CAPITULO VI. EL ALGORITMO DE BISECCION

1. INTRODUCCION Y METODO

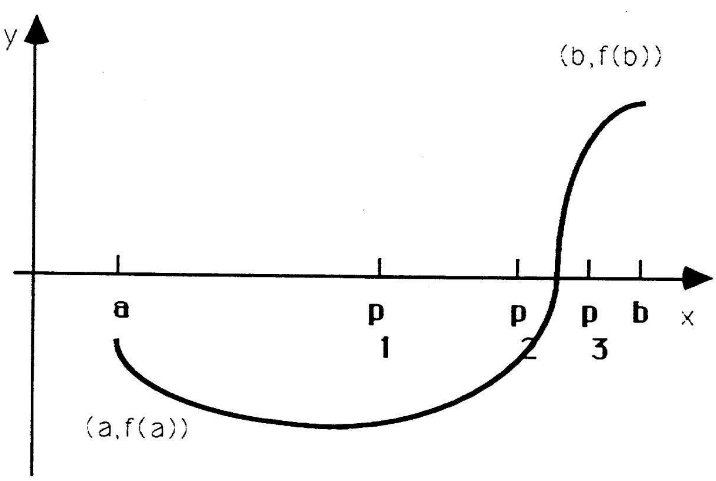
En este capítulo comenzaremos a analizar uno de los problemas más básicos del análisis numérico: el **problema de búsqueda de raíces**. El problema consiste en encontrar los valores de la variable x que satisfacen la ecuación $f(x) = 0$, para una función f dada.

La primera técnica, basada en el Teorema del Valor Intermedio, se llama **algoritmo de bisección** ó **método de búsqueda binaria**, ó también **método de Bolzano**.

Supongamos que tenemos una función continua f definida en el intervalo $[a, b]$, con $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos. Entonces por el corolario V.1 del Teorema del Valor Intermedio, existe p, $a < p < b$, tal que $f(p) = 0$. Aunque el procedimiento sirve para el caso en el que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos y hay más de una raíz en el intervalo $[a, b]$, por simplicidad se supondrá que la raíz en este intervalo es única.

El método requiere dividir repetidamente a la mitad los subintervalos de $[a, b]$ y, en cada paso, localizar la mitad que contiene a p. Para empezar, tomemos $a_1 = a$ y $b_1 = b$ y p_1 el punto medio de $[a, b]$; o sea $p_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. Si $f(p_1) = 0$, entonces $p = p_1$; si no, entonces $f(p_1)$ tiene el mismo signo que $f(a_1)$ o $f(b_1)$. Si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tienen el mismo signo, entonces $p \in (p_1, b_1)$, y tomamos $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$. Si $f(p_1)$ y $f(b_1)$ son del mismo signo, entonces $p \in (a_1, p_1)$, y tomamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$. Ahora re-aplicamos el proceso al intervalo $[a_2, b_2]$. Y así hasta que se encuentra $f(p) = 0$ ó el i-ésimo intervalo $[a_i, b_i]$ es más pequeño que una toleracia TOL prefijada, ó hasta que se cumpla alguna otra condición de paro.

Figura 1



El procedimiento de paro más común es el de dar un número máximo de iteraciones N_0. Cuando usamos un ordenador para generar las aproximaciones, conviene añadir una condición que imponga un máximo al número de iteraciones realizadas. Así se elimina la posibilidad de poner a la máquina en un ciclo infinito, una posibilidad que puede surgir cuando la sucesión diverge (y también cuando el programa está codificado incorrectamente). Esto se hace fácilmente dando una cota inicial N_0 y requiriendo que el procedimiento termine si se supera esa cota.

Otros procedimientos de paro que se pueden aplicar a cualquier técnica iterativa son los de dar una tolerancia $\varepsilon > 0$ y generar una sucesión $p_1, p_2, ..., p_n$ hasta que una de las siguientes condiciones se satisfaga:

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon \qquad (VI.1)$$

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon, \qquad p_n \neq 0 \qquad (VI.2)$$

$$|f(p_n)| < \varepsilon \ . \qquad (VI.3)$$

Desafortunadamente, pueden surgir dificultades usando cualquiera de estos criterios de paro. Por ejemplo, existen sucesiones $\{p_n\}$ con la propiedad de que las diferencias $p_n - p_{n-1}$ convergen a cero mientras que la sucesión misma diverge. Es posible también que $f(p_n)$ esté cerca de cero mientras que p_n difiere significativamente de p. Sin conocimiento adicional acerca de f ó p, la desigualdad $(VI.2)$ es el mejor criterio de paro que puede aplicarse porque verifica el error relativo.

Nótese que para empezar el algoritmo de bisección, se debe encontrar un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. En cada paso del algoritmo de bisección, la longitud del intervalo que contiene el cero de f se reduce por un factor de dos; por lo tanto es ventajoso escoger el intervalo inicial $[a, b]$ tan pequeño como sea posible. Por ejemplo, si $f(x) = 2\,x^3 - x^2 + x - 1$,

$$f(-4) \cdot f(4) < 0 \qquad \text{y} \qquad f(0) \cdot f(1) < 0 \ ,$$

así que el algoritmo de bisección puede usarse con cualquiera de los intervalos $[-4, 4]$ ó $[0, 1]$. Empezando el algoritmo de bisección con $[0, 1]$ en vez de con $[-4, 4]$, reducirá en tres el número de iteraciones requeridas para alcanzar una precisión específica.

2. ALGORITMO Y EJEMPLOS

Algoritmo de bisección.

==

Para encontrar una solución de $f(x) = 0$ dada la función f en el intervalo $[a, b]$ donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo opuestos:

Entrada: extremos a y b; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0;

Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $i = 1$;

Paso 2: mientras que $i \leq N_0$ seguir pasos 3–6;

Paso 3: tomar $p = a + \dfrac{(b-a)}{2}$ *(calcular p_i)*;

Paso 4: si $f(p) = 0$ ó $\dfrac{(b-a)}{2} < TOL$ entonces SALIDA (p);
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5: tomar $i = i + 1$

Paso 6: si $f(a) \cdot f(p) > 0$ entonces tomar $a = p$, si no, tomar $b = p$ *(calcular a_i, b_i)*;

Paso 7: SALIDA ($'$*El método fracasó después de N_0 iteraciones, N_0 =* $', N_0$); *(procedimiento completado sin éxito)*; PARAR.

==

Para ilustrar el algoritmo de bisección, considérese el siguiente ejemplo. En este caso se termina la iteración cuando $\dfrac{|p_{n-1} - p_n|}{|p_n|} < 10^{-4}$.

Ejemplo 1.

La función $f(x) = x^3 + 4\,x^2 - 10$ tiene una raíz en $[1,2]$ ya que $f(1) = -5$ y $f(2) = 14$. Es fácil ver que hay una sóla raíz en $[1,2]$. El algoritmo de bisección da los valores de la tabla 1.

Después de 13 iteraciones, podemos ver que $p_{13} = 1.365112305$ aproxima a la raíz p con un error de $|p - p_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.000122070$ y como $|a_{14}| < |p|$,

$$\frac{|p - p_{13}|}{|p|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \leq 9.0 \times 10^{-5} \ ,$$

la aproximación es correcta al menos con cuatro cifras significativas. El valor correcto de p, con nueve cifras decimales, es $p = 1.365230013$.

Es interesante notar que p_9 está más cerca de p que la aproximación final p_{13}, pero no hay manera de determinar esto a menos que se conozca la respuesta correcta.

Tabla 1

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\left\lvert \frac{p_n - p_{n-1}}{p_n} \right\rvert$
1	1.0	2.0	1.5	2.375	
2	1.0	1.5	1.25	−1.796875	0.2
3	1.25	1.5	1.375	0.16211	0.090909
4	1.25	1.375	1.3125	−0.84839	0.047619
5	1.3125	1.375	1.34375	−0.35098	0.023256
6	1.34375	1.375	1.359375	−0.09641	0.011494
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236	0.0057143
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	−0.03215	0.0028653
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.00007	0.0014306
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	−0.01605	0.00071582
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	−0.00799	0.00035778
12	1.364746094	1.365234375	1.364990234	−0.00396	0.00017886
13	1.364990234	1.365234375	1.365112305	−0.00194	0.000089422

El algoritmo de bisección, aunque conceptualmente claro, tiene inconvenientes importantes. Converge muy lentamente (o sea, N puede ser muy grande antes que $|p - p_N|$ sea suficientemente pequeño) y, más aún, una buena aproximación intermedia puede ser desechada sin que nos demos cuenta. Sin embargo, el método tiene la propiedad importante de que converge siempre a una solución y, por esta razón se usa frecuentemente para "poner en marcha" a los métodos más eficientes que se presentarán más adelante.

Definición

Decimos que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a α con *rapidez de convergencia* $O(\beta_n)$, donde $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión con $\beta_n \neq 0$ para cada n, si

$$\frac{|\alpha_n - \alpha|}{|\beta_n|} \leq K \qquad \text{para } n \text{ suficientemente grande}$$

donde K es una constante independiente de n. Esto se indica por lo general escribiendo $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$ ó $\alpha_n \to \alpha$ con una rapidez de convergencia $O(\beta_n)$.

Teorema VI.1

Sea $f \in \mathcal{C}[a,b]$ y supongamos que $f(a) \cdot f(b) < 0$. El procedimiento de bisección genera una sucesión $\{p_n\}$ que aproxima a p con la propiedad

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}, \qquad n \geq 1 \ . \tag{VI.4}$$

Demostración: para cada $n \geq 1$, tenemos

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a) \qquad \text{y} \qquad p \in (a_n, b_n) \ .$$

Ya que $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, para todo $n \geq 1$, se sigue que

$$|p_n - p| = \left|\frac{1}{2}(a_n + b_n) - p\right| \leq \left|\frac{1}{2}(a_n + b_n) - a_n\right| = \frac{1}{2}\ (b_n - a_n) = 2^{-n}\ (b-a) \ .$$

c.q.d.

De acuerdo con la definición de rapidez de convergencia, la desigualdad $(VI.4)$ implica que $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p y está acotada por una sucesión que converge a cero con una rapidez de convergencia $O(2^{-n})$. Es importante hacer notar que Teoremas como éste dan solamente cotas aproximadas para los errores.

Por ejemplo, esta cota aplicada al problema del ejemplo 1 afirma únicamente que

$$|p - p_9| \leq \frac{2-1}{2^9} \approx 2.0 \times 10^{-3} \ ,$$

siendo el error real mucho más pequeño:

$$|p - p_9| = |1.365230013 - 1.365234275| \approx 4.3 \times 10^{-6} \ .$$

Ejemplo 2.

Determinar aproximadamente cuántas iteraciones son necesarias para resolver $f(x) = x^3 + 4\ x^2 - 10 = 0$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-5}$ para $a_1 = 1$ y $b_1 = 2$. Esto requiere encontrar un entero N que satisfaga:

$$|p_N - p| \leq 2^{-N}\ (b-a) = 2^{-N} \leq 10^{-5} \ .$$

Para determinar N usamos logaritmos. Aunque sería suficiente usar logaritmos de cualquier base, usaremos logaritmos de base 10 pues la tolerancia está dada como una potencia de 10. Ya que $2^{-N} \leq 10^{-5}$ implica que $\log_{10}(2^{-N}) \leq \log_{10}(10^{-5}) = -5$,

$$-N \log_{10} 2 \leq -5 \qquad \text{ó} \qquad N \geq \frac{5}{\log_{10} 2} \approx 16.6 \ .$$

Parecería que se requieren 17 iteraciones para obtener una aproximación exacta a 10^{-5}. Con $\varepsilon = 10^{-3}$, se requieren $N \geq 10$ iteraciones y el valor de $p_9 = 1.365234275$ es exacto dentro de 10^{-5}. Es importante notar que estas técnicas dan solamente una cota para el número de iteraciones necesarias, y en muchos casos esta cota es mucho más grande que el número realmente requerido.

Ejemplo 3.

Utilizando el algoritmo de bisección para mejorar una raíz de la ecuación

$$f(x) \equiv x^4 + 2\,x^3 - x - 1 = 0$$

que caiga en el intervalo $[0, 1]$ y tal que $|f(p)| \leq 5.0 * 10^{-2}$, obtenemos los valores de la tabla 2.

Tabla 2

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	0.0	1.0	0.5	−1.1875
2	0.5	1.0	0.75	−0.58984375
3	0.75	1.0	0.875	0.05102539
4	0.75	0.875	0.8125	−0.30393982
5	0.8125	0.875	0.84375	−0.13557339
6	0.84375	0.875	0.859375	−0.04461473

Entonces, la aproximación $p_6 = 0.859375$ es la mejora de la raíz buscada. Además,

$$\frac{|p - p_6|}{|p|} < \frac{|b_7 - a_7|}{|a_7|} = \frac{|0.875 - 0.859375|}{0.859375} \approx 0.018182 < 5.0 \times 10^{-2} \ ,$$

es decir, la aproximación es correcta al menos con dos cifras significativas.

EJERCICIOS.

1. Determinar el número de raíces y separarlas, es decir, encontrar los intervalos adecuados para los cuales se da la unicidad de la raíz, y resolver también gráficamente las ecuaciones siguientes:

a) $x - 2^{-x} = 0$ *b*) $e^x - x^2 + 3\ x - 2 = 0$

Aproxime el cero con 10^{-2} de precisión usando el algoritmo de bisección.

2. Determinar el número de raíces y separarlas, es decir, encontrar los intervalos adecuados para los cuales se da la unicidad de la raíz, y resolver también gráficamente las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + 10\ \cos x = 0$ *b*) $2\ \sin \pi x + x = 0$

Aproxime el cero con 10^{-2} de precisión usando el algoritmo de bisección.

3. Demuestre que $f(x) = x^3 - x - 1$ tiene exactamente un cero en el intervalo $[1, 2]$. Aproxime el cero con 10^{-2} de precisión usando el algoritmo de bisección.

4. Use el algoritmo de bisección para encontrar soluciones con una exactitud de 10^{-2} para $x^4 - 2\ x^3 - 4\ x^2 + 4\ x + 4 = 0$ en:

a) $[-2, 0]$ *b*) $[0, 2]$ *c*) $[1, 2]$

5. Use el algoritmo de bisección para encontrar todas las soluciones de $x^3 - 7\ x^2 + 14\ x - 6 = 0$ con una precisión de 10^{-3}.

6. Use el algoritmo de bisección para encontrar soluciones correctas a 10^{-5} para los siguientes problemas:

a) $x - 2^x = 0$ para $0 \leq x \leq 1$,

b) $e^x + 2^{-x} + 2\ \cos x - 6 = 0$ para $1 \leq x \leq 2$,

c) $e^x - x^2 + 3\ x - 2 = 0$ para $0 \leq x \leq 1$.

7. Use el algoritmo de bisección para encontrar una solución, correcta en 10^{-2}, para $x + 0.5 + 2\ \cos \pi x = 0$ en $[0.5, 1.5]$.

8. Cambie el paso 6 en el algoritmo de bisección a:

"Si $f(p) \cdot f(b) > 0$ entonces tomar $b = p$, si no, tomar $a = p$"

Use este nuevo algoritmo para encontrar una solución, correcta a 10^{-2} , para $x+0.5+2\ \cos \pi x = 0$ en $[0.5, 1.5]$. Discuta cualquier discrepancia entre estos resultados y los del problema 5.

9. Encontrar una aproximación de $\sqrt{3}$ correcta en 10^{-4}, usando el algoritmo de bisección.

10. Use el Teorema VI.1 para encontrar una cota al número de iteraciones necesarias para alcanzar una aproximación con exactitud de 10^{-3} en la solución de $x^3 + x - 4 = 0$, que se encuentra en el intervalo $[1, 4]$. Encuentre una aproximación a esta raíz con este grado de exactitud.