CAPITULO VIII. EL METODO DE LA SECANTE

1. INTRODUCCION Y METODO

Utilizando los supuestos de los capítulos anteriores, daremos en este capítulo un procedimiento más rápido para hallar una raíz p de la ecuación $f(x) = 0$ que caiga en un intervalo especificado $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. En lugar de dividir por la midad el intervalo $[a, b]$ (método de bisección, Cap. XV), es mejor dividirlo en la relación $-f(a) : f(b)$. Esto ofrece un valor aproximado de la raíz

$$p_1 = a + h_1 = b - \tilde{h}_1 \ , \qquad (VIII.1)$$

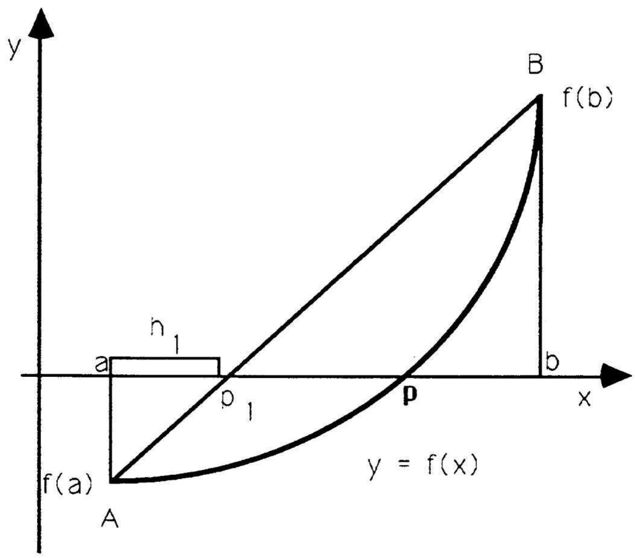
siendo

$$h_1 = -\frac{f(a)}{-f(a) + f(b)}\ (b - a) \ , \qquad \tilde{h}_1 = \frac{f(b)}{-f(a) + f(b)}\ (b - a) \ . \qquad (VIII.2)$$

Aplicando este procedimiento al intervalo $[a, p_1]$ o $[p_1, b]$ en cuyos extremos la función $f(x)$ tenga signos opuestos, tendremos una segunda aproximación p_2 de la raíz, etc. Este método es conocido con el nombre de **método de las partes proporcionales o método de la secante**.

Geométricamente, el método de las partes proporcionales es equivalente a sustituir la curva $y = f(x)$ por una cuerda que pase por los puntos $A\ [a, f(a)]$ y $B\ [b, f(b)]$.

Figura 1



En efecto la ecuación de la secante que pasa por A y B es

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} \ .$$

De aquí , considerando $x = p_1$ e $y = 0$, tenemos

$$p_1 = a - \frac{f(a)}{-f(a) + f(b)}\ (b - a) \ .$$

Para probar la convergencia del proceso, consideremos que la raíz está separada y la segunda derivada $f''(x)$ tiene signo constante en el intervalo $[a, b]$.

Supongamos que $f''(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$ (el caso $f''(x) < 0$ se reduce a nuestro caso si escribimos la ecuación de la forma $-f(x) = 0$). La curva $y = f(x)$ será convexa hacia abajo, y por tanto estará localizada por debajo de su secante $A\ B$. Son posibles dos casos:

(1) $f(a) > 0$, (ver figura 2),

(2) $f(a) < 0$, (ver figura 3).

Figura 2

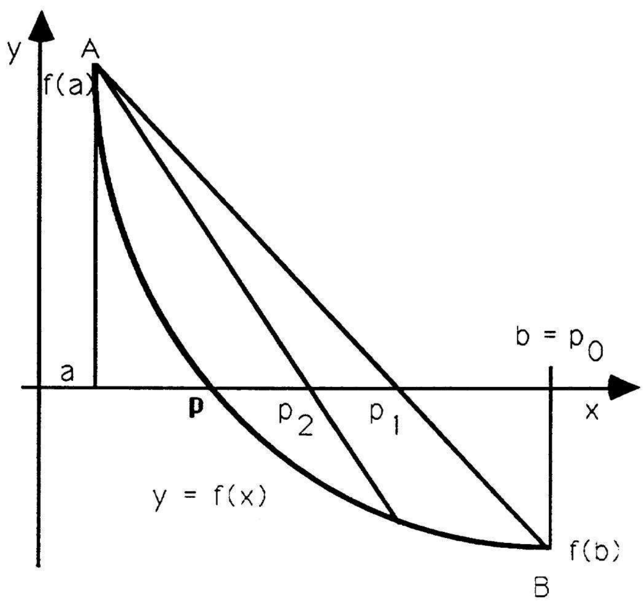
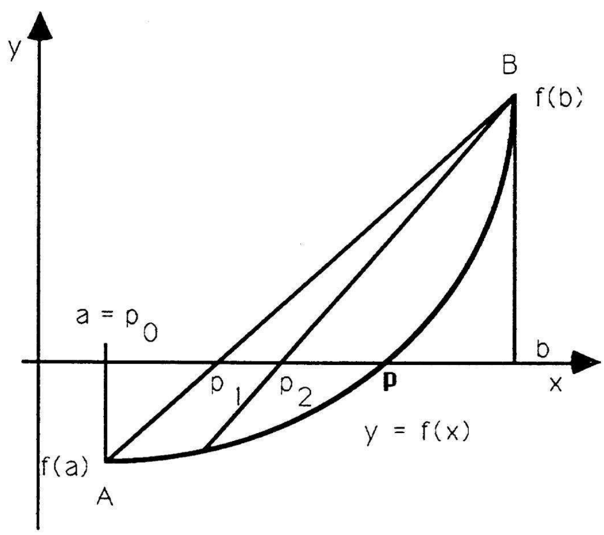


Figura 3



En el primer caso, el extremo a está fijo y las aproximaciones sucesivas:

$$p_0 = b \ , \qquad p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f(p_n) - f(a)} \ (p_n - a) \ , \qquad n = 0, 1, 2, ... \qquad (VIII.3)$$

forman una secuencia monótona decreciente acotada, y

$$a < p < ... < p_{n+1} < p_n < ... < p_1 < p_0 \ .$$

En el segundo caso, el extremo b está fijo y las aproximaciones sucesivas:

$$p_0 = a \ , \qquad p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f(b) - f(p_n)} \ (b - p_n) \ , \qquad n = 0, 1, 2, ... \qquad (VIII.4)$$

forman una secuencia monótona creciente acotada, y

$$p_0 < p_1 < ... < p_n < p_{n+1} < ... < p < b \ .$$

Resumiendo, sacamos las siguientes conclusiones:

(1) el extremo fijado es aquél para el cual el signo de la función $f(x)$ coincide con el signo de su segunda derivada $f''(x)$;

(2) las aproximaciones sucesivas p_n caen en el lado de la raíz p, donde el signo de la función $f(x)$ es opuesto al signo de su segunda derivada $f''(x)$.

En ambos casos, cada aproximación sucesiva p_{n+1} está más próxima a la raíz p que la precedente, p_n. Supongamos

$$\overline{p} = \lim_{n \to \infty} p_n \qquad (a < \overline{p} < b)$$

(existe límite, ya que la secuencia $\{p_n\}$ está acotada y es monótona). Pasando al límite en $(VIII.3)$, tenemos para el primer caso

$$\overline{p} = \overline{p} - \frac{f(\overline{p})}{f(\overline{p}) - f(a)} \ (\overline{p} - a) \ ,$$

donde $f(\overline{p}) = 0$. Como viene dado que la ecuación $f(x) = 0$ tiene solamente una raíz p en el intervalo (a, b), se deduce que $\overline{p} = p$.

Mediante el mismo procedimiento puede probarse en $(VIII.4)$, que $\overline{p} = p$ para el segundo caso.

Para hallar una estimación de la exactitud de la aproximación, podemos utilizar la fórmula $(V.2)$

$$|p_n - p| \leq \frac{|f(p_n)|}{m_1} \ ,$$

donde $|f'(x)| \geq m_1$ para $a \leq x \leq b$.

Daremos otra fórmula que permita estimar el error absoluto de un valor aproximado p_n conocidos dos valores sucesivos p_{n-1} y p_n.

Teorema VIII.1

Sea $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$ y supongamos que $f(a) \cdot f(b) < 0$, y que la derivada $f'(x)$, continua en el intervalo $[a, b]$ que contiene toda las aproximaciones, conserva el signo y sea tal que

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 < +\infty \ .$$

Entonces se estima el error absoluto de un valor aproximado p_n dado por las relaciones iterativas $(VIII.3)$ ó $(VIII.4)$ como

$$|p - p_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} \; |p_n - p_{n-1}| \; . \qquad (VIII.5)$$

Demostración: para mayor claridad, supongamos que las aproximaciones sucesivas p_n a la raíz exacta p están generadas por la fórmula $(VIII.3)$ (análogamente puede considerarse la fórmula $(VIII.4)$):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f(p_{n-1}) - f(a)} \; (p_{n-1} - a) \; ,$$

con $n = 1, 2, ...$ y donde el extremo a es fijo. Entonces:

$$-f(p_{n-1}) = \frac{f(p_{n-1}) - f(a)}{p_{n-1} - a} \; (p_n - p_{n-1}) \; .$$

Teniendo en cuenta el hecho de que $f(p) = 0$, tenemos

$$f(p) - f(p_{n-1}) = \frac{f(p_{n-1}) - f(a)}{p_{n-1} - a} \; (p_n - p_{n-1}) \; .$$

Utilizando el Teorema de Valor Medio, tendremos

$$(p - p_{n-1}) \; f'(\xi_{n-1}) = (p - p_n + p_n - p_{n-1}) \; f'(\xi_{n-1}) = (p_n - p_{n-1}) \; f'(\overline{p}_{n-1}) \; ,$$

donde $\xi_{n-1} \in (p_{n-1}, p)$ y $\overline{p}_{n-1} \in (a, p_{n-1})$. De aquí que

$$(p - p_n) \; f'(\xi_{n-1}) = [f'(\overline{p}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})] \; [p_n - p_{n-1}] \; ,$$

y entonces:

$$|p - p_n| = \frac{|f'(\overline{p}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})|}{|f'(\xi_{n-1})|} \; |p_n - p_{n-1}| \; .$$

Como $f'(x)$ tiene signo constante en el intervalo $[a, b]$ y $\overline{p}_{n-1} \in [a, b]$ y $\xi_{n-1} \in [a, b]$, tenemos sencillamente

$$|f'(\overline{p}_{n-1}) - f'(\xi_{n-1})| \leq M_1 - m_1 \; .$$

Deducimos, por tanto, que

$$|p - p_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} \; |p_n - p_{n-1}| \; ,$$

donde podemos tomar respectivamente para m_1 y M_1 los valores menor y mayor del módulo de la derivada $f'(x)$ en el intervalo $[a, b]$. **c.q.d.**

Si el intervalo $[a, b]$ es tan estrecho que se cumple la desigualdad

$$M_1 \leq 2 \; m_1$$

obtenemos entonces de la fórmula $(VIII.5)$

$$|p - p_n| \leq |p_n - p_{n-1}| \ .$$

En este caso, cuando

$$|p_n - p_{n-1}| \leq \varepsilon \ ,$$

donde ε es la cota de error absoluto especificada, puede garantizarse que

$$|p - p_n| \leq \varepsilon \ .$$

2. ALGORITMO Y EJEMPLOS

Algoritmo de la secante.

==

Para encontrar una solución de $f(x) = 0$, dada la función f en el intervalo $[a, b]$ donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo opuesto:

Entrada: extremos a y b; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0;

Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 2$, y definir:
$p_0 = b$, $q_0 = f(a)$ y $q_1 = f(b)$, si $f(a) > 0$;
$p_0 = a$, $q_0 = f(b)$ y $q_1 = f(a)$, si $f(a) < 0$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar *(calcular p_i)*:
$p = p_0 - \frac{q_1}{q_1 - q_0}\ (p_0 - a)$, si $f(a) > 0$;
$p = p_0 - \frac{q_1}{q_0 - q_1}\ (b - p_0)$, si $f(a) < 0$;

Paso 4: si $|p - p_0| < TOL$ entonces SALIDA (p);
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: tomar $p_0 = p$; $q_1 = f(p)$ *(redefinir p_0, q_1)*;

Paso 7: SALIDA ($'$*El método fracasó después de N_0 iteraciones, $N_0 =$* $'$, N_0);
(procedimiento completado sin éxito); PARAR.

==

Para ilustrar el algoritmo de la secante, considérese los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.

Hállese una raíz positiva de la ecuación

$$f(x) \equiv x^3 + 4\ x^2 - 10 = 0$$

con una exactitud de 0.0002.

Primeramente separamos la raíz. Ya que

$$f(1.3) = -1.043 < 0 \quad \text{y} \quad f(1.4) = 0.584 > 0$$

la raíz deseada p está en el intervalo $(1.3, 1.4)$. Además, estamos en el caso $f(a) < 0$, y entonces consideramos la fórmula $(VIII.4)$ en la cual el extremo b está fijo:

$$p_0 = a \ , \qquad p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f(b) - f(p_n)}\ (b - p_n) \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} p_0 =& 1.3 \ , \\ p_1 =& 1.3 + \frac{1.043}{0.584 + 1.043}\ (1.4 - 1.3) = 1.364105716 \ , \\ f(p_1) =& -0.01855573934 \ , \\ p_2 =& 1.364105716 + \frac{0.01855573934}{0.584 + 0.01855573934}\ (1.4 - 1.364105716) \\ =& 1.365211083 \ , \\ f(p_2) =& -0.00031260885 \ . \end{aligned}$$

Como $f'(x) = 3\ x^2 + 8\ x$ y para $p_2 < x < 1.4$ se tiene

$$m_1 = \min_{x \in [p_2, 1.4]} |f'(x)| = f'(p_2) = 16.513092561 \ ,$$

y

$$M_1 = \max_{x \in [p_2, 1.4]} |f'(x)| = f'(1.4) = 17.08 \ .$$

Luego podemos considerar que

$$0 < p - p_2 < \frac{|f(p_2)|}{m_1} \approx 0.189309694014 \times 10^{-4} < 2.0 \times 10^{-4} \ .$$

Obsérvese que la raíz con diez dígitos exacto de la ecuación es $p = 1.365230013$.

Si consideremos la cota $|p - p_2| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}\ |p_2 - p_1|$, obtedríamos:

$$|p - p_2| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}\ |p_2 - p_1| \approx 0.37948 \times 10^{-3} \ ,$$

ilustrandonos que el primer estimado es mucho mejor en este caso, dado que con esta segunda cota tendríamos que iterar una vez más.

Ejemplo 2.

Hállese la raíz negativa de la ecuación

$$f(x) \equiv x^4 + 0.1\ x^3 - 0.56\ x^2 + 0.1\ x - 1.56 = 0$$

con una exactitud de 7.5×10^{-3}.

Primeramente separamos la raíz. Ya que

$$f(-1.5) = 1.755 > 0 \quad \text{y} \quad f(-1.0) = -1.32 < 0$$

la raíz deseada p está en el intervalo $(-1.5, -1.0)$. Además, estamos en el caso $f(a) > 0$, y entonces consideramos la fórmula $(VIII.3)$ en la cual el extremo a está fijo:

$$p_0 = b \ , \qquad p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f(p_n) - f(a)} \ (p_n - a) \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
p_0 &= -\ 1.0 \ , \\
p_1 &= -\ 1.0 - \frac{1.32}{1.32 + 1.755} \ (-1.0 + 1.5) = -1.214634146 \ , \\
f(p_1) &= -\ 0.510234362 \ , \\
p_2 &= -\ 1.214634146 - \frac{0.510234362}{1.755 + 0.510234362} \ (-1.214634146 + 1.5) \\
&= -\ 1.278911586 \ , \\
f(p_2) &= -\ 0.137780231 \ , \\
p_3 &= -\ 1.278911586 - \frac{0.137780231}{1.755 + 0.137780231} \ (-1.278911586 + 1.5) \\
&= -\ 1.295005167 \ , \\
f(p_3) &= -\ 0.03336161091 \ .
\end{aligned}$$

Como $f'(x) = 4\ x^3 + 0.3\ x^2 - 1.12\ x + 0.1$ y para $-1.5 < x < p_3$ se tiene

$$m_1 = \min_{x \in [-1.5, p_3]} |f'(x)| = |f'(p_3)| = 6.633576181 \ ,$$

y

$$M_1 = \max_{x \in [-1.5, p_3]} |f'(x)| = |f'(-1.5)| = 11.045 \ .$$

Luego podemos considerar que

$$0 < p - p_3 < \frac{|f(p_3)|}{m_1} \approx 0.5029 \times 10^{-2} < 7.5 \times 10^{-3} \ .$$

Obsérvese que la raíz con diez dígitos exacto de la ecuación es $p = 1.365230013$.

Si consideremos la cota $|p - p_3| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}\ |p_3 - p_2|$, obtedríamos:

$$|p - p_3| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} \ |p_3 - p_2| \approx 0.010702 \ ,$$

ilustrandonos que el primer estimado es mucho mejor también en este caso (pero no siempre es así), dado que con esta segunda cota tendríamos que iterar una vez más.

EJERCICIOS.

1. Aproxime con 10^{-4} de precisión las raíces de las siguientes ecuaciones en los intervalos dados usando el método de la secante:

(a) $x^3 - 2\,x^2 - 5 = 0 \quad [1, 4]$

(b) $x - \cos x = 0 \quad [0, \pi/2]$

(c) $x^3 + 3\,x^2 - 1 = 0 \quad [-4, 0]$

(d) $x - 0.8 - 0.2 \sin x = 0 \quad [0, \pi/2]$

2. Encuentre una raíz aproximada de $x^3 - x - 1 = 0$ en $[1, 2]$ con precisión de 10^{-5} por el método de la secante.

3. Use el método de la secante para aproximar las soluciones de las ecuaciones siguientes con precisión de 10^{-5}:

(a) $x = \frac{2-e^x+x^2}{3}$

(b) $3\,x^2 - e^x = 0$

(c) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$

(d) $x^2 + 10\cos x = 0$

4. Resolver $4\cos x = e^x$ con exactidud de 10^{-4}, usando el método de la secante con $p_0 = 1$.

5. Calcule una aproximación de $\sqrt{3}$ exacta en 10^{-4}, usando el método de la secante.