CAPITULO IX. EL METODO DE NEWTON-RAPHSON

1. INTRODUCCION Y METODO

El método de Newton-Raphson (o simplemente Newton) es uno de los métodos numéricos más conocidos y poderosos para la resolución del problema de búsqueda de raíces de $f(x) = 0$. Para introducir el método de Newton usaremos un enfoque intuitivo basado en el polinomio de Taylor.

Supóngase que la función f es continuamente diferenciable dos veces en el intervalo $[a, b]$; o sea, $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Sea $\overline{x} \in [a, b]$ una aproximación a la raíz p tal que $f'(\overline{x}) \neq 0$ y $|\overline{x} - p|$ es *pequeño*. Considérese el polinomio de Taylor de primer grado para $f(x)$ alrededor de $\overline{x}$

$$f(x) = f(\overline{x}) + (x - \overline{x})\ f'(\overline{x}) + \frac{(x - \overline{x})^2}{2}\ f''(\zeta(x))\ , \tag{IX.1}$$

donde $\zeta(x)$ está entre x y $\overline{x}$. Como $f(p) = 0$, la ecuación $(IX.1)$, con $x = p$, nos da

$$0 = f(\overline{x}) + (p - \overline{x})\ f'(\overline{x}) + \frac{(p - \overline{x})^2}{2}\ f''(\zeta(p))\ . \tag{IX.2}$$

El método de Newton se deriva suponiendo que el término que contiene a $(p - \overline{x})^2$ es despreciable y que

$$0 \approx f(\overline{x}) + (p - \overline{x})\ f'(\overline{x})\ . \tag{IX.3}$$

Despejando p de esta ecuación resulta:

$$p \approx \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}\ , \tag{IX.4}$$

lo cual debe ser una mejor aproximación a p que $\overline{x}$.

El método de Newton-Raphson implica el generar la sucesión $\{p_n\}$ definida por

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}\ , \qquad n \geq 1\ . \tag{IX.5}$$

Geométricamente, el método de Newton es equivalente a sustituir un arco pequeño de la curva $y = f(x)$ por una tangente trazada por un punto de la curva. Supongamos, por definición, que $f''(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$ y $f(b) > 0$ (ver figura 1).

Tomemos, por ejemplo, $p_0 = b$ para el cual $f(p_0) \cdot f''(p_0) > 0$. Trácese la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $B(p_0, f(p_0))$. Como primera aproximación p_1 de la raíz p tomemos la abscisa del punto de intersección de esta tangente con el eje x. Trácese nuevamente una tangente por el punto de coordenadas $(p_1, f(p_1))$, cuya abscisa del punto de intersección con el eje x ofrece una segunda aproximación p_2 de la raíz p, y así sucesivamente.

La ecuación de la tangente en el punto de coordenadas $(p_n, f(p_n))$ $(n = 0, 1, ...)$, es

$$y - f(p_n) = f'(p_n)\ (x - p_n)\ .$$

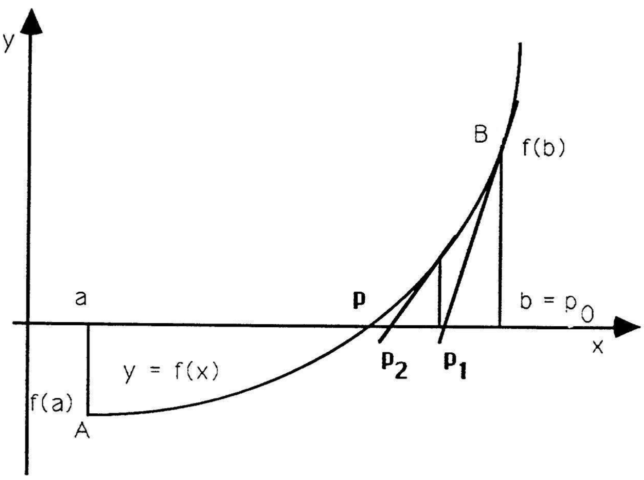
Haciendo $y = 0$ y $x = p_{n+1}$, tendremos la fórmula $(IX.5)$.

Nótese que si en nuestro caso hacemos $p_0 = a$, y por tanto $f(p_0) \cdot f''(p_0) < 0$, y trazamos entonces la tangente a la curva $y = f(x)$ por el punto $A(a, f(a))$, tendremos que el punto p'_1 cae fuera del intervalo $[a, b]$; en otras palabras, el procedimiento de Newton no es práctico para este valor inicial. Por tanto, en el caso dado, una *buena* aproximación inicial p_0 es aquella para la cual resulta válida la desigualdad

$$f(p_0) \cdot f''(p_0) > 0 \ .$$

Demostraremos ahora que esta regla es general.

Figura 1



Teorema IX.1

Sea $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, y $f'(x)$ y $f''(x)$ son no nulas y conservan el signo para $a \leq x \leq b$, entonces, a partir de la aproximación inicial $p_0 \in [a, b]$ que satisface

$$f(p_0) \cdot f''(p_0) > 0 \ , \qquad (IX.6)$$

es posible, utilizando el método de Newton (fórmula $(IX.3)$), calcular la raíz única p de la ecuación $f(x) = 0$ con cualquier grado de exactitud.

Demostración: supongamos $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$. Por la desigualdad $(IX.6)$ tenemos $f(p_0) > 0$ (podemos, por ejemplo, tomar $p_0 = b$). Por inducción matemática demostraremos que todas las aproximaciones $p_n > p$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ y, por consiguiente, $f(p_n) > 0$. En efecto, ante todo, $p_0 > p$.

Establezcamos ahora $p_n > p$. Pongamos

$$p = p_n + (p - p_n) \ .$$

Utilizando la fórmula de Taylor, tendremos

$$0 = f(p) = f(p_n) + f'(p_n)\ (p - p_n) + \frac{1}{2}\ f''(c_n)\ (p - p_n)^2 \ ,$$

donde $p < c_n < p_n$.

Como $f''(x) > 0$, tenemos

$$f(p_n) + f'(p_n)\ (p - p_n) < 0\ ,$$

y, de aquí que

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} > p$$

que es lo que se quería demostrar.

Tomando en consideración los signos de $f(p_n)$ y $f'(p_n)$ tenemos, de la fórmula $(IX.5)$, $p_{n+1} < p_n$ $(n = 0, 1, ...)$, es decir, las aproximaciones sucesivas p_0, p_1, ..., p_n, ... forman una secuencia acotada monótona decreciente. Por consiguiente, existe el límite $\overline{p} = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$. Pasando al límite en $(IX.5)$, tenemos

$$\overline{p} = \overline{p} - \frac{f(\overline{p})}{f'(\overline{p})}$$

ó $f(\overline{p}) = 0$, de donde $\overline{p} = p$. **c.q.d.**

Por esta razón, al aplicar el método de Newton debe guiarse uno por la **regla** siguiente: para el punto inicial p_0 elíjase el final del intervalo (a, b) asociado con una ordenada del mismo signo que el de $f''(x)$.

Teorema IX.2

Sea $f \in \mathcal{C}(-\infty, +\infty)$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$ para $a \leq x \leq b$ y si $f''(x)$ existe en cualquier punto y conserva el signo, entonces puede tomarse cualquier valor $c \in [a, b]$ como aproximación inicial p_0 al utilizarse el método de Newton para hallar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ que caiga en el intervalo (a, b). Se puede, por ejemplo, tomar $p_0 = a$ ó $p_0 = b$.

Demostración: en efecto, supongamos, por ejemplo, $f'(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$, $f''(x) > 0$ y $p_0 = c$, donde $a \leq c \leq b$. Si $f(c) = 0$, la raíz $p = c$ y el problema queda resuelto. Si $f(c) > 0$, el razonamiento anterior se cumple y el proceso de Newton con valor inicial c convergerá hacia la raíz $p \in (a, b)$.

Finalmente, si $f(c) < 0$, hallaremos

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)} > c\ .$$

Utilizando la fórmula de Taylor tendremos

$$f(p_1) = f(c) - \frac{f(c)}{f'(c)}\ f'(c) + \frac{1}{2}\ \Big[\frac{f(c)}{f'(c)}\Big]^2\ f''(\overline{c}) = \frac{1}{2}\ \Big[\frac{f(c)}{f'(c)}\Big]^2\ f''(\overline{c}) > 0$$

donde $\overline{c}$ es un cierto valor intermedio entre c y p_1. De este modo

$$f(p_1) \cdot f''(p_1) > 0\ .$$

Además, de la condición $f''(x) > 0$ se deduce que $f'(x)$ es una función creciente y, en consecuencia, $f'(x) > f'(a) > 0$ para $x > a$. Es posible por tanto tomar p_1 como valor inicial del proceso de Newton convergente hacia una cierta raíz $\overline{p}$ de la función $f(x)$ tal que $\overline{p} > c \geq a$. Como la derivada $f'(x)$ es positiva cuando $p > a$, la función $f(x)$ tiene raíz única en el intervalo $(a, +\infty)$, de donde se deduce que

$$\overline{p} = p \in (a, b) \ .$$

Puede establecerse un argumento similar para otras combinaciones de signos de las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$. **c.q.d.**

Nótese que de la fórmula $(IX.5)$ está claro que cuanto mayor sea el valor numérico de la derivada $f'(x)$ en la vecindad de la raíz, tanto menor será la corrección que ha de añadirse a la aproximación $n-$ésima para obtener la aproximación $(n+1)$. El método de Newton es por consiguiente muy conveniente cuando la gráfica de la función tiene una gran pendiente en la vecindad de la raíz dada, pero si el valor numérico de la derivada $f'(x)$ es pequeño cerca de ella, las correcciones serán entonces mayores, y calcular la raíz mediante este procedimiento puede ser un proceso largo o a veces incluso imposible. Resumiendo: no utilice el método de Newton para resolver una ecuación $f(x) = 0$ si la curva $y = f(x)$ es casi horizontal cerca del punto de intersección con el eje x.

El método de Newton es un técnica de iteración funcional $p_n = g(p_{n-1})$, $n \geq 1$ para la cual

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \ , \qquad n \geq 1 \ .$$

Se ve claramente de esta ecuación que el método de Newton no puede continuarse si $f'(p_{n-1}) = 0$ para algún n. Veremos que el método es más eficaz cuando f' está acotada fuera de cero cerca del punto fijo p.

La derivación del método de Newton con serie de Taylor resalta la importancia de una buena aproximación inicial. La suposición crucial al pasar de $(IX.2)$ a $(IX.3)$, es que el término que contiene $(p - \overline{x})^2$ puede ser eliminado. Esta, claramente será una suposición falsa a menos que $\overline{x}$ sea una buena aproximación de p. En particular, si p_0 no está lo suficientemente cerca de la raíz real, el método de Newton puede no converger a la raíz.

El siguiente Teorema de convergencia para el método de Newton ilustra la importancia teórica de la elección de p_0.

Teorema IX.3

Sea $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Si $p \in [a, b]$ es tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el método de Newton genera una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a p para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

Demostración: la demostración está basada en un análisis del método de Newton como un esquema de iteración funcional $p_n = g(p_{n-1})$, para $n \geq 1$, con

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ .$$

El objetivo es encontrar, para cualquier valor k en $(0,1)$, un intervalo $[p-\delta, p+\delta]$ tal que g mande al intervalo $[p-\delta, p+\delta]$ a sí mismo y que $|g'(x)| \leq k < 1$ para $x \in [p-\delta, p+\delta]$, donde k es una constante fija en $(0,1)$.

Ya que $f'(p) \neq 0$ y f' es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f'(x) \neq 0$ para $x \in [p-\delta_1, p+\delta_1] \subset [a,b]$. Entonces, g está definida y es continua en $[p-\delta_1, p+\delta_1]$. También,

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)\ f'(x) - f(x)\ f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)\ f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

para $x \in [p-\delta_1, p+\delta_1]$; y como $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$, $g \in \mathcal{C}[p-\delta_1, p+\delta_1]$. De la suposición $f(p) = 0$, se tiene

$$g'(p) = \frac{f(p)\ f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0\ .$$

Y como g' es continua, esa ecuación implica que existe un δ con $0 < \delta < \delta_1$, y

$$|g'(x)| \leq k < 1 \qquad \text{para}\ \ x \in [p-\delta, p+\delta]\ .$$

Falta todavía demostar que $g : [p-\delta, p+\delta] \to [p-\delta, p+\delta]$. Si $x \in [p-\delta, p+\delta]$, el Teorema del Valor Medio implica que, para algún número ξ entre x y p, $|g(x)-g(p)| = |g'(\xi)|\ |x-p|$. Así que,

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)|\ |x-p| \leq k\ |x-p| < |x-p|\ .$$

Como $x \in [p-\delta, p+\delta]$, se sigue que $|x-p| < \delta$ y que $|g(x)-p| < \delta$. Esto implica que $g : [p-\delta, p+\delta] \to [p-\delta, p+\delta]$.

Todas las hipótesis del Teorema VII.2 se satisfacen para $g(x) = x - f(x)/f'(x)$, así que la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$p_n = g(p_{n-1}) \qquad \text{para}\ \ n = 1, 2, 3, ...$$

converge a p para cualquier $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$. **c.q.d.**

Para estimar el error de la aproximación p_n de orden n, se puede utilizar la fórmula general $(V.2)$ del capítulo V, $|p-p_n| \leq |f(p_n)|/m_1$, donde m_1 es el valor más pequeño de $|f'(x)|$ en el intervalo $[a,b]$.

Obtendremos ahora otra fórmula para estimar la exactitud de la aproximación p_n. Aplicando la fórmula de Taylor, tenemos

$$f(p_n) = f[p_{n-1} + (p_n - p_{n-1})] =$$

$$= f(p_{n-1}) + f'(p_{n-1})\ (p_n - p_{n-1}) + \frac{1}{2}\ f''(\xi_{n-1})\ (p_n - p_{n-1})^2$$

donde $\xi_{n-1} \in (p_{n-1}, p_n)$. Ya que, en virtud de la definición de la aproximación p_n, tenemos

$$f(p_{n-1}) + f'(p_{n-1})\ (p_n - p_{n-1}) = 0\ ,$$

se deduce que

$$|f(p_n)| \leq \frac{1}{2}\ M_2\ (p_n - p_{n-1})^2$$

donde M_2 es el valor más elevado de $|f''(x)|$ en el entervalo $[a,b]$. En consecuencia, basándose en la fórmula $(V.2)$ tenemos finalmente

$$|p - p_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(p_n - p_{n-1})^2\ . \qquad (IX.7)$$

Si el proceso de Newton converge, entonces $|p_n - p_{n-1}| \to 0$ para $n \to \infty$. Y por tanto para $n \geq N$ tenemos

$$|p - p_n| \leq |p_n - p_{n-1}|\ ,$$

es decir, los decimales iniciales "estabilizados" de las aproximaciones p_{n-1} y p_n son exactos comenzando con una cierta aproximación.

Téngase en cuenta que en el caso general, una coincidencia hasta de ε, de dos aproximaciones sucesivas p_{n-1} y p_n no garantiza que los valores de p_n y la raíz exacta p coincidan con el mismo grado de exactitud.

Obtendremos ahora una fórmula que ligue los errores absolutos de dos aproximaciones sucesivas p_n y p_{n+1}. Utilizando la fórmula de Taylor tendremos

$$0 = f(p) = f(p_n) + f'(p_n)\ (p - p_n) + \frac{1}{2}\ f''(c_n)\ (p - p_n)^2\ ,$$

donde $p < c_n < p_n$, y entonces

$$p = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(p_n)}\ (p - p_n)^2\ ,$$

y, teniendo en cuenta que $p_{n+1} = p_n - \dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)}$, tenemos

$$p - p_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(p_n)}\ (p - p_n)^2\ ,$$

y consecuentemente,

$$|p - p_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1}\ (p - p_n)^2\ . \qquad (IX.8)$$

La fórmula $(IX.8)$ asegura una rápida convergencia del proceso de Newton si la aproximación inicial p_0 es tal que

$$\frac{M_2}{2m_1}\ |p - p_0| \leq k < 1\ .$$

En particular, si

$$\mu = \frac{M_2}{2m_1} \leq 1 \quad \text{y} \quad |p - p_n| < 10^{-m}$$

entonces de $(IX.8)$ tenemos

$$|p - p_{n+1}| < 10^{-2m}\ .$$

Esto es, en este caso, si la aproximación p_n es exacta con m decimales, la siguiente aproximación p_{n+1} lo será como mínimo con $2m$ decimales; en otras palabras, si $\mu \leq 1$, el procedimiento de Newton asegura entonces el doble del número de decimales exactos de la raíz deseada en cada paso.

2. EL ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON

Algoritmo de Newton-Raphson.

==

Para encontrar una solución de $f(x) = 0$ dada una aproximación inicial p_0:

Entrada: aproximación inicial p_0; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0;

Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 1$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar $p = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$ *(calcular p_i)*;

Paso 4: si $|p - p_0| < TOL$ entonces SALIDA (p);
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar $p_0 = p$. *(redefinir p_0)*;

Paso 7: SALIDA ($'$*El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 =$* $'$, N_0);
(procedimiento completado sin éxito); PARAR.

==

Ejemplo 1.

Supóngase que se necesita una solución a la ecuación $x = \cos x$. Sea $f(x) = \cos x - x$. Entonces

$$f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0 < 1 = f(0) \ ,$$

y, por el Teorema del Valor Intermedio, existe un cero de f en $[0, \pi/2]$. De un estudio gráfico de las ecuaciones $y = x$ e $y = \cos x$ es claro que $f(x) = 0$ tiene una solución única en $[0, \pi/2]$.

Tabla 1

n	p_n
0	0.785398163
1	0.739536134
2	0.739085178
3	0.739085133
4	0.739085133

Como $f'(x) = -\sin x - 1$, el método de Newton tiene la forma

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(\cos p_{n-1} - p_{n-1})}{(-\sin p_{n-1} - 1)} \ , \qquad n \geq 1 \ ,$$

donde p_0 tiene todavía que ser seleccionado. Para algunos problemas es suficiente tomar p_0 arbitrariamente, mientras que en otros es importante seleccionar una buena aproximación inicial. Para el problema en consideración, un estudio gráfico sugiere $p_0 = \pi/4$ como una primera aproximación. Con $p_0 = \pi/4$, se generan las aproximaciones de la tabla 1. Con $n = 3$ se obtiene una aproximación excelente.

Ejemplo 2.

Para obtener la solución única de

$$f(x) = x^3 + 4\,x^2 - 10 = 0$$

en el intervalo $[1, 2]$ por el método de Newton generamos la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4\,p_{n-1}^2 - 10}{3\,p_{n-1}^2 + 8\,p_{n-1}}\ , \qquad n \geq 1\ .$$

Seleccionando $p_0 = 1.5$ obtenemos los resultados del ejemplo 3 del capítulo XVI en los cuales $p_3 = 1.36523001$ es correcto en ocho decimales.

3. EL ALGORITMO DE LA SECANTE MODIFICADO

El Teorema IX.3 dice que, bajo condiciones razonables, el método de Newton convergerá siempre y cuando se escoja una aproximación inicial lo suficientemente exacta. También implica que la constante k que acota la derivada de g decrece conforme el procedimiento va avanzando y, consecuentemente, indica la rapidez de convergencia del método.

El método de Newton es una técnica extremadamente poderosa, pero tiene una dificultad grande: la necesidad de saber el valor de la derivada de f en cada aproximación. Frecuentemente ocurre que $f'(x)$ es mucho más complicada y necesita más operaciones aritméticas para su cálculo que $f(x)$.

Para evitar el problema de la evaluación de la derivada en el método de Newton, podemos derivar una pequeña variación de éste, relacionada con el método de la secante que hemos visto en el capítulo anterior.

Por definición

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}\ .$$

Tomando $x = p_{n-2}$

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}\ .$$

Usando esta aproximación para $f'(p_{n-1})$ en la fórmula de Newton da

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}\,(p_{n-1} - p_{n-2})\ . \qquad (IX.9)$$

Algoritmo de la secante modificado.

==

Para encontrar una solución de $f(x) = 0$, dadas las aproximaciones iniciales p_0 y p_1;

Entrada: aproximaciones iniciales p_0 y p_1; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0;

Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 2$, y definir:
$q_0 = f(p_0)$
$q_1 = f(p_1)$;

Paso 2: mientras que $i \le N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar *(calcular p_i)*:
$p = p_1 - \frac{q_1}{q_1 - q_0}\ (p_1 - p_0)$;

Paso 4: si $|p - p_1| < TOL$ entonces SALIDA (p);
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar *(redefinir p_0, p_1, q_0, q_1)*;
$p_0 = p_1$;
$q_0 = q_1$;
$p_1 = p$;
$q_1 = f(p)$;

Paso 7: SALIDA ($'$*El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 =$* $'$, N_0);
(procedimiento completado sin éxito); PARAR.

==

Ejemplo 3.

Consideremos el mismo caso del ejemplo 1, donde se usó el método de Newton con $p_0 = \pi/4$ para encontrar un cero de $f(x) = \cos x - x$. Pero ahora queremos usar el método de la secante modificado. Aquí , necesitamos dos aproximaciones iniciales. En la tabla 2 están los cálculos con $p_0 = 0.5$ y $p_1 = \pi/4$, habiendo usado la fórmula

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1} - p_{n-2})\ (\cos p_{n-1} - p_{n-1})}{(\cos p_{n-1} - p_{n-1}) - (\cos p_{n-2} - p_{n-2})} \qquad \text{para} \;\; n \ge 2\ .$$

Tabla 2

n	p_n
0	0.5
1	0.785398163
2	0.736384139
3	0.739058139
4	0.739085149
5	0.739085133

Comparando estos resultados con los del ejemplo 1, podemos ver que p_5 es exacto hasta la décima cifra decimal. Es interesante hacer notar que la convergencia del método de la secante es un poco más lenta en este ejemplo que la del método de Newton, el cual obtuvo este grado de precisión con p_3. Este resultado es generalmente cierto.

El método de la secante o el método de Newton se usan frecuentemente para refinar las respuestas obtenidas con otras técnicas, como el método de bisección. Como estos métodos requieren una buena primera aproximación, pero generalmente dan una convergencia rápida, cumplen muy bien con su propósito.

4. EL METODO DE NEWTON MODIFICADO

Si la derivada $f'(x)$ varía, aunque ligeramente, en el intervalo $[a, b]$, en tal caso en la fórmula $(IX.5)$ podemos poner

$$f'(p_n) \approx f'(p_0) \; .$$

De aquí, para la raíz p de la ecuación $f(x) = 0$ tendremos las aproximaciones sucesivas

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_0)} \; , \qquad n \geq 0 \; . \qquad (IX.10)$$

La fórmula de iteración $(IX.10)$ es conocida también como la **fórmula de Von Mises**.

Geométricamente, este método significa que sustituímos las tangentes en los puntos $B_n[p_n, f(p_n)]$ por líneas rectas paralelas a la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $B_0[p_0, f(p_0)]$.

La fórmula de Von Mises nos evita la necesidad de calcular los valores de la derivada $f'(p_n)$ cada vez; por lo tanto esta fórmula es muy útil si $f'(p_n)$ es complicada.

Puede demostrarse que supuesta la constancia de los signos de las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ las aproximaciones sucesivas $(IX.10)$ presentan un proceso convergente.

5. EL METODO DE COMBINACION

Supongamos $f(a) \cdot f(b) < 0$ y que $f'(x)$ y $f''(x)$ conservan los signos en el intervalo $[a, b]$. Combinando el método de la secante modificado y el de Newton, obtenemos un método en el que en cada una de sus etapas encontraremos aproximaciones menores (demasiado pequeñas) y mayores (demasiado grandes) a la raíz exacta p de la ecuación $f(x) = 0$. Este método es también conocido con el nombre de **método de Dandelin**.

Una de sus consecuencias es que los dígitos comunes a p_n y $\overline{p}_n$ deben pertenecer definitivamente a la raíz exacta p. Existen cuatro casos teóricamente posibles:

$$(1) \qquad f'(x) > 0 \quad f''(x) > 0 \; ;$$

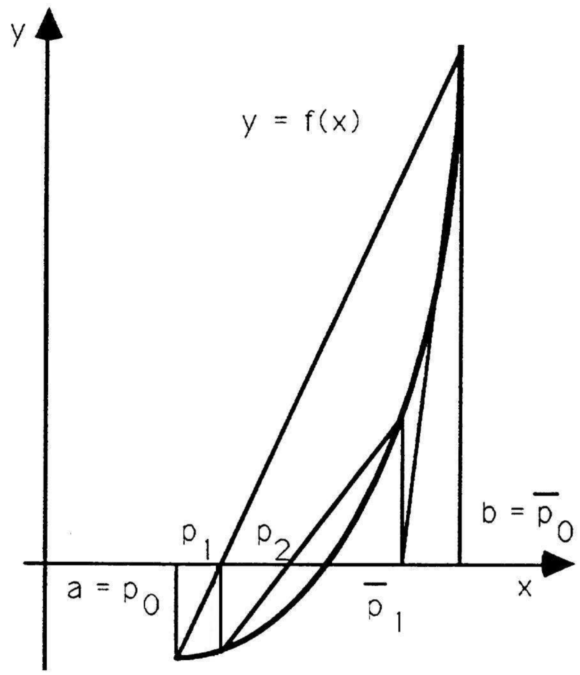
$$(2) \qquad f'(x) > 0 \quad f''(x) < 0 \; ;$$

$$(3) \qquad f'(x) < 0 \quad f''(x) > 0 \; ;$$

$$(4) \qquad f'(x) < 0 \quad f''(x) < 0 \; .$$

Limitaremos nuestro análisis al primer caso (ver figura 2). Los casos restantes se estudian de forma análoga y el carácter de los cálculos se comprende fácilmente en base a las figuras. Conviene tener en cuenta que estos casos pueden reducirse al primero si sustituímos la ecuación $f(x) = 0$ por las ecuaciones equivalentes $-f(x) = 0$ ó $\pm f(-z) = 0$, donde $z = -x$.

Figura 2



De este modo, supongamos $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$. Hagamos

$$p_0 = a \qquad \text{y} \qquad \overline{p}_0 = b \ ,$$

y

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f(\overline{p}_n) - f(p_n)} \ (\overline{p}_n - p_n) \ , \tag{IX.11}$$

$$\overline{p}_{n+1} = \overline{p}_n - \frac{f(\overline{p}_n)}{f'(\overline{p}_n)} \qquad (n = 0, 1, 2, ...) \ . \tag{IX.12}$$

Es decir, en cada paso se aplica el método de la secante para un nuevo intervalo $[p_n, \overline{p}_n]$.

Por lo demostrado anteriormente se deduce que

$$p_n < p < \overline{p}_n$$

y

$$0 < p - p_n < \overline{p}_n - p_n \ .$$

Si el error absoluto permisible en una raíz aproximada p_n se ha especificado de antemano y es igual a ε, el proceso de aproximación termina tan pronto veamos que $\overline{p}_n - p_n < \varepsilon$. Al final del proceso, lo mejor es tomar como valor de la raíz p la media aritmética de los últimos valores obtenidos:

$$\overline{p} = \frac{1}{2} \ (p_n + \overline{p}_n) \ .$$

Ejemplo 4.

Calcúlese con exactitud 0.0005 la única raíz positiva de la ecuación

$$f(x) = x^5 - x - 0.2 = 0 \ .$$

Como $f(1) = -0.2 < 0$ y $f(1.1) = 0.31051 > 0$, la raíz está en el intervalo $(1, 1.1)$. Tenemos

$$f'(x) = 5\ x^4 - 1 \qquad \text{y} \qquad f''(x) = 20\ x^3 \ .$$

En el intervalo elegido, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, lo cual quiere decir que se han conservado los signos de las derivadas.

Apliquemos el método de combinación suponiendo que $p_0 = 1$ y $\overline{p}_0 = 1.1$. Ya que

$$f(p_0) = f(1) = -0.2 \ , \qquad f(\overline{p}_0) = f(1.1) = 0.3105 \ , \qquad f'(\overline{p}_0) = f'(1.1) = 6.3205$$

las fórmulas $(IX.11)$ y $(IX.12)$ se convierten en

$$p_1 = 1 + \frac{0.2 \cdot 0.1}{0.5105} \approx 1.03918 \qquad \text{y} \qquad \overline{p}_1 = 1.1 - \frac{0.3105}{6.3205} \approx 1.05087 \ ,$$

con $f(p_1) = -0.0273160$ y $f(\overline{p}_1) = 0.0307078$. Como $\overline{p}_1 - p_1 = 0.01169$, la exactitud no es suficiente. Halleremos el siguiente par de aproximaciones, con $f'(\overline{p}_1) \approx 5.09770$:

$$p_2 = 1.03919 + \frac{0.027316 \cdot 0.01169}{0.0580238} \approx 1.04468$$

y

$$\overline{p}_2 = 1.05087 - \frac{0.0307078}{5.0977} \approx 1.04485 \ ,$$

con $f(p_2) = -0.0000404924$ y $f(\overline{p}_2) = 0.000437805$. En este caso, $\overline{p}_2 - p_2 = 0.00017$, lo cual indica que se ha conseguido el grado de exactitud deseado. Podemos poner

$$\overline{p} = \frac{1}{2}\ (1.04468 + 1.04485) = 1.044765 \approx 1.045$$

con error absoluto menor de $0.0002 < 0.0005$. En efecto:

$$|p - \overline{p}| = |p - \frac{1}{2}(p_2 + \overline{p}_2)| = |p - p_2 + \frac{1}{2}(p_2 - \overline{p}_2)| \leq |p - p_2| + \frac{1}{2}|p_2 - \overline{p}_2| \leq \frac{1}{2}|p_2 - \overline{p}_2| + \frac{|f(p_2)|}{m_1} \ ,$$

o también

$$|p - \overline{p}| = |p - \overline{p}_2 + \frac{1}{2}(\overline{p}_2 - p_2)| \leq \frac{1}{2}|\overline{p}_2 - p_2| + \frac{|f(\overline{p}_2)|}{m_1} \ .$$

Dado que $m_1 = \min\limits_{x \in [1,1.1]} |f'(x)| = 4$, obtenemos que $|p - \overline{p}| \leq \frac{1}{2}\ 0.00017 + \frac{|-0.000404924|}{4} = 0.000186231$ en el primer caso y $|p - \overline{p}| \leq \frac{1}{2}\ 0.00017 + \frac{|0.000437805|}{4} = 0.000194451$, en el segundo.

Ejemplo 5.

Hallar las primeras dos iteraciones de la raíz negativa de la ecuación

$$f(x) = x^4 + 0.1\ x^3 - 0.56\ x^2 + 0.1\ x - 1.56 = 0\ .$$

Como $f(-1.5) = 1.755 > 0$ y $f(-1.0) = -1.32 < 0$, la raíz está en el intervalo $(-1.5, -1.0)$. Tenemos

$$f'(x) = 4\ x^3 + 0.3\ x^2 - 1.12\ x + 0.1 < 0 \quad \text{en} \quad [-1.5, -1.0]\ ,$$

y

$$f''(x) = 12\ x^2 + 0.6\ x - 1.12 > 0 \quad \text{en} \quad [-1.5, -1.0]\ .$$

En el intervalo elegido no se han conservado los signos de las derivadas. Entonces, tenemos que aplicar el método de combinación de la siguiente manera:

$$p_{n+1} = \overline{p}_n - \frac{f(\overline{p}_n)}{f(p_n) - f(\overline{p}_n)}\ (p_n - \overline{p}_n)\ ,$$

$$\overline{p}_{n+1} = \overline{p}_n - \frac{f(\overline{p}_n)}{f'(\overline{p}_n)} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)\ ,$$

y podemos escoger

$$\overline{p}_0 = a = -1.5 \qquad \text{y} \qquad p_0 = b = -1.0\ .$$

Ahora

$$\begin{aligned}
p_0 &= -\ 1.0\ , \qquad \overline{p}_0 = -1.5\ ,\\
f(p_0) &= 1.32\ , \qquad f(\overline{p}_0) = 1.755\ , \qquad f'(\overline{p}_0) = -11.045\ ,\\
p_1 &= -\ 1.5 + \frac{1.755}{1.32 + 1.755}\ (-1.0 + 1.5) \approx -1.214634146\ ,\\
f(p_1) &= -\ 0.510234362\ ,\\
\overline{p}_1 &= -\ 1.5 + \frac{1.755}{11.045} \approx -1.341104572\ ,\\
f(\overline{p}_1) &= 0.292312590\ , \qquad f'(\overline{p}_1) = -7.506630499\ ,\\
p_2 &= -\ 1.341104572 + \frac{0.292312590}{7.506630499 + 0.292312590}\ (-1.214634146 + 1.341104572)\\
&\approx -\ 1.295040105\ ,\\
\overline{p}_2 &= -\ 1.341104572 + \frac{0.292312590}{7.506630499} \approx -1.302163986\ ,\\
f(p_2) &= -\ 0.033129838\ , \qquad f(\overline{p}_2) = 0.014595893\ .
\end{aligned}$$

Entonces, podemos poner

$$\overline{p} = \frac{1}{2}\ (p_2 + \overline{p}_2) = -1.298602046$$

con error absoluto $|p - \overline{p}| = |1.3 - 1.298602046| = 0.00139795 < 0.0002$.

EJERCICIOS.

1. Aproxime con 10^{-4} de precisión las raíces de las siguientes ecuaciones en los intervalos dados usando el método de Newton-Raphson y el método de la secante modificado:
(a) $x^3 - 2\,x^2 - 5 = 0$ $[1,4]$ (b) $x - \cos x = 0$ $[0,\pi/2]$
(c) $x^3 + 3\,x^2 - 1 = 0$ $[-4,0]$ (d) $x - 0.8 - 0.2\sin x = 0$ $[0,\pi/2]$

2. Encuentre una raíz aproximada de $x^3 - x - 1 = 0$ en $[1,2]$ con precisión de 10^{-5} por el método de Newton y el método de la secante modificado.

3. Usar el método de Newton y el método de la secante modificado para aproximar las soluciones de las ecuaciones siguientes con precisión de 10^{-5}:
(a) $x = \frac{2-e^x+x^2}{3}$ (b) $3\,x^2 - e^x = 0$
(c) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ (d) $x^2 + 10\cos x = 0$

4. Resolver $4\cos x = e^x$ con exactidud de 10^{-4}, usando el método de Newton con $p_0 = 1$ y el método de la secante modificado con $p_0 = \pi/4$ y $p_1 = \pi/2$.

5. Calcular una aproximación de $\sqrt{3}$ exacta en 10^{-4}, usando el método de Newton-Raphson con $p_0 = 2$ y el método de la secante modificado.

6. Use el método de Newton para aproximar, con una exactitud de 10^{-4}, el valor de x que produce el punto en la gráfica de $y = x^2$ más cercano a (1, 0). [Minimizar $[d(x)]^2$, donde $d(x)$ representa la distancia de (x, x^2) a (1, 0)].

7. Use el método de Newton-Raphson para aproximar, con una exactitud de 10^{-4}, el valor de x que produce el punto en la gráfica de $y = 1/x$ más cercano a (1, 0).

8. Usar el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación

$$f(x) = \left(\sin x - \frac{x}{2}\right)^2 \qquad \text{con} \quad p_0 = \frac{\pi}{2}\ .$$

Iterar hasta que se obtenga una precisión de 10^{-5} para la raíz aproximada. Resuélvase también con $p_0 = 5\pi$ y $p_0 = 10\pi$.

9. La función $f(x) = (4\ x - 7)\cdot(x - 2)$ tiene un cero en $p = 1.75$. Usar el método de Newton con las siguientes aproximaciones iniciales:
(a) $p_0 = 1.625$ (b) $p_0 = 1.875$ (c) $p_0 = 1.5$
(d) $p_0 = 1.95$ (e) $p_0 = 3$ (f) $p_0 = 7$
Explicar los resultados gráficamente.

10. La función descrita por $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0.4x}\cos \pi x$ tiene un número infinito de ceros.
(a) Usar el método de Newton para determinar, dentro de 10^{-6}, los únicos ceros negativos;
(b) Usar el método de Newton para determinar, dentro de 10^{-6}, los cuatro ceros positivos más pequeños;
(c) Determinar una aproximación inicial razonable (usar una gráfica aproximada de f) para determinar el enésimo cero positivo más pequeño de f.