

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS¹

EJERCICIOS (Introducción al Análisis Numérico y a la Computación)

- 1.a Construir un algoritmo (y dibujar su diagrama de flujo) que tomando la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con raíces reales x_1 y x_2 , $x_1 \geq x_2$, (i) calcule el perímetro y el área del cuadrado de lado $x_1 - x_2$; (ii) calcule la circunferencia y el área del círculo de radio $x_1 - x_2$. Ejecutar los algoritmos en el caso que los coeficientes de la ecuación sean $a = 3$, $b = -27$ y $c = 42$.
- 1.b Construir un algoritmo (y dibujar su diagrama de flujo) para buscar la suma y el producto de los elementos pares y de los elementos impares de un vector de n elementos. Ejecutar el algoritmo en el caso que el vector esté constituido por los enteros entre 1 y 9 (incluidos).
2. Dados los siguientes valores:

a) $p = \frac{1}{3}$, $p^* = 0.33333$,	b) $p = \frac{10000}{3}$, $p^* = 3333.333$,
c) $p = e$, $p^* = 2.5$,	d) $p = \pi$ (a 7 dígitos, $\pi = 3.141593$), $p^* = 3.141$.

 ¿Cuál es el (i) error absoluto, (ii) error relativo al aproximar p por p^* ? ¿Con cuántas cifras significativas aproxima p^* a p ?
3. Encontrar cotas para x , si x es una aproximación

a) con tres cifras de π ,	b) con cuatro cifras de e ,
c) con cinco cifras de 333.333,	d) con seis cifras de π .
4. Convertir el número $AF.301_{16}$ a su representación en base $b = 8$; el número 7214.73_8 a su representación en base $b = 16$; el número 101101110.1100001011_2 a sus representaciones en base $b = 8$ y 16 ; el número 175.23_8 a sus representaciones en base $b = 2$ y $b = 16$.
5. Efectúe los siguientes cálculos (i) exactamente, (ii) usando aritmética cortando a tres dígitos, (iii) usando aritmética de redondeo a tres dígitos. Determine luego la pérdida de dígitos significativos suponiendo que los números dados son exactos.

a) $(164. + 0.913) - (143. + 21.0)$,	b) $(164.3 - 143.9) + (0.9136 - 21.0)$,
c) $(164. - 143.) + (0.913 - 21.0)$,	d) $(16.46 - 143.) + (9.13 - 2.108)$.
6. Representación interna de números enteros.
 - i) Representar los siguientes números en magnitud-signo con 8 bits: 18, -18, 23, -23, 14, -14.
 - ii) ¿Qué números decimales representan las siguientes series de 8 bits, codificados en magnitud-signo?: 10100010, 00100010, 11101010, 01101010, 10101011, 00101011.
 - iii) Representar en exceso con 8 bits los siguientes números: 18, -18, 23, -23, 14, -14.
 - iv) ¿Qué números decimales representan las siguientes series de 8 bits, codificados en exceso?: 10100010, 00100010, 11101010, 01101010, 10101011, 00101011.
 - v) Representar con 8 bits en complemento a dos los siguientes números decimales: 18, -18, 23, -23, 14, -14.
 - vi) ¿Qué números decimales representan las series de 8 bits, codificadas en complemento a dos?: 10100010, 00100010, 11101010, 01101010, 10101011, 00101011.
 - vii) ¿Qué números decimales representan la serie de 8 bits, codificadas en complemento a dos?: 01111111 y 10000000.
 - viii) ¿Cuáles son el menor número negativo y el mayor número positivo que pueden almacenarse en complemento a dos con 8 bits?

¹Parte 1

7. Representación interna de números reales.

- i) Representar en punto flotante con 32 bits, 1 de signo, 7 de exponente y 24 de mantisa, los números decimales: 205.3125, -1206.96875.
- ii) ¿Qué números decimales representan los siguientes códigos de 32 bits?
- | | |
|--|--|
| 0 0100101 101110010000000000000000 | 1 1010110 101001010000100000000000 |
| 1 0110101 101110000100000000000000 | 0 1001010 101001010101100000000000 |

8. Determinar el error absoluto máximo para $y = x_1^3 + x_2$, si

$$x_1 = 2.0 \pm 0.1, \quad x_2 = 3.0 \pm 0.02$$

- i) exactamente, operando con intervalos;
- ii) utilizando las fórmulas (aproximadas) del error absoluto y relativo en las operaciones aritméticas.
9. Queremos calcular $a = (3 - 2\sqrt{2})^6$, utilizando el valor aproximado 1.41421 para $\sqrt{2}$. Escoger, entre las fórmulas equivalentes siguientes, la más adecuada desde un punto de vista numérico:

$$\frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^6} \qquad (17 - 12\sqrt{2})^3 \qquad \frac{1}{(17 + 12\sqrt{2})^3}$$

$$19601 - 13860\sqrt{2} \qquad \frac{1}{19601 + 13860\sqrt{2}}$$

10. Mostrar que el error relativo de una cantidad es aproximadamente igual al error absoluto de su logaritmo natural.
11. El número de condición de una función se define como:

$$\frac{x f'(x)}{f(x)}$$

Cuando este número es grande la función está mal condicionada en x .

- i) Deducir la fórmula teniendo en consideración que el número de condición mide el error relativo en la función causado por un error relativo en el argumento.
- ii) ¿Cuál es el número de condición para las siguientes funciones?

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f(x) = x^n.$$

12. Mediante el cálculo del índice de condicionamiento de las funciones involucradas en el siguiente algoritmo, deducir en que puntos del dominio el error de redondeo de la función

$$f : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}, \quad f(x, y) = (\sqrt{x \cdot y} - 5 + y)$$

puede llegar a ser muy grande.

$$\phi^{(0)} : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2; \quad \phi^{(1)} : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2; \quad \phi^{(2)} : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}.$$

$$\phi^{(0)}(x, y) = (x \cdot y, y)^t; \quad \phi^{(1)}(u, v) = (\sqrt{u}, v - 5)^t; \quad \phi^{(2)}(\alpha, \beta) = \alpha + \beta.$$

13. Estudia la propagación del error absoluto de la función $\phi(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y}$ que se calcula mediante el proceso:

$$\phi^{(0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}; \quad \phi^{(1)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u + v \end{pmatrix}; \quad \phi^{(2)} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Calcula los errores absolutos aproximados cometidos al evaluar la función en los puntos (2, 5) y (5.3, 1.7) efectuando los cálculos con aritmética de redondeo a tres dígitos.