INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS¹

EJERCICIOS (Solución aproximada de ecuaciones de una variables).

1. La ecuación $e^x - 3x$ tiene una raíz en $p \approx 0.61906129$. Empezando con el intervalo $[0, 1]$, usar seis iteraciones del método de bisección para encontrar esta raíz. ¿Cuántas iteraciones se necesitan para evaluar la aproximación a la raíz con cuatro dígitos significativos?
2. La ecuación cuadrática $(x-0.4)(x-0.6) = x^2 - x + 0.24$ tiene obviamente las dos raíces en $x = 0.4$ y $x = 0.6$. Nótese que los extremos del intervalo $[0, 1]$ no son buenos para empezar el método de bisección. Dibujar la función, y deducir los extremos de los intervalos que converjan a cada uno de los ceros. Si se usa el intervalo $[0.5, 1.0]$ para empezar la búsqueda con la técnica de bisección, ¿cuál es la cota del error después de cinco iteraciones? ¿Cuál es el error verdadero después cinco iteraciones?
3. Usar el método de bisección para encontrar la raíz positiva más pequeña de las ecuaciones siguientes:
 - a) $e^x - x - 2 = 0$,
 - b) $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$,
 - c) $2e^{-x} - \sin x = 0$,
 - d) $3x^3 + 4x^2 - 8x - 1 = 0$.
 Para cada caso, determinar antes un intervalo adecuado, y luego calcular la aproximación a la raíz con una precisión relativa de 0.5%.
4. Dada la función $f(x) = \exp(x) - x^2 + 3x - 2$. (a) Determinar aproximadamente cuántas iteraciones del método de bisección son necesarias para resolver $f(x) = 0$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$ para $a = 0$ y $b = 1$. (b) Hallar una primera aproximación a la raíz $p \in [0, 1]$ de la ecuación $f(x) = 0$, usando el método de bisección hasta que $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < 10^{-2}$ ó $|f(p_n)| < 5.0 \times 10^{-2}$.
5. Dada la función $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$. (a) Determinar aproximadamente cuántas iteraciones del método de bisección son necesarias para resolver $f(x) = 0$ con una precisión $\varepsilon = 10^{-4}$ para $a = 1$ y $b = 2$. (b) Hallar una primera aproximación a la raíz $p \in [1, 2]$ de la ecuación $f(x) = 0$, usando el método de bisección hasta que $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < 10^{-3}$ ó $|f(p_n)| < 5.0 \times 10^{-3}$.
6. Encontrar las raíces cerca de $x = -0.5$ y $x = 4.0$ de la ecuación $e^x - 3x^2 = 0$, con el método de Newton-Raphson, con seis dígitos de precisión.
7. Usar el método de Newton para resolver las ecuaciones del ejercicio 3. En los casos b) y d), usar la división sintética para evaluar los polinomios y sus derivadas.
8. Usar el método de Newton con la ecuación $x^2 = N$ para obtener el algoritmo de la raíz cuadrada de N : $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{N}{x_n})$, donde x_0 es una aproximación inicial de $\sqrt{N}$. ¿Cuál es la fórmula general para la raíz n -ésima de N ? Evaluar por iteración las raíces siguientes:
 - a) $x^3 = 30$,
 - b) $x^4 = 600$,
 - c) $x^4 = 1.3$.
9. Sea $P(x) = x^4 + 4.6x^3 + 6.6x^2 - 11x - 14$. Usar la división sintética para evaluar $P(-1)$. Escribir $P(x)$ como el producto de dos polinomios, uno de grado tres. Encontrar la raíz real positiva de este polinomio cúbico y luego usar la fórmula cuadrática para encontrar las últimas dos raíces. Este proceso se llama *deflación*.
10. El polinomio $P(x) = (x-1)^3(x-2) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ tiene obviamente una raíz en $x = 2$, y una raíz triple en $x = 1.0$. Empezando por $x = 2.1$, usar el método de Newton. Luego, empezar por $x = 0.9$, y nótese la convergencia mucho más lenta a la raíz triple, aunque el error inicial sea de 0.1 en ambos casos. En ambos casos, tabular los errores. Comparar con el método de Newton Generalizado. Usar los métodos de la secante y secante modificado empezando con $P(0.9)$ y $P(1.1)$. Explicar los resultados.

¹Parte 2

11. Evaluar (con aritmética exacta) las raíces de los polinomios siguientes con el método de Newton y la deflación, hasta que $|P(p_n)| \leq 5.0 \times 10^{-3}$. Usar la división sintética para evaluar los polinomios y sus derivadas, y la fórmula cuadrática cuando sea necesario. Luego repetir usando el método de Bairstow escogiendo las aproximaciones iniciales de manera oportuna.

- a) $x^3 + 1.2 x^2 - 4 x - 4.8 = 0$;
- b) $x^3 - 0.87 x^2 - 15.651 x + 23.701 = 0$;
- c) $x^3 + 6.6 x^2 - 29.05 x + 22.64 = 0$;
- d) $x^3 + 2.9 x^2 + 14.89 x + 6.85 = 0$;
- e) $x^3 - 2.4 x^2 - 1.4 x - 6.8 = 0$;
- f) $x^4 + 6.4 x^3 + 24.04 x^2 + 36.96 x + 18.72 = 0$;
- g) $x^4 - 2 x^3 + 1.99 x^2 - 2 x + 0.99 = 0$;
- h) $x^4 - x^3 - 0.44 x^2 - 13.88 x + 2.8 = 0$.

12. La función $f(x) = e^x - 3 x^2 = 0$ tiene tres raíces. Para poder aplicar la iteración funcional podemos reescribir $x = \pm \sqrt{\frac{e^x}{3}}$. Mostrar, empezando con $x_0 = 0$, que la iteración del punto fijo converge a la raíz cerca de -0.5 si se usa el valor negativo, y que converge a la raíz cerca de 1.0 si se usa el valor positivo. Sin embargo, estas formas no convergen a la tercera raíz cerca de 4.0 , aunque se use un valor inicial casi exacto. Encontrar otra forma que converja a la raíz cerca de 4.0 . Luego usar la técnica Δ^2 de Aitken y el algoritmo de Steffersen para acelerar la convergencia a las tres raíces.

13. La ecuación cubica $2 x^3 + 4 x^2 - 2 x - 5 = 0$ tiene una raíz cerca de $x = 1.0$. Encontrar por lo menos tres funciones $g(x)$ que converjan a esta raíz con la iteración del punto fijo, empezando con $x_0 = 1.0$. Luego usar la técnica Δ^2 de Aitken y el algoritmo de Steffersen para acelerar la convergencia a la raíz.

14. Usar el método de Newton para calcular las aproximaciones sucesivas a la raíz doble $x = 2.0$ de la cuadrática $x^2 - 4 x + 4 = 0$, empezando con $x_0 = 1.0$. Tabular los errores (absoluto y relativo) a cada paso. ¿El método de Newton es convergente linealmente o de manera cuadrática en este caso? ¿Cómo se puede acelerar la convergencia? Usar también las técnicas de Aitken y de Steffersen para acercarse a la raíz más rápidamente.

15. Usar el método de Müller para resolver los siguientes problemas. Aplicar cuatro iteraciones y determinar como están relacionados entre ellos los errores absolutos y relativos sucesivos. Usar valores iniciales que difieran por 0.2 el uno de otro.

- a) $2 x^3 + 4 x^2 - 2 x - 5 = 0$, raíz cerca de 1.0 ;
- b) $e^x - 3 x^2 = 0$, raíz cerca de 4.0 ;
- c) $e^x - 3 x^2 = 0$, raíz cerca de 1.0 ;
- d) $\tan x - x - 1 = 0$, raíz cerca de 1.1 .

Repetir las iteraciones con el método de Müller, pero ahora empezando por $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.5$ y $x_2 = -0.5$. De esta manera se supone que se encuentra la raíz cerca del origen. ¿Es esto siempre cierto?

16. Encontrar una aproximación a la raíz positiva más pequeña de la ecuación $8 x^4 - 8 x^2 + 1 = 0$, usando un paso del método de Müller, con $x_0 = 0.3$, $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 0.4$

17. Comparar cuantas iteraciones son necesarias para encontrar una raíz (con tres dígitos decimales) de la ecuación $e^x + 10 x - 2 = 0$, (i) con el método de bisección empezado con $x_0 = 0.0$ y $x_1 = 1.0$, y (ii) con el esquema iterativo $x_{n+1} = (2 - e^{x_n})/10$, con $x_0 = 0.0$.

18. Evaluar la raíz real de las siguientes ecuaciones usando (i) el método de bisección, (ii) la regla falsi y (iii) el método de Newton-Raphson.

- a) $\tan x = 4 x$, raíz en $(0, \frac{\pi}{2})$;
- b) $4 \sin x = e^x$, raíz en $(0, 0.5)$;
- c) $e^{2x} - e^x = 2x$, raíz en $(0, 1)$;
- d) $e^x \sin x = x/2$, raíz en $(0, \pi)$.