarrow E_V = E_{aV1} = 4'68 \text{ kN} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{K1} &= \sum M_{K2} \Rightarrow E_{aH1} \cdot \bar{z}_1 + E_{aH2} \cdot \bar{z}_2 + E_w \cdot \bar{z}_w = E_H \cdot \bar{z} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{z} &= \frac{E_{aH1} \cdot \bar{z}_1 + E_{aH2} \cdot \bar{z}_2 + E_w \cdot \bar{z}_w}{E_H} = 2'05 \text{ m} \end{aligned} \quad (37)$$

En definitiva, las componentes del empuje total del terreno sobre el muro son

$E_H = 33'12 \text{ kN}; E_V = 4'68 \text{ kN}$

aplicadas a una profundidad, tomada desde la coronación del muro de $\bar{z} = 2'05 \text{ m}$.