CURSO DE METODOS NUMERICOS

Año Académico 2000-2001 – Curso Tercero de Matemáticas

EXAMEN FINAL FEBRERO

1. Dá el enunciado y demuestra el teorema de convergencia del método del punto fijo. (*2 puntos*)

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante eliminación gaussiana con pivoteo escalado de columna, realizando las operaciones en el sistema octal y con aritmética de redondeo a 4 dígitos

$$\begin{pmatrix} -3.561_8 & 6.043_8 \\ -2.327_8 & 3.274_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.304_8 \\ 2.766_8 \end{pmatrix}.$$

(*6 puntos*)

3. Para resolver ecuaciones no lineales de una variable disponemos de diversos métodos iterativos como el de Müller que, tomando tres puntos por los cuales pasa la función $f(x)$, $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, construye un polinomio de segundo grado

$$P(x) = a\ (x - x_2)^2 + b\ (x - x_2) + c$$

y aproxima a la raíz de la función $f(x)$ tomando el cero de $P(x)$ más aproximado a x_2, esto es

$$x_3 - x_2 = \frac{-2\,c}{b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}.$$

(a) Utilizando esta última fórmula y suponiendo que el resultado de la aproximación (con cálculos hechos con aritmética de 5 dígitos significativos) sea $x_3 = 1.2586$ a partir de los datos

$$(x_0, f(x_0) = 5.9235)\,,$$
$$(x_1 = 3.1672, f(x_1) = 2.8359)\,,$$
$$(x_2 = 1.9832, f(x_2) = 0.93154)$$

construye una ecuación $\Phi(x_0) = 0$ donde la única incognita sea x_0 (Pista: usar las fórmulas de a y b del método de Müller). (*6 puntos*)

(b) Para hallar una estimación de esa primera aproximación x_0, sabiendo que $\Phi(x)$ tiene una raíz en el intervalo $[4.5, 5.5]$, efectua dos iteraciones del método de la *regula falsi* para aproximarlo en aritmética de 5 dígitos significativos. (*6 puntos*)

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2\,x^2 - z + 0.5 \\ x^2 - y^2 &= y + z - 0.5 \\ x + z^2 &= y + 0.61\ . \end{aligned}$$

(a) Describe el método de Newton para sistemas no lineales. (*3 puntos*)

(b) Efectua una primera iteración del método de Newton para sistemas no lineales, resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones lineales usando la factorización de Crout con pivoteo escalado de columna y aritmética de cuatro dígitos significativos, y aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0.26, 0.01, 0.56)^t$.

(7 puntos)

CURSO DE METODOS NUMERICOS

Año Académico 2000-2001 – Curso Tercero de Matemáticas

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE SEPTIEMBRE

1. La representación común de los números está constituída por sucesiones de los símbolos "0, 1, 2, ...,9". Esta representación constituye el sistema posicional en base 10, también conocido como sistema decimal.

   (a) ¿Qué significa que el sistema decimal es posicional?

   (*0.5 puntos*)

   (b) ¿Cuáles son los símbolos a usar en una representación en base $b = 6$? Construye las tablas para efectuar la suma y la multiplicación de dos cifras en base 6. Finalmente, suma y resta los números $(5324)_6$ y $(213)_6$.

   (*1.0 punto*)

2. Sean $f(x)$ y sus derivadas de orden superior funciones continuas y acotadas en un intervalo que contiene el cero p.

   (a) Si $f(p) = 0$ pero $f'(p) \neq 0$, muestra que la iteración de Newton-Raphson

   $$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$

   converge cuadráticamente si p_n está en el intervalo.

   (*1.5 puntos*)

   (b) Si $f(p) = 0$ y $f'(p) = 0$, pero $f''(p) \neq 0$, muestra que la forma

   $$p_{n+1} = p_n - 2\,\frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$

   converge cuadráticamente si p_n está en el intervalo (nota que la iteración es de la forma $p_{n+1} = g(p_n)$ y usa la regla de l'Hôpital para mostrar que $g'(p) = 0$).

   (*2.0 puntos*)

3. Encuentra las dos raíces no nulas de la ecuación

   $$e^x - 2\,x^2 - 1 = 0,$$

   usando el método de Newton-Raphson (con método gráfico, comprueba que las dos raíces se encuentran en los intervalos $[0.5, 1.0]$ y $[2.5, 3.0]$, respectivamente).

   (*2.0 puntos*)

4. Sean A y $\mathbf{b}$ los siguientes matriz y vector, respectivamente,

   $$A = \begin{pmatrix} 1.44 & 6.33 & 1.11 & -1.82 \\ 7.22 & 1.42 & -1.72 & 1.91 \\ 1.91 & -1.82 & 1.42 & 7.55 \\ -1.72 & 1.11 & 6.24 & 1.42 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6.06 \\ 7.53 \\ 8.06 \\ 8.05 \end{pmatrix}.$$

(a) Describe, brevemente, las técnicas iterativas de Jacobi y de Gauss-Seidel.

(*0.5 puntos*)

(b) Resuelve el sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando la factorización de Doolittle con pivoteo máximo de columna y aritmética de redondeo a tres dígitos significativos.

(*2.0 puntos*)

(c) Reordena adecuadamente las filas del sistema lineal para que haya convergencia al aplicar los métodos iterativos de Jacobi y/o Gauss-Seidel.

(*0.5 puntos*)

CURSO DE METODOS NUMERICOS

Año Académico 2001-2002 – Curso Tercero de Matemáticas

EXAMEN FINAL FEBRERO

1. Considera el sistema numérico en base 7.
   (a) Escribe los diez primeros números primos de este sistema numérico.
   (*0.5 puntos*)

   (b) Halla el máximo común divisor de los números $\{1632_7, 2505_7\}$ realizando las divisiones del algoritmo para hallar el *m.c.d.* de dos números en el sistema numérico en base 7.
   (*1.0 punto*)

2. Sean $f(x)$ y sus derivadas de orden superior funciones continuas y acotadas en un intervalo que contiene el cero p.
   (a) Si $f(p) = 0$ pero $f'(p) \neq 0$, muestra que la iteración de Newton-Raphson

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$

   converge cuadráticamente si p_n está en el intervalo.
   (*0.75 puntos*)

   (b) Si $f(p) = 0$ y $f'(p) = 0$, pero $f''(p) \neq 0$, muestra que la forma

$$p_{n+1} = p_n - 2\,\frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$

   converge cuadráticamente si p_n está en el intervalo (nota que la iteración es de la forma $p_{n+1} = g(p_n)$ y usa la regla de l'Hôpital para mostrar que $g'(p) = 0$).
   (*1.25 puntos*)

3. El método de Newton-Raphson se utiliza para encontrar raices de funciones de una variable. Dada una estimación inicial p_0 este método nos facilita la siguiente aproximación p_1 y sucesivamente p_2, p_3, ... Hemos utilizado el método iterativo de Newton-Raphson para hallar una aproximación a la raíz de la función

$$f(x) = 1 - x + \ln x^2$$

   en el intervalo $[3, 5]$. La primera iteración ha resultado $p_1 = 3.6207$ y se debe hallar el valor inicial p_0 a partir del cual se ha obtenido p_1; para ello:
   (a) plantea la ecuación que relaciona p_0 y p_1; (*0.5 puntos*)

   (b) realiza dos iteraciones del método de la *regula falsi* en el intervalo $[3, 5]$ con la ecuación del apartado (a) con aritmética de 5 dígitos significativos para obtener una estimación de p_0.
   (*1.5 puntos*)

4. Transforma el siguiente sistema lineal 2×2 de números complejos en un sistema lineal 4×4 de números reales y resuelvelo mediante factorización $L\,U$ de Doolitle con pivoteo máximo de columna y aritmética de redondeo a 4 dígitos

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3+2\,i \\ -3\,i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3\,i \\ 2+i \end{pmatrix},$$

donde $y = x_1 + i\,x_2,\ z = x_3 + i\,x_4$. (*3.0 puntos*)

5. Dado el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2\,x^2 - z + 0.5 \\ x^2 - y^2 &= y + z - 0.5 \\ x + z^2 &= y + 0.61\ . \end{aligned}$$

(a) Describe brevemente el método de Newton para sistemas no lineales.
(*1.0 punto*)

(b) Plantea el sistema lineal asociado al sistema de ecuaciones no lineales para obtener una primera iteración del método de Newton para sistemas no lineales, con cálculos a 3 cifras significativas y aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0.26, 0.01, 0.56)^t$.
(*0.5 puntos*)

CURSO DE METODOS NUMERICOS

Año Académico 2001-2002 – Curso Tercero de Matemáticas

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE SEPTIEMBRE

1. Dados dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) en una línea recta, encuentre la intersección de la línea con el eje x. Hay dos fórmulas disponibles:

$$x = \frac{x_0\, y_1 - x_1\, y_0}{y_1 - y_0}, \qquad\qquad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)\, y_0}{y_1 - y_0}$$

(a) Demuestra que ambas fórmulas son algebraicamente correctas. (*1 punto*)

(b) Usando los datos $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$ y $(x_1, y_1) = (1.93, 4.76)$ y aritmética de redondeo a tres dígitos, calcula la intersección de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué? (*1.5 puntos*)

2. Sean $f(x)$ y sus derivadas de orden superior funciones continuas y acotadas en un intervalo que contiene el cero p.

(a) Si $f(p) = 0$ pero $f'(p) \neq 0$, muestra que la iteración de Newton-Raphson

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$

converge cuadráticamente si p_n está en el intervalo.

(*1 punto*)

(b) Si $f(p) = 0$ y $f'(p) = 0$, pero $f''(p) \neq 0$, muestra que la forma

$$p_{n+1} = p_n - 2\, \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$

converge cuadráticamente si p_n está en el intervalo (nota que la iteración es de la forma $p_{n+1} = g(p_n)$ y usa la regla de l'Hôpital para mostrar que $g'(p) = 0$).

(*1.5 puntos*)

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante eliminación gaussiana con pivoteo escalado de columna, realizando las operaciones en el sistema octal y con aritmética de redondeo a 4 dígitos (*2.5 puntos*)

$$\begin{pmatrix} -3.561_8 & 6.043_8 \\ -2.327_8 & 3.274_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.304_8 \\ 2.766_8 \end{pmatrix}.$$

4. Sean A y $\mathbf{b}$ los siguientes matriz y vector, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1.44 & 6.33 & 1.11 & -1.82 \\ 7.22 & 1.42 & -1.72 & 1.91 \\ 1.91 & -1.82 & 1.42 & 7.55 \\ -1.72 & 1.11 & 6.24 & 1.42 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6.06 \\ 7.53 \\ 8.06 \\ 8.05 \end{pmatrix}.$$

(a) Resuelve el sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando la factorización de Doolittle con pivoteo máximo de columna y aritmética de redondeo a tres dígitos significativos.

(*1.5 puntos*)

(b) Describe, brevemente, las técnicas iterativas de Jacobi y de Gauss-Seidel.

(*0.5 puntos*)

(c) Reordena adecuadamente las filas del sistema lineal para que haya convergencia al aplicar los métodos iterativos de Jacobi y/o Gauss-Seidel.

(*0.5 puntos*)

CURSO DE METODOS NUMERICOS

Año Académico 2002-2003 – Curso Tercero de Matemáticas

EXAMEN ORDINARIO DE FEBRERO

1. Dado un campo rectangular con lados de longitud $564_8\,m.$ y $1374_8\,m.$, halla el número de árboles que se pueden plantar en una diagonal del campo, si se sabe que la distancia entre árboles es $25_8\,m.$ (realizar todos los cálculos en base octal excluido el de la raíz cuadrada). (*1.5 puntos*)

2. Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números reales y

$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{x_1^2 \cdot x_2}{x_3 \cdot x_4^3}\ .$$

Debido al error inicial en los datos, $x_1 = 3.0 \pm 0.1$, $x_2 = 4.0 \pm 0.2$, $x_3 = 2.0 \pm 0.05$ y $x_4 = 1.0 \pm 0.01$ se cometerá un error en el valor final de la función. Determina cuál es el error absoluto máximo de dos maneras: exactamente y de manera aproximada utilizando las fórmulas del error relativo.

(*1.5 puntos*)

3. Dibuja una función que tenga una raíz real y elige la aproximación inicial de manera que el método de Newton-Raphson no converja.
Dibuja una función que tenga una raíz real y elige las tres aproximaciones iniciales de manera que el método de Müller no converja.
Dibuja una función que tenga una raíz real e indica el intervalo de manera que el método de la secante converja rápidamente.
Dibuja una función que tenga un punto fijo real y cuya convergencia sea rápida.
(*1.5 puntos*)

4. La ecuación

$$x + \ln x = 0$$

tiene una raíz cerca de $p_0 = 0.55$. Para utilizar el esquema de iteración del punto fijo se pueden obtener entre otras las siguientes fórmulas de iteración:

$$\begin{aligned} i)\quad & x_n = -\ln(x_{n-1})\,, \\ ii)\quad & x_n = \exp(-x_{n-1})\,, \\ iii)\quad & x_n = \frac{x_{n-1} + \exp(-x_{n-1})}{2}. \end{aligned}$$

¿Cuáles de dichos esquemas convergen a la raíz de la función para el valor inicial dado? ¿Cuál de ellos converge más rápidamente? ¿Cómo es la convergencia de los esquemas convergente: oscilatoria o monótona? Razonar las tres respuestas. Evaluar tres iteraciones de los esquemas dados para comparar las conclusiones anteriores.
(*2.5 puntos*).

5. Dado el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 + z \\
&x^2 + y^2 = 2\,x + y + z \\
&x^2 + z^2 = 1\ .
\end{aligned}$$

(a) Describir brevemente el método de Newton para sistemas no lineales.

(b) Efectuar una primera iteración del método de Newton para sistemas no lineales, resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones lineales usando la factorización de Crout con pivoteo escalado de columna y aritmética de cuatro dígitos significativos, y aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (-0.6, 1.2, 0.75)^t$.

(*0.5 + 2.5 puntos*)

CURSO DE METODOS NUMERICOS

Año Académico 2002-2003 – Curso Tercero de Matemáticas

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE SEPTIEMBRE

1. La representación común de los números está constituída por sucesiones de los símbolos "0, 1, 2, …,9". Esta representación constituye el sistema posicional en base 10, también conocido como sistema decimal.

(a) ¿Qué significa que el sistema decimal es posicional? (*0.3 puntos*)

(b) ¿Cuáles son los símbolos a usar en una representación en base $b = 6$? Construye las tablas para efectuar la suma y la multiplicación de dos cifras en base 6. Finalmente, suma y resta los números $(5324)_6$ y $(213)_6$.

(*1.0 punto*)

(c) Escribe los diez primeros números primos del sistema numérico en base $b = 6$.

(*0.7 puntos*)

2. Sabemos que la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\, r^n$$

es convergente si $|r| < 1$, con suma igual a $\frac{c}{1-r}$, y diverge si $|r| > 1$. Usa este hecho para probar que el desarrollo binario

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{001}_2$$

es equivalente a

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \dots$$

(*1.5 puntos*).

3. Para la búsqueda de raíces de una ecuación $f(x) = 0$ se conoce un método llamado de la iteración funcional, que determina los puntos fijos de una función $g(x)$. Muestra que las sucesiones definidas por

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n^2 + 2\right) = g_1(x_n) \qquad \text{y} \qquad x_{n+1} = 3 - \frac{2}{x_n} = g_2(x_n)$$

convergen a las distintas raíces de la misma ecuación con oportunas condiciones iniciales.

(a) Enuncia y demuestra el teorema de la convergencia de la sucesión definida por $p_n = g(p_{n-1})$ al único punto fijo de g. (*1.0 punto*)

(b) Encuentra la expresión de $f(x)$ de manera que la ecuación $f(x) = 0$ sea equivalente a la iteraciones dadas arriba y determina exactamente los ceros.

(*0.3 puntos*)

(c) Da la costrucción geométrica de las iteraciones para cada caso y para varias aproximaciones iniciales x_0.

(*0.9 puntos*)

(d) Comprueba si se satisfacen las hipótesis del teorema de la convergencia de la iteración funcional. Explica los resultados.

(*0.8 puntos*)

4. Determina cuáles son las condiciones sobre a, b y c para que la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

tenga una factorización $L\,L^t$, con L real triangular inferior. (*0.5 puntos*)

5. Transforma el siguiente sistema lineal 2×2 de números complejos en un sistema lineal 4×4 de números reales y resuélvelo mediante factorización $L\,U$ de Doolitle con pivoteo máximo de columna y aritmética de redondeo a 4 dígitos

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3+2\,i \\ -3\,i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3\,i \\ 2+i \end{pmatrix},$$

donde $y = x_1 + i\,x_2,\ z = x_3 + i\,x_4$. (*3.0 puntos*)

CURSO DE METODOS NUMERICOS

Año Académico 2003-2004 – Curso Tercero de Matemáticas

EXAMEN ORDINARIO DE FEBRERO

1. Considera el polinomio $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, cuyos coeficientes son $(a, b, c) = (1, -1.55, -3.5)$ y su raíz positiva es α. Dados los coeficientes aproximados $a^* \in [a-0.02, a+0.02]$, $b^* \in [b-0.05, b+0.05]$ y $c^* \in [c-0.1, c+0.1]$, calcula de manera exacta y de forma aproximada mediante la formula del índice de condicionamiento el error relativo máximo de la raíz del polinomio $P^*(x) = a^*x^2 + b^*x + c^*$ con respecto a α. *(1.5 puntos)*

2. (a) Demuestra que la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, dada por $p_n = \frac{1}{n^2}$, converge linealmente a $p = 0$ y encuentra cuántos términos deben generarse antes de que $|p_n - p| \leq 5.0 \times 10^{-2}$.
(b) Construye con el método Δ^2 de Aitken el término genérico de la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Comprueba y explica que aunque la sucesión $\{\hat{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p más rápidamente que $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, no lo hace en el sentido de que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = 0.$$
(*1.5 puntos*)

3. Considera un embalse cúbico, cuya base rectangular tiene una longitud fija de $y = 110$ m. y una anchura variable x. Si el nivel que alcanza el agua h (en metros), depende del tiempo t (en días) y de la anchura x según la siguiente relación,
$$h = \frac{t^2 \ln(x^2+2)}{x+4},$$
¿cuánto debe medir la anchura x para que en 4.5 días el embalse almacene 10000 m^3. de agua? Encuentra un intervalo adecuado para la variable x, con $x \in [n, n+1]$, y a continuación realiza dos iteraciones del método que consideres más conveniente. *(2.0 puntos)*

4. Ajusta los siguientes datos $(0, 1)$, $(0.25, 1.284)$, $(0.5, 1.6487)$, $(0.75, 2.117)$, $(1, 2.7183)$, con un polinomio de mínimos cuadratos de segundo grado usando el método de las ecuaciones normales, con factorización de Cholewsky y aritmética a cinco dígitos significativos. (*2.5 puntos*)

5. Encuentra una aproximación a la solución del siguiente sistema no lineal, realizando una primera iteración del método de Newton, aritmética a cuatro dígitos significativos, con aproximación inicial $\mathbf{x}^{(\mathbf{0})} = (-0.5, -0.3, 5.1)^t$ y usando el método de factorización de Doolittle con pivoteo máximo de columna.
$$\begin{aligned} x_1\,x_2\,x_3 &= 1 \\ x_1 + 2\,x_2 &= 4 - x_3 \\ 2\,x_1 + x_3 &= 4 - x_2\ . \end{aligned}$$
(*2.5 puntos*)